# ランダム環境下における対称安定過程の漸近挙動

東北大学大学院 理学研究科（数学専攻）
三浦　充晴

# はじめに

本修士論文では，ポアソン分布に従うランダム環境下での対称安定過程のポリマーの漸近挙動について考察する．これまで，ランダム環境下におけるランダムウォークのモデル (F. Comets, T. Shiga, N. Yoshida [2]) やブラウン運動を用いたモデル (F. Comets, N. Yoshida [1]) などが研究されてきた．ブラウン運動のとき，[1] において，ポアソン分布に従うランダム環境下で，いわゆる**媒質の摂動が弱い相 (weak disorder)** と**媒質の摂動が強い相 (strong disorder)** について考察されている．本論文では，この媒質の強弱についての定理をブラウン運動から対称安定過程に拡張することを目標とする．

ここで，[1] の設定について述べる．$(\{\omega_t\}_{t\geq 0}, \{P^x\}_{x\in\mathbf{R}^d})$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に定義された $d$ 次元標準ブラウン運動としたとき，$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上にブラウン運動のポリマー $V_t := V_t(\omega) = \{(s,x); s \in (0,t],\ x \in U(\omega_s)\}$ をとる．ただし，$U(x)$ は $x$ を中心とする体積 1 の閉球である．

次に，ランダムな環境について述べる．$(\mathcal{M}, \mathcal{G}, Q)$ を確率空間とする．$\mathcal{M}$ は整数値をとる正の測度の全体である．$\eta \in \mathcal{M}$ は互いに共通部分を持たない有界な集合 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ に対して，$\eta(A_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ が互いに独立であり，確率測度 $Q$ は $Q(\{\eta(A) = k\}) = \exp(-|A|)\dfrac{|A|^k}{k!},\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ を満たす．この $\eta \in \mathcal{M}$ は媒質の 1 つの配置を表しており，確率測度 $Q$ によって媒質はランダムに配置される．このような測度を**ポアソンランダム測度**という．$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度

$$\mu_t^x(d\omega) = \frac{\exp\left(\beta\eta(V_t(\omega))\right)}{Z_t^x} P^x(d\omega), \quad \eta \in \mathcal{M}$$

を考える．ただし $Z_t^x := P^x\left[\exp(\beta\eta(V_t))\right]$ であり，$Z_t^x$ を**分配関数 (partition function)** という．$\eta(V_t)$ が大きいとき，$V_t$ は多くの媒質にぶつかることを意味する．$\beta > 0$ のとき，$V_t$ が多くの媒質にぶつかれば，$\beta\eta(V_t)$ が大きくなることにより，そのときの測度は密度が大きくなる．逆に，$\beta < 0$ のときには，$V_t$ が多くの媒質にぶつかると，$\beta\eta(V_t)$ は小さくなり，そのときの測度は密度が小さくなる．[1] において測度 $\mu_t^x$ 上での標準ブラウン運動の振る舞いについて考察している．

以下，本論文に関係する [1] の結果についてより詳しく述べる．$\lambda(\beta) := e^\beta - 1$ とする．このとき，$Z_t^x = P^x[\exp(\beta\eta(V_t))]$ は，$W_t^x := e^{-\lambda t} Z_t^x$ と定数倍することによ

り，$Q[W_t]=1$ と正規化される．この $W_t$ を**正規化された分配関数**という．さらに，この $W_t$ はマルチンゲールになることにより，極限 $W_\infty := \lim_{t\nearrow\infty} W_t$, $Q$ - a.s. が存在する．ブラウン運動の場合には [1] において，次のような結果が得られている．

(a) $d=1,2$ のとき, $\beta\neq 0$ ならば,

$$Q\{W_\infty=0\}=1.$$

(b) $d\geq 3$ のとき, $\beta_0>0$ が存在して, 任意の $\beta\in(-\infty,\beta_0(d))$ に対して

$$Q\{W_\infty>0\}=1.$$

更に次元と指数 $\beta$ の間に次のような関係が成り立つ．

$$\lim_{d\to\infty}\beta_0(d)=\infty.$$

今，$Q\{W_\infty=0\}=1$ となることを**媒質の摂動が強い**といい，$Q\{W_\infty>0\}=1$ となることを**媒質の摂動が弱い**という．(b) における後半の関係式によって，次元が高くなるにつれてブラウン運動がランダムな環境に対する影響を受けなくなっているということが類推できる．このような現象の起こる１つの原因として考えられることがある．それがブラウン運動の**再帰性 (recurrent)**，**非再帰性 (transient)** である．ここでブラウン運動 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が再帰性をもつとは，ブラウン運動が任意の空でない開集合に確率 1 で到達することであり，非再帰性を持つとは，再帰性を持たないことであり，このとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は確率 1 で無限遠点に行く．したがってポアソン分布に従いランダムに粒子を配置するとき，再帰性を持てば，何度も空でない開集合に戻ってくるため，媒質の影響を強く受けることになる．よって，再帰的なときのほうがランダム環境を置かない場合とは違った結果が得られる可能性が高い．

ブラウン運動の再帰性，非再帰性は次元によって次のように区分される．$d=1,2$ のとき，ブラウン運動は再帰的であり，$d\geq 3$ のとき，非再帰的である．この結果は [1] の結果において $d=1,2$ のときに $\beta\neq 0$ ならば $Q\{W_\infty=0\}=1$ となることに対応しており，$d\geq 3$ ならば $Q\{W_\infty>0\}=1$ となることに対応している．以上のことからブラウン運動を対称安定過程に拡張する場合にも再帰性，非再帰性によって分配関数の極限が大きく異なっていることが予想される．

対称安定過程の指数 $\alpha$ と再帰性，非再帰性については次のような結果が知られている．$\alpha\in(0,2)$ のとき対称安定過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は，$d=1$ かつ $1\leq\alpha<2$ のとき再帰的であり，$d=1,\ 0<\alpha<1$ または $d\geq 2$ のとき，非再帰的である．つまり，$d=1$ かつ $1\leq\alpha<2$ のときがよりランダムな環境の影響を受けやすいということが考えられる．対称安定過程の場合は再帰性，非再帰性が指数 $\alpha$ によって連続的に変化

するので，次元のみによって決まっているブラウン運動の場合よりも再帰性と媒質の摂動の強弱との関係性がより明確に表れることが期待される．ここに，本研究の動機の 1 つがある．実際，本論文では，対称安定過程の場合についての結果として，$d=1,\ 1<\alpha<2$ のとき，$\beta\neq 0$ で媒質の摂動が強い相が表れ，$d>\alpha$ のとき，$\beta$ が小さければ媒質の摂動が弱い相が表れるという結果が得られた．

この媒質の摂動の強弱を数学的な視点からも見ることができる．$\mathcal{G}_t := \sigma[\eta(A\cap((0,t]\times\mathbf{R}^d)); A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)]$ として，測度 $\tilde{Q}$ を

$$\tilde{Q}(A) := \int_A W_t Q(d\eta),\quad A\in\mathcal{G}_t$$

と定義すると，$W_\infty > 0,\ \ Q$ - a.s. のとき，測度 $\tilde{Q}$ は 測度 $Q$ と互いに絶対連続な測度となっていることがわかる．逆に，$W_\infty = 0,\ \ Q$ - a.s. のとき，測度 $\tilde{Q}$ は 測度 $Q$ に対して，特異な測度になっていることがわかる．このことから，$\tilde{Q}$ が元の測度 $Q$ に対して，媒質の摂動が強くなると絶対連続性が失われることを示している．

最後に本論文の構成について述べる．第 1 章では，対称安定過程やポリマー，ランダム環境などを定義し，後の定理に必要な分配関数について述べる．第 2 章では第 1 章で定義した分配関数の正規化について述べ，それに伴う媒質の摂動の強弱について定義し，主定理を述べる．第 3 章では主定理の証明について述べる．

本論文を書き上げるにあたり，指導教官の竹田 雅好先生には多大なご指導を頂きました．この場を借りて厚く御礼申し上げます．また，確率論セミナーの皆様にも多くの有益なご意見を頂きました．深く感謝いたします．

# 第 1 章　準備

この章では，第 2 章以降に必要な概念を定義し，本論文における確率モデルを定義する。そのために，ランダム環境やポリマー等の用語の準備をする．また，この章の後半においては第 2 章で定義する主定理の証明について必要な概念を定義する．

本論文では確率測度 $Q$ に対し，その確率を $Q(\cdot)$ または，$Q\{\cdot\}$ と書き，期待値を $Q[\cdot]$ と書く．

## 1.1　安定過程

まず，安定過程に関する性質について述べることにする．

**定義 1.1.** $\mathbf{R}^d$ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が次の性質をもつとき $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $d$ 次元安定過程という．

(i) $\{X_t\}$ は $0 < t_0 < \cdots < t_n$ なる分割に対して，$X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が独立である．(独立増分性)

(ii) $X_{s+t} - X_t$ の分布が $t$ によらない (時間的一様性)

(iii) $X_t$ は確率連続である．

(iv) 任意の $a > 0$ に対し，$b > 0, c \in \mathbf{R}$ が存在して，$\{X_{at}; t \in [0,\infty)\}$ と $\{bX_t; t \in [0,\infty)\}$ が法則同値である．

ここで安定過程の指数について述べる．安定過程の指数は次のような定理によって得られる．今，測度 $\mu(dx)$ に対し，その特性関数を

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(z,x)}\mu(dx), \quad z \in \mathbf{R}^d$$

で定義する．

**定理 1.2.** $\{X_t\}$ を $X_t = 0$　a.s. とならない安定過程とする．このとき，実数 $\alpha \neq 0$ がただ 1 つ存在して，任意の $t > 0$ に対し，

$$X_t \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$$

となる．ここで，$\stackrel{d}{=}$ は分布の意味で等しいことを表す．

**証明.** 安定過程の定義から，各 $t>0$ に対して，$X_t = a_t X_1$ となる $a_t > 0$ が一意に定まる．このとき，$X_1$ の分布を $\mu$ とする．安定分布の性質から，

$$\hat{\mu}(z)^t = \hat{\mu}(a_t z), \quad z \in \mathbf{R}^d$$

となる．$\hat{\mu}(a_t a_s z) = \hat{\mu}(z)^{st} = \hat{\mu}(a_s a_t z)$ であるから，

$$a_{st} = a_s \cdot a_t$$

であることがわかる．ここで，$a_t$ の連続性について述べる．$t_n \to t_0$ とする．このとき，$a_{t_n} \to 0$ ならば,

$$\hat{\mu}(z)^{t_0} = \hat{\mu}(0) = 1$$

であるから，$X_{t_0} = 0 \ \ a.s$ となって矛盾する．

一方，$a_{t_n} \to \infty$ ならば,

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(a_{t_n}^{-1} z)^{t_n} \to \hat{\mu}(0)^{t_0} = 1$$

となり，同様に $X_{t_0} = 0 \ \ a.s$ となって矛盾を生じる．したがって，$a_{t_n} \to a$ とすると，$\hat{\mu}(z)^{t_0} = \hat{\mu}(az), 0 < a < \infty$ となる．これにより連続性が従う．
この連続性と $a_{st} = a_s \cdot a_t$ の等式により，

$$a_t = t^{\beta}$$

と書ける．先ほどの連続性のときの議論と同様にして，$\beta < 0$ のとき，$t \downarrow 0$ のとき

$$a_t \to \infty$$

であり，$\beta = 0$ のとき，$a_t = 1$ より，どちらも $\hat{\mu}(z) = 1$ を得るから $X_{t_0} = 0 \ \ a.s$ に矛盾する．以上から $\beta > 0$ であり，$\beta = \frac{1}{\alpha}$ と定義すればよい． ∎

このときの指数 $\alpha$ を安定過程の指数という．この指数 $\alpha$ は $0 < \alpha \leq 2$ を満たす．

**命題 1.3.** $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を安定過程とする．このとき，任意の $s \geq 0$ に対し，$\{X_{t+s} - X_s\}_{t\geq 0}$ は $\{X_t\}_{t\geq 0}$ と法則同値であり，安定過程となる．さらに，$\{X_t\}_{0\leq t\leq s}$ と独立である．

この命題により，安定過程はマルコフ性を満たす．さらに，対称性とは $X \overset{d}{=} -X$ を満たすことをいう．

これ以降のさまざまな概念を定義するのに必要な概念を定義する．そのためにまず，$(\mathcal{M}, \mathcal{G}, Q)$ を確率空間とする．また，$\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ をそのフィルター (filtration) とする．このとき，次のマルチンゲールの概念を定義する．

**定義 1.4.** 確率過程 $X := \{X_t\}_{t\geq 0}$ が$\{\mathcal{G}_t\}$-**マルチンゲール (martingale)** であるとは次を満たすことである．

(i) $X$ は $\mathcal{G}_t$ 適合である．すなわち，$X_t$ が $\mathcal{G}_t$-可測である．

(ii) 任意の $t \geq 0$ に対して，$Q[|X_t|] < \infty$ である．

(iii) $Q[X_t|\mathcal{G}_s] = X_s$ が任意の $t > s$ について成り立つ．

特にフィルターについて誤解の無い場合は，単にマルチンゲールと記す．
以後，対称 $\alpha$-安定過程を次に示す表記によって示すことにする．

**定義 1.5.** $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間として，その上に次の対称安定過程を考える．

$$(\{\omega_t\}_{t\geq 0}, \{P^x\}_{x\in\mathbf{R}^d})$$

を $d$ 次元対称 $\alpha$-安定過程とその法則とする．いま，

$$P^x(\omega_0 = x) = 1$$

とする．また，この対称安定過程のフィルターを

$$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} := \{\sigma[\omega_s; s \in (0,t]]\}_{t\geq 0}$$

と定義する．ここで，$\sigma[\cdot]$ は最小の $\sigma$-加法族である．さらに，$d$ 次元の対称 $\alpha$-安定過程の推移密度関数を $p^\alpha(t,x,y)$ とする．

このとき，$p^\alpha(t,x,y)$ は等式

$$e^{-t|z|^\alpha} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(y,z)} p^\alpha(t,x,y)dy$$

を満たす．

**注意 1.6.** $\alpha = 2$ のとき，$e^{-t|z|^2} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(y,z)} p^\alpha(t,x,y)dy$ であることにより，$p^\alpha(t,x,y)$ はガウス分布となる．したがって，対称 2-安定過程はブラウン運動と一致する．

次に対称安定過程の推移密度関数に関する評価を与えることにする．

**命題 1.7.** (R.F. Bass, Z-Q. Chen [4]) $d = 1$ のとき，$c_1 > 0$ が存在して，

$$p^\alpha(t,0,y) \leq c_1 t^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{1}{\alpha}}}{|y|^{1+\alpha}}\right) \tag{1.1}$$

が成り立つ．

最後に，主定理と関連性があると予想される対称安定過程の再帰性，非再帰性について述べることにする．

**定義 1.8.** 対称安定過程が再帰性を持つとは，任意の開集合 $U$ に対して，$\tau_U := \inf\{t > 0; \omega_t \in U\}$ としたとき，

$$P^x(\tau_U < \infty) = 1$$

となることである．非再帰性を持つとは，再帰的でないことである．

非再帰性を持つとき，$\{\omega_t\}_{t\geq 0}$ は，$\lim_{t\to\infty} |\omega_t| = \infty$，$P^x$−a.s. を満たす．再帰的であることは任意の開集合に何度も到達することを表し，非再帰的であることは確率 1 で無限遠点に行くことを示している．

**命題 1.9.** (K. Sato [7]) $\alpha \in (0, 2)$ とする．対称安定過程は

(i) $d = 1, 1 \leq \alpha < 2$ のとき，再帰的である．

(ii) $d \geq 2$ のとき，非再帰的である．

## 1.2 ポアソンランダム測度とポリマー

次に，媒質の配置を定めるため，ポアソンランダム測度とポリマーの概念を定義する．

**定義 1.10.** $(\mathcal{M}, \mathcal{G}, Q)$ を確率空間とする．$\mathcal{M}$ は整数値をとる正の測度の全体であり，その標本を $\eta \in \mathcal{M}$ とかく．互いに共通部分を持たない有界な集合 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ に対して，確率変数 $\eta(A_i)$，$(1 \leq i \leq n)$ は互いに独立であり，確率測度 $Q$ は

$$Q(\{\eta; \eta(A) = k\}) = \exp(-|A|)\frac{|A|^k}{k!}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$$

を満たす．ただし，$\mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上のボレル集合族を表し，また，$|\cdot|$ は $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のルベーグ測度を表す．この測度 $Q$ を**ポアソンランダム測度**という．次に $t > 0$ に対し，$\eta_t(A)$ を次のように定義する．

$$\eta_t(A) := \eta\left(A \cap ((0, t] \times \mathbf{R}^d)\right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d) \tag{1.2}$$

また部分 $\sigma-$ 加法族を次で定義する．

$$\mathcal{G}_t := \sigma[\eta_t(A); A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)]. \tag{1.3}$$

このランダム測度 $\eta$ は不純物を表している．詳しく述べると，

$$Q(\{\eta(A) = k\}) = \exp(-|A|)\frac{|A|^k}{k!}$$

というのは $A$ に含まれる点の個数が $k$ 個である確率を表しており，ポアソン分布にしたがって配置されている．今，$A$ というのは $d+1$ 次元空間の開集合を表しているが，この $d+1$ 次元というのは 1 次元は時間軸を表しており，$d$ 次元は空間を表している．$\eta(A)$ とは，$A$ 上に含まれる不純物の点を表している．

最後にポリマーを定義する．$U(x) \subset \mathbf{R}^d$ を $x \in \mathbf{R}^d$ を中心とする体積 1 の閉球とし，

$$V_t := V_t(\omega) = \{(s,x); s \in (0,t], x \in U(\omega_s)\}.$$

とおく．

すべての $t > 0$ と $x \in \mathbf{R}^d$ に対して, $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に確率測度 $\mu_t^x$ を次で定義する:

$$\mu_t^x(d\omega) := \frac{\exp\left(\beta\eta(V_t)\right)}{Z_t^x} P^x(d\omega). \tag{1.4}$$

ここで, $\beta \in \mathbf{R}$ は指数であり,

$$Z_t^x := P^x[\exp(\beta\eta(V_t))].$$

である．この $Z_t^x$ を**分配関数**と呼ぶ．いま, 測度 $\mu_t^x$ のもとで, グラフ $\{(s,\omega_s)\}_{0\le s\le t}$ を $(d+1)$ 次元空間上のポリマーの道として解釈する．$\eta$ の定義から，$\eta(V_t)$ は，ポリマーがたどってきた道にどのくらいの不純物の点がぶつかったかということを表している．ポリマーの道は $\beta > 0$ のときポアソン分布に従う媒質と引き付けあい，逆に $\beta < 0$ のとき反発する．このような状況下で漸近挙動に関する情報は先ほど定義した分配関数 $Z_t^x$ を詳しく調べることによって得られるが, 本論文の中では分配関数の $t \to \infty$ における振る舞いを調べる．重要な指数として指数

$$\lambda := \lambda(\beta) = e^\beta - 1 \in (-1, \infty)$$

を考える．また，表記法として，$P, \mu_t, Z_t$ をそれぞれ $P^x, \mu_t^x, Z_t^x$ の始点 $x$ が $x=0$ の場合のものとし，確率測度 $P^x, \mu_t^x$ に対しその直積測度をそれぞれ $P^{x,x}, \mu_t^{x,x}$ とする．

ここで，このポリマーやランダム測度に関連して，いくつか基本的な計算をする．まず，ポリマーの体積について考察する．今，$U(x)$ が $\mathbf{R}^d$ 上の体積 1 の球であることに注意すると，任意の $\omega$ に対して，

$$|V_t(\omega)| = |\{(s,x); s \in (0,t], x \in U(\omega_s)\}| = \int_0^t |U(\omega_s)| ds = t.$$

が成り立つ．次に，ポリマーにどのくらいの不純物の点がぶつかっているかその期待値を計算すると，

$$Q[\eta(V_t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-|V_t|} \cdot |V_t|^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot t = t.$$

このように $t$ 時間にポリマーがぶつかる不純物の点の期待値は $t$ 個ということになる．今述べたように $\eta(V_t)$ を定義すると，この $\eta(V_t)$ は半直線上のポアソン点過程になっている．さらに，$Q[\eta(V_t)] = t$ であることから，

$$Q[\eta_t(dtdx)] = dtdx.$$

となることがわかる．

## 1.3 証明のための諸概念

次に主定理の証明に使ういくつかの命題を述べることにする．まず一様可積分性についての十分条件をあげる．

**定義 1.11.** 確率変数の族 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が一様可積分であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある定数 $K > 0$ が存在して，

$$\sup_{t\geq 0} Q[|X_t|; |X_t| > K] < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

次に示す命題は一様可積分性の十分条件を示すものである．

**命題 1.12.** ある $p > 1$ に対して，$\sup_{t\geq 0} Q[|X_t|^p] < \infty$ ならば，$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は一様可積分である．

**証明．** $v \geq K > 0$ のとき，$v \leq K^{1-p}v^p$ であることにより次の不等式が得られる．

$$\sup_{t\geq 0} Q[|X_t|; |X_t| > K] \leq K^{1-p} \sup_{t\geq 0} Q[|X_t|^p; |X_t| > K] \leq K^{1-p}A$$

この不等式により一様可積分性が従う． ∎

次に一様可積分性とマルチンゲールの $L^1$ 収束の関係性について述べる．

**定理 1.13.** $\{M_t\}$ を $(\mathcal{M}, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_t\}, Q)$ 上の一様可積分なマルチンゲールとする．このとき，$M_\infty := \lim_{t\to\infty} M_t$ が $Q$-a.s. かつ $in\ \ L^1$ で収束し，全ての $t$ に対し，$M_\infty = Q[M_\infty|\mathcal{G}_t]$ が成り立つ．

**証明．** この定理は次のようにして示される．$M$ が一様可積分であることから，任意の $t$ に対して，$Q[M_t] < \infty$ となる．それゆえに，マルチンゲールの収束定理により，$M_\infty := \lim_{t\to\infty} M_t \quad Q$-a.s. が成り立つ．更に，一様可積分性から $Q[|M_t - M_\infty|] \longrightarrow 0$ as $\ t \to \infty$ が成り立つ． ∎

次に準備として，直積測度でいろいろな分量を測ることを考える．$(\Omega,\mathcal{F})$ の直積空間を $(\Omega^2,\mathcal{F}^{\otimes 2})$ とする．そして直積測度 $\mu_t^{x,x}$ として，

$$I_t^x := \mu_t^{x,x}[|U(\omega_t)\cap U(\tilde{\omega}_t)|].$$

と定義し，さらに

$$J_t^x := \mu_t^{x,x}[|V_t(\omega)\cap V_t(\tilde{\omega}_t)|].$$

と定義する．ここで，$|\cdot|$ はそれぞれ $\mathbf{R}^d$,$\mathbf{R}^{d+1}$ 上のルベーグ測度である．

この式が表しているのは２つの独立したポリマーを同じ環境下（今の場合ポアソン分布によって同じ不純物が添加されている場合）においてポリマーが重なり合った部分の体積がどのくらいであるかという事をあらわしている。後に述べる主定理の証明において，この量は大きな意味を持つことになる量である．

次に主定理の証明の中で扱う**伊藤の公式**について述べておく．(N. Ikeda , S. Watanabe [3])

**定義 1.14.** $[0,\infty)\times\mathbf{R}^d\times\mathcal{M}$ 上で定義された関数 $f(t,x,\eta)$ が**可予測 (predictable)** であるとは，$\Phi:=\sigma[A]$ として，$f(t,x,\eta)$ が $\Phi/\mathcal{B}(\mathbf{R}^1)$ 可測であることである．ここで，$A:=\{g(t,x,\eta);g(t,x,\eta)$ は次の (i), (ii) を満たす. $\}$ とする．

(i) 任意の $t>0$ に対し，$(x,\eta)\mapsto g(t,x,\eta)$ が $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)\times\mathcal{G}_t$-可測である．

(ii) 任意の $(x,\eta)$ に対し，$t\mapsto g(t,x,\eta)$ が左連続である．

ここで，一般にポアソン点過程に対し，$Q[\eta_t(dtdx)]=dxn(dt)$ となる測度 $n$ とする，$f(t,x,\eta)$ が可予測かつ $\int_{[0,t]\times\mathbf{R}^d}Q\left[|f(t,x,\eta)|\right]n(ds)dx<\infty$ であるとする．このとき，

$$\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)\bar{\eta}_t(dsdx):=\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)\eta_t(dsdx)-\int_0^{t}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)n(ds)dx$$

と定義すると，$\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)\bar{\eta}_t(dsdx)$ はマルチンゲールになる．今，$Q[\eta_t(dtdx)]=dtdx$ であったことに注意すれば，$n(dt)=dt$ であることがわかる．よって，改めて

$$\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)\bar{\eta}_t(dsdx):=\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)\eta_t(dsdx)-\int_0^{t}\int_{\mathbf{R}^d}f(s,x,\eta)dsdx$$

とおくことにする．関数の族

$$\mathbf{F}:=\{f(t,x,\eta);f\text{ は可予測},\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d}|f(t,x,\eta)|\eta_t(dsdx)<\infty\}$$

とし，

$$\mathcal{M}_2^{c,loc}:=\{X=(X_t)_{t\geq 0};\text{連続な局所 2 乗可積分なマルチンゲールで}, X_0=0\ \ \text{a.s.}\}$$

とする．

また，一般に $\{M_t\}_{t\geq 0}, \{N_t\}_{t\geq 0}$ を 2 乗可積分な $(\mathcal{M},\mathcal{G},Q)$ 上のマルチンゲールとするとき，$M_tN_t - <M,N>_t$ が $(\mathcal{G}_t)$-マルチンゲールになるような増加過程 $<M,N>_t$ が存在する．このような $<M,N>_t$ を $M,N$ に対する**2 次変分 (quadratic variation)** という．

このとき，次のような**半マルチンゲール** (semi-martingale) を定義する．

**定義 1.15.** $d$ 次元確率変数 $X(t) := (X_1(t),\cdots,X_d(t))$, とし，

$$f(t,x,\eta) := (f_1(t,x,\eta),\cdots,f_d(t,x,\eta))$$

とする．このとき，

$$X_i(t) := X_i(0) + M_i(t) + A_i(t) + \int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d} f_i(s,x,\cdot)\eta_t(dsdx)$$

と定義する．ここで，$M_i(t)$, $A_i(t)$, $f_i(t,x,\cdot)$ は次の性質を満たす．

(i) $M_i(t) \in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ である．

(ii) $A_i(t)$ は $\mathcal{G}_t$-適合な過程で，$A(0) = 0 \quad \text{a.s.}$ であり，全ての標本関数が各有限区間で有界変動である．

(iii) $1 \leq i \leq d$ に対し，$f_i(t,x,\cdot) \in \mathbf{F}$ である．

このような状況下で次の伊藤の公式が成り立つ．

**定理 1.16.** (伊藤の公式) $F \in C^2(\mathbf{R}^d)$ とし，半マルチンゲール $X(t)$ に対し，$F(X(t))$ も半マルチンゲールとなり，

$$\begin{aligned} F(X(t)) - F(X(0)) &= \sum_{i=1}^d \int_0^t F_i'(X(s))dM_i(s) + \sum_{i=1}^d \int_0^t F_i'(X(s))dA_i(s) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t F_{i,j}''(X(s))d\mathrm{<M_i, M_j>(s)} \\ &+ \int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d} \{F(X(s-)+f(s,x,\cdot)) - F(X(s-))\}\eta_t(dsdx) \end{aligned} \tag{1.5}$$

が成り立つ．

ここで，後に必要となるいくつかの等式を計算しておくことにする．

**命題 1.17.** 次の等式が成り立つ．

(i) $\eta(V_t) = \displaystyle\int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} 1\{x \in U(\omega_s)\}\eta_t(dsdx).$

(ii) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して,

$$\exp(\beta\eta(V_t)) = 1 + \lambda \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} \eta_t(dsdx)\exp(\beta\eta(V_{s-}))1\{x \in U(\omega_s)\}.$$

(iii) $Z_t^x = 1 + \lambda \displaystyle\int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} \eta_t(dsdy)P^x[\exp(\beta\eta(V_{s-})1\{x \in U(\omega_s)\}].$

**証明.** (i) は定義より, $V_t = V_t(\omega) = \{(s,x); s \in (0,t], x \in U(\omega_s)\}$ であることから,

$$\eta(V_t) = \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} 1\{x \in U(\omega_s)\}\eta(dsdx)$$

となることにより成り立つ.
(ii) は伊藤の公式において,

$$X(t) = \eta(V_t),\ F(X) = \exp(\beta X),\ f(t,x,\cdot) = 1\{x \in U(\omega_t)\}$$

とし, $x \in U(\omega_s)$ ならば, $\exp(\beta \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}) - 1 = e^\beta - 1 = \lambda$ であり, $x \notin U(\omega_s)$ ならば, $\exp(\beta \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}) - 1 = 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\exp(\beta\eta(V_t)) - 1 &= \int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d} \{\exp\left(\beta(\eta(V_{s-})) + 1\{x \in U(\omega_s)\}\right) - \exp(\beta\eta(V_{s-}))\}\eta_t(dsdx) \\
&= \int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left(\beta\eta(V_{s-})\right)\cdot\left(\exp(\beta\cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}) - 1\right)\eta_t(dsdx) \\
&= \lambda\int_0^{t+}\int_{\mathbf{R}^d} \exp(\beta\eta(V_{s-})1\{x \in U(\omega_s)\}\eta_t(dsdx).
\end{aligned}$$

となり, (ii) が成り立つ.
(iii) については (ii) の両辺を $P^x$ で期待値をとり, フビニの定理を用いることにより従う. ∎

最後に**ハスミンスキーの補題 (Khas'minskii's Lemma)** を紹介しておく. (K.L. Chung , Z. Zhao [5])

**補題 1.18.** $\{\omega_t\}_{t\geq 0}$ を対称安定過程とし, 可測関数 $f(x),\ x \in \mathbf{R}^d$ とする. $\tau$ を次の性質を満たす停止時刻とする. 任意の $t(\tau \geq t \geq 0)$ に対して,

$$\tau \leq t + \tau \circ \theta_t.$$

である．

$$c := \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x\left[\int_0^\tau f(\omega_s)ds\right] < 1$$

のとき，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x\left[\exp(\int_0^\tau f(\omega_s)ds)\right] \leq \frac{1}{1-c}.$$

が成り立つ．ここで，$(\theta_t\omega)(s) := \omega(s+t)$ とする．

**証明.** 可測関数 $f(x),\ x\in\mathbf{R}^d$ に対して，

$$A_t := \int_0^t f(\omega_s)ds$$

とする．このとき，対称安定過程のマルコフ性によって，$A_{s+t} = A_s + A_t\circ\theta_s$ が成り立つ．定義により，$A_\tau < \infty$, a.s. であるから，

$$\frac{1}{n+1}A_\tau^{n+1} = \int_0^\tau [A_\tau - A_t]^n dA_t$$

となる．$\tau$ の満たす仮定と，$A_t$ の $t$ に対する単調性から，

$$\begin{aligned} A_\tau - A_t &\leq A_{t+\tau\circ\theta_t} - A_t = \int_t^{t+\tau\circ\theta_t} f(\omega_s)ds \\ &= \left[\int_0^\tau f(\omega_s)ds\right]\circ\theta_t = A_\tau\circ\theta_t \end{aligned}$$

である．ここで，フビニの定理を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}P^x[A_\tau^{n+1}] &\leq P^x\left[\int_0^\tau [A_\tau\circ\theta_t]^n dA_t\right] \\ &= \int_0^\infty P^x\left[[A_\tau\circ\theta_t]^n f(\omega_t); t<\tau\right]dt \end{aligned}$$

対称安定過程のマルコフ性を用いることにより，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P^x\left[[A_\tau\circ\theta_t]^n f(\omega_t); t<\tau\right]dt &= \int_0^\infty P^x\left[P^{\omega_t}[A_\tau^n]\cdot f(\omega_t); t<\tau\right]dt \\ &\leq \int_0^\infty P^x\left[f(\omega_t); t<\tau\right]dt \cdot \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^n] \\ &= P^x[A_\tau]\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^n] \end{aligned}$$

が従う．以上の不等式から，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^{n+1}] \leq (n+1)\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau]\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^n]$$

であり，$n$ に関する帰納法により，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^n] \le n! \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau]^n$$

が成り立つ．べき乗に展開することにより，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[\exp(A_\tau)] \ \le\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau^n] \le \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} P^x[A_\tau]^n$$

となる．上記の不等式により，主張が従う． ∎

# 第2章　分配関数の正規化と主定理

まず前章で定義した分配関数の正規化を考える．

$$W_t = e^{-\lambda t} Z_t = P[\exp(\beta\eta(V_t) - \lambda t)],\ t \geq 0$$

とおく．そこで，$\{\exp(\beta\eta(V_t) - \lambda t)\}_{t\geq 0}$ について考える．任意の $\omega \in \Omega$ に対し，

$$\begin{aligned} Q[\exp(\beta\eta(V_t))] &= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}e^{\beta k} = e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{\beta}t\right)^k}{k!} \\ &= e^{-t}\exp(e^{\beta}t) = \exp\left((e^{\beta}-1)t\right) = e^{\lambda t} \end{aligned}$$

となるから，

$$Q[\exp(\beta\eta(V_t) - \lambda t)] = 1$$

となる．さらに，$s, t > 0$ に対して，

$$V_{s,t} = \{(u, x); u \in (s, t], x \in U(\omega_u)\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(t+s)}Q\left[\exp(\beta\eta(V_{t+s}))|\mathcal{G}_t\right] &= e^{-\lambda(t+s)}Q\left[\exp(\beta\eta(V_t) + \beta\eta(V_{t,t+s}))|\mathcal{G}_t\right] \\ &= e^{-\lambda t}\exp(\beta\eta(V_t))Q[e^{-\lambda s}\exp(\beta\eta(V_{t,t+s})|\mathcal{G}_t] \\ &= e^{-\lambda t}\exp(\beta\eta(V_t))Q[e^{-\lambda s}\exp(\beta\eta(V_s)] \\ &= \exp(\beta\eta(V_t) - \lambda t) \end{aligned}$$

である．$\{\exp(\beta\eta(V_t))\}_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{M}, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_t\}, Q)$ 上のマルチンゲール（martingale）である．これにより，フビニの定理を用いれば，

$$Q[W_t] = e^{-\lambda t}Q[P[\exp(\beta\eta(V_t))]] = e^{-\lambda t}P[Q[\exp(\beta\eta(V_t))]] = 1$$

となる．この $W_t$ を**正規化された分配関数**と呼び，以後この $W_t$ に関して調べていくことにする．$W_t$ は $(\mathcal{M}, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_t\}, Q)$ 上の正のマルチンゲールであることにより，マルチンゲールの収束定理によって，次の極限が存在する．

$$W_\infty := \lim_{t \nearrow \infty} W_t \qquad Q\text{ - a.s.} \tag{2.1}$$

さらに，収束定理により，事象 $\{W_\infty = 0\}$ は末尾 $\sigma$-加法族 $\bigcap_{t\geq 1}\mathcal{G}_t$ に関して可測であり, コルモゴロフの 0-1 法則によって次の二つの場合しか起こりえない.

$$Q\{W_\infty = 0\} = 1 \tag{2.2}$$

$$Q\{W_\infty > 0\} = 1 \tag{2.3}$$

**定義 2.1.** (2.2) の場合を**媒質による摂動が強い相 (strong disorder phase)**, (2.3) の場合を**媒質による摂動が弱い相 (weak disorder phase)** と呼ぶ.

$\beta = 0$ のとき，$\mu_t(d\omega) = P(d\omega)$ となっていることにより，媒質が無い場合であることがわかる (よって，粒子は反発もひきつける作用も無い). 安定過程の場合に近い場合, すなわちランダム環境の影響が少ない場合が (2.3) の場合になり, 影響が強くなると (2.2) の場合になるということが強い相，弱い相の意味である.

次の主定理は対称安定過程の指数 $\alpha$ とランダム環境の指数 $\beta$ の値によって上記の 2 つのどちらの場合にあてはまるかということを示す定理である.

**定理 2.2.** **(主定理)** $\alpha \in (0, 2)$ とする.

(i) $d = 1,\ \alpha > 1$ のとき, 任意の $\beta \neq 0$ に対して,

$$Q\{W_\infty = 0\} = 1$$

が成り立つ.

(ii) $d > \alpha$ のとき, $\beta_2(d,\alpha), \beta_3(d,\alpha) > 0$ が存在して, 任意の $\beta \in (-\beta_2(d,\alpha), \beta_3(d,\alpha))$ に対して,

$$Q\{W_\infty > 0\} = 1$$

が成り立つ.

この主定理は対称安定過程が再帰的であるときにはランダム測度の指数にかかわらず媒質の摂動が強くなり，測度の絶対連続性が失われているということがわかる. 逆に，非再帰的なときにはある程度ランダム測度の指数が小さいときには媒質の摂動が弱くなり，測度の絶対連続性が保たれていることがわかる. 注意として，この主定理では，$\alpha = 2$ の場合 (ブラウン運動の場合) が抜け落ちている. これはブラウン運動に関してはより詳しい次の定理が得られているためである.

**定理 2.3.** (F. Comets , N. Yoshida [1])

(i) 全ての次元 $d \geq 1$ に対して, $\beta_1(d) > 0$ が存在して, 任意の $\beta \in (\beta_1(d), \infty)$ に対して

$$Q\{W_\infty = 0\} = 1$$

が成り立つ.

(ii) $d = 1, 2$ のとき, $\beta \neq 0$ ならば,

$$Q\{W_\infty = 0\} = 1$$

が成り立つ.

(iii) $d \geq 3$ のとき, $\beta_0 > 0$ が存在して, 任意の $\beta \in (-\infty, \beta_0(d))$ に対して

$$Q\{W_\infty > 0\} = 1$$

が成り立ち，更に次元と指数 $\beta$ の間に次のような関係が成り立つ.

$$\lim_{d \to \infty} \beta_0(d) = \infty$$

主定理において，(i) の場合は対称安定過程が再帰的であり，(ii) の場合は対称安定過程が非再帰的であることがわかっている．これはそれぞれブラウン運動における結果 (ii) の場合のときが再帰的であり，(iii) の場合のときが非再帰的であることに対応している．

# 第3章　主定理の証明

## 3.1　主定理 (a) の証明

まず，主定理 (a) の十分条件を与える．

**補題 3.1.** ある $\theta \in (0,1)$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} Q[W_t^\theta] = 0$ であるならば, $Q\{W_\infty = 0\} = 1$ が成り立つ.

**証明.** $\frac{1}{\theta} > 1$ であり,

$$\sup_{t\geq 0} Q[(W_t^\theta)^{\frac{1}{\theta}}] = \sup_{t\geq 0} Q[W_t] = 1$$

である．したがって，$\{W_t^\theta\}_{t\geq 0}$ は一様可積分となる．一様可積分性により，$W_t^\theta \longrightarrow 0$ as $t \to \infty$ in $L^1(Q)$ が成り立つ．以上のことにより $\lim_{t\to\infty} Q[W_t^\theta] = Q[W_\infty^\theta] = 0$ であり，$W_\infty^\theta = 0$, $Q$-a.s. となる．∎

**補題 3.2.** (グロンウォールの不等式) $u \in C^1(\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+)$ と $v, w \in C(\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+)$ に対して,

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq -v(t)u(t) + w(t) \tag{3.1}$$

が成り立つと仮定する. このとき, 次の等式が $t > a > 0$ を満たす全ての実数で成り立つ.

$$u(t) \leq u(a)\exp(-\int_a^t v(s)ds) + \int_a^t w(s)ds \tag{3.2}$$

**証明.**

$$\bar{u}(t) = \left(u(a) + \int_a^t w(s)\exp(\int_a^s v(r)dr)ds\right)\exp(-\int_a^t v(s)ds)$$

とすると, $\bar{u}(a)=u(a), \dfrac{d}{dt}\bar{u}(t)=w(t)-v(t)\bar{u}(t)$ がすべての $t>a>0$ に対して成り立つ. したがって，$V(t)=\int_a^t v(s)ds$ とおくと，合成関数の微分により,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left((u(t)-\bar{u}(t))e^{V(t)}\right) &= \left[\frac{d}{dt}(u(t)-\bar{u}(t))+v(t)(u(t)-\bar{u}(t))\right]e^{V(t)} \\
&= \left[\frac{d}{dt}u(t)-w(t)+v(t)\bar{u}(t)+v(t)(u(t)-\bar{u}(t))\right]e^{V(t)} \\
&= \left[\frac{d}{dt}u(t)-w(t)+v(t)u(t)\right]e^{V(t)} \leq 0.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
u(t) \leq \left(u(a)+\int_a^t w(s)\exp(\int_a^s v(r)dr)ds\right)\exp(-\int_a^t v(s)ds)
$$

が従う．$u,v,w \geq 0$ に注意すると，$s \leq t$ のとき $\exp(\int_a^s v(r)dr) \leq \exp(\int_a^t v(r)dr)$ であることにより，(3.2) が成り立つ. ∎

**補題 3.3.** $\theta \in [0,1]$ と任意の集合 $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$ に対して，次の不等式が成り立つ.

$$
|\Lambda| Q[W_t^\theta I_t] \geq Q[W_t^\theta] - 2P\left(U(\omega_t) \not\subset \Lambda\right)^\theta. \tag{3.3}
$$

ここで, $I_t=\mu_t^{0,0}\left[|U(\omega_t)\cap U(\tilde{\omega}_t)|\right]$ である.

**証明.** まず最初に $|\Lambda \cap U(\omega_t)|=|U(\omega_t)|-|U(\omega_t)\backslash\Lambda|=1-|U(\omega_t)\backslash\Lambda| \geq 1-1\{U(\omega_t)\not\subset \Lambda\}$ に注意する. さらに，直積測度についての式

$$
\begin{aligned}
I_t &= \mu_t^{0,0}\left[|U(\omega_t)\cap U(\tilde{\omega}_t)|\right] = \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} 1\{x\in U(\omega_t)\}\cdot 1\{y \in U(\tilde{\omega}_t)\}\mu_t^{0,0}(dxdy) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \mu_t[1\{x \in U(\omega_t)\}]^2 dx
\end{aligned}
$$

であることに注意すれば，シュワルツの不等式を用いることによって次の関係式が得られる.

$$
\begin{aligned}
|\Lambda| I_t &\geq |\Lambda| \int_\Lambda \mu_t[1\{x\in U(\omega_t)\}]^2 dx \geq \left(\int_\Lambda \mu_t[1\{x \in U(\omega_t)\}]dx\right)^2 \\
&= \mu_t[|\Lambda \cap U(\omega_t)|]^2 \geq (1-\mu_t\{U(\omega_t)\not\subset\Lambda\})^2 \\
&\geq 1-2\mu_t\{U(\omega_t)\not\subset\Lambda\} \geq 1-2\mu_t\{U(\omega_t)\not\subset\Lambda\}^\theta.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

また, $\mu_t(d\omega) = \dfrac{\exp(\beta\eta(V_t))}{Z_t}P(d\omega)$ であることに注意し, ヘルダーの不等式を用いれば,

$$\begin{aligned} Q[W_t^\theta \mu_t\{U(\omega_t) \not\subset \Lambda\}^\theta] &\le Q[W_t \mu_t\{U(\omega_t) \not\subset \Lambda\}]^\theta \\ &= Q\left[\frac{\exp(\beta\eta(V_t))}{Z_t} P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda) Z_t e^{-\lambda t}\right]^\theta \\ &= Q\left[\exp(\beta\eta(V_t)) e^{-\lambda t} P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda)\right]^\theta \\ &= P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda)^\theta. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.4) の両辺に $W_t^\theta$ をかけて, $Q$ で期待値をとり (3.5) を用いることにより,

$$\begin{aligned} |\Lambda| Q[W_t^\theta I_t] &\ge Q[W_t^\theta] - 2Q[W_t^\theta \mu_t\{U(\omega_t) \not\subset \Lambda\}^\theta] \\ &\ge Q[W_t^\theta] - 2P\left(U(\omega_t) \not\subset \Lambda\right)^\theta. \end{aligned}$$

が得られる. ▮

**補題 3.4.** $\theta \in (0,1)$ に対して, 次の性質を満たす定数 $c_0 = c_0(\theta, \beta) > 0$ が存在する. すべての集合 $\Lambda \subset \mathbf{R}$ に対して,

$$\frac{d}{dt} Q[W_t^\theta] \le -\frac{c_0}{|\Lambda|} Q[W_t^\theta] + \frac{2c_0}{|\Lambda|} P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda)^\theta. \tag{3.6}$$

**証明.** 伊藤の公式において，$X(t) = (X_1(t), X_2(t)) = (e^{-\lambda t}, Z_t), F(X) = F(x,y) = (xy)^\theta$ とおくと，$X_1(0) = 1, X_2(0) = 1$ であり，1 章の命題 1.17 により，

$$X_2(t) = 1 + \lambda \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \eta_t(dsdx) P[\exp(\beta\eta(V_{s-}) 1\{x \in U(\omega_s)\}]$$

となる．今，

$$f_2(t,x,\eta) := \lambda P[\exp(\beta\eta(V_{t-}) 1\{x \in U(\omega_t)\}]$$

とおき，$f(t,x,\eta) = (0, f_2(t,x,\eta))$ とする．

$$F'_x(x,y) = \theta x^{\theta-1} y^\theta, \quad dA^1(s) = -\lambda e^{-\lambda s} ds$$

であるから，伊藤の公式により，

$$\begin{aligned} F(X(t)) - F(X(0)) &= e^{-\lambda\theta t} Z_t^\theta - 1 \\ &= -\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \cdot \theta e^{-(\theta-1)\lambda s} Z_s^\theta ds \\ &+ \int_0^{t+} \int_{\mathbf{R}^d} \{F(X(s-) + f(s,x,\eta)) - F(X(s-))\} \eta_t(dsdx) \end{aligned}$$

が成り立ち, $F(X(s-)) = W_{s-}^{\theta}$ となる．また,

$$\begin{aligned} X_2(s-) + f_2(s,x,\eta) &= Z_{s-} + \lambda P[\exp(\beta\eta(V_{s-}))1\{x \in U(\omega_s)\}] \\ &= Z_{s-}\left(1 + \frac{1}{Z_{s-}}P[\exp(\beta\eta(V_{s-}))\lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}]\right) \\ &= Z_{s-}\left(\mu_{s-}[1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}]\right) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} F(X(s-) + f(s,x,\eta)) &= F\left(e^{-\lambda s-}, Z_{s-}(\mu_{s-}[1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}])\right) \\ &= e^{-\lambda\theta s-} \cdot Z_{s-}^{\theta}(\mu_{s-}[1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}])^{\theta} \\ &= W_{s-}^{\theta}(\mu_{s-}[1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\}])^{\theta} \end{aligned}$$

が成り立つ. $\displaystyle\int \mu_s(1\{x \in U(\omega_s)\})dx = 1$ に注意すると, $W_t^{\theta}$ は次のように分解される.

$$\begin{aligned} W_t^{\theta} &= 1 + \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} W_{s-}^{\theta}\left([\mu_{s-}(1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\})]^{\theta} - 1\right)\eta_t(dsdx) - \theta\lambda\int_{(0,t]} W_s^{\theta} ds \\ &= 1 + \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} W_{s-}^{\theta}\left([\mu_{s-}(1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\})]^{\theta} - 1\right)\bar{\eta}_t(dsdx) \\ &\quad - \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} W_s^{\theta} f(\lambda\mu_s[1\{x \in U(\omega_s)\}])dsdx \end{aligned}$$

ここで, $\bar{\eta}_t(dsdx) = \eta_t(dsdx) - dsdx$ であり，また，$f(u) = (1+\theta u) - (1+u)^{\theta},\ u > -1$ である. そこで,

$$\int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} W_{s-}^{\theta}\left([\mu_{s-}(1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\})]^{\theta} - 1\right)\bar{\eta}_t(dsdx)$$

がマルチンゲールであることに注意すると,

$$\int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} W_{s-}^{\theta}\left([\mu_{s-}(1 + \lambda \cdot 1\{x \in U(\omega_s)\})]^{\theta} - 1\right)\bar{\eta}_t(dsdx) = 0$$

が成り立つ．ゆえに,

$$Q[W_t^{\theta}] = 1 - \int_{(0,t]\times\mathbf{R}^d} dsdxQ\left[W_s^{\theta} f(\lambda\mu_s[1\{x \in U(\omega_t)\}])\right]. \tag{3.7}$$

今，$I_t$ の定義より，2 つの独立なパスを 1 つのパスと考えることにより,

$$\begin{aligned} I_t &= \mu_t^{0,0}[|U(\omega_t) \cap U(\tilde{\omega}_t)|] \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} 1\{x \in U(\omega_t)\} \cdot 1\{y \in U(\tilde{\omega}_t)\}\mu_t^{0,0}(dxdy) \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} 1\{x \in U(\omega_t)\}\mu_t(dx)\right)^2 \end{aligned}$$

である．ある定数 $c_1 = c_1(\theta, \beta) > 0$ が存在して，$c_1 u^2 \le f(u)$ が $u \in (-1, |\lambda|]$ で成り立つことに注意し，(3.7) の両辺を $t$ で微分することにより，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q[W_t^\theta] &= -\int_{\mathbf{R}^d} dxQ\left[W_t^\theta f(\lambda\mu_t[1\{x \in U(\omega_t)\}])\right] \\ &\le -c_1\lambda^2 \int_{\mathbf{R}^d} dxQ\left[W_t^\theta \mu_t[1\{x \in U(\omega_t)\}]^2\right] \\ &= -c_1\lambda^2 Q[W_t^\theta I_t]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

が得られる．この不等式と補題 3.3 により，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q[W_t^\theta] &\le -c_1\lambda^2 Q[W_t^\theta I_t] \\ &\le -\frac{c_1\lambda^2}{|\Lambda|}Q[W_t^\theta] + \frac{2c_1\lambda^2}{|\Lambda|}P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda)^\theta \end{aligned}$$

これにより，主張が従う． ▮

**証明.** (主定理 (a) の証明) 式 (3.6) において, $\Lambda = (-t^\epsilon, t^\epsilon]$ とすると, 次の不等式が得られる.

$$\frac{d}{dt}Q[W_t^\theta] \le \frac{-c_0}{2t^\epsilon}Q[W_t^\theta] + \frac{c_0}{t^\epsilon}P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda)^\theta \tag{3.9}$$

ここで, $U(x)$ が $x$ を中心とする体積 1 の閉球であることを思い出すと，$P(U(\omega_t) \not\subset \Lambda) = P(|\omega_t| \ge t^\epsilon - 1/2)$ である．そこで,

$$a := t^\epsilon - 1/2$$

とおくと, 式 (1.1) により次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(|\omega_t| \ge a) &= 2\int_a^\infty p(t,0,x)dx \le 2c_1\int_a^\infty (t^{-\frac{1}{\alpha}} \wedge \frac{t}{|x|^{1+\alpha}})dx \le 2c_1\int_a^\infty \frac{t}{x^{1+\alpha}}dx \\ &= 2c_1 t\int_a^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha}}dx = \frac{2c_1 t}{\alpha}(t^\epsilon - \frac{1}{2})^{-\alpha} \end{aligned} \tag{3.10}$$

今 $t$ は十分大きいとすると, 次の不等式を得る.

$$P(|\omega_t| \ge a) \le \frac{2c_1 t}{\alpha}(t^\epsilon)^{-\alpha} = \frac{2c_1}{\alpha}t^{1-\epsilon\alpha}$$

これにより，次の不等式がなりたつ.

$$P\left(U(\omega_t) \not\subset \Lambda\right)^\theta \le \left(\frac{2c_1}{\alpha}\right)^\theta t^{\theta-\epsilon\alpha\theta}.$$

この不等式と補題 3.4 により，次の不等式が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}Q[W_t^\theta] \le -\frac{c_0}{2t^\epsilon}Q[W_t^\theta] + c_0 t^{-\epsilon}(\frac{2c_1}{\alpha})^\theta t^{\theta-\epsilon\alpha\theta-\epsilon}.$$

今，式 (3.8) により，$Q[W_t^\theta] \in C^1(\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+)$ であることがわかる．そこで，

$$u(t) = Q[W_t^\theta],\ v(t) = \frac{c_0}{2t^\epsilon},\ w(t) = t^{\theta-\epsilon\alpha\theta-\epsilon},\ a = bt\ (b < 1)$$

ととり, グロンウォールの不等式を用いれば，次の不等式を得る．

$$u(t) \le u(bt)\exp(-\int_{bt}^t v(s)ds) + \int_{bt}^t w(s)ds$$

ここで，ヘルダーの不等式によって，

$$u(bt) = Q[W_{bt}^\theta] \le Q[W_{bt}]^\theta = 1$$

であることに注意すると (2.2)(strong disorder) の十分条件は $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ であるから, (2.2) を証明するには次の 2 つの式を証明すれば十分である．

$$\int_{bt}^t v(s)ds \longrightarrow \infty, t \to \infty \tag{3.11}$$

$$\int_{bt}^t w(s)ds \longrightarrow 0, t \to \infty \tag{3.12}$$

まず (3.11) の条件は次のようになる．

$$\int_{bt}^t s^{-\epsilon}ds = [\frac{1}{1-\epsilon}s^{-\epsilon}]_{s=bt}^t = \frac{1}{1-\epsilon}(1-b^{1-\epsilon})t^{1-\epsilon} \longrightarrow \infty$$

よって (3.11) は $0 < \epsilon < 1$ にとればよい. 次に (3.12) の条件は次のようになる．

$$\int_{bt}^t s^{\theta-\epsilon\alpha\theta-\epsilon}ds \longrightarrow 0$$

よって (3.12) は

$$\theta - \epsilon\alpha\theta - \epsilon < -1$$

という条件になる．これら二つの条件を合わせ, $\alpha > 1$ に注意すると

$$\frac{1+\theta}{1+\alpha\theta} < \epsilon < 1 \tag{3.13}$$

を満たす $\theta$ と $\epsilon(0 < \epsilon < 1)$ を取ることができて, 十分条件を証明することができ, 主定理の (a) が成り立つ． ∎

## 3.2 主定理 (b) の証明

次に (b) の証明をする. そのためにまず十分条件を与える。

**命題 3.5.** $Q\{W_\infty > 0\} = 1$ となることの十分条件は

$$\sup_{t>0} Q[W_t^2] < \infty \tag{3.14}$$

である.

**証明.** $\sup_{t>0} Q[W_t^2] < \infty$ となっていることにより, これは $W_t$ の一様可積分性の十分条件であるから, 一様可積分性により $Q[W_\infty] = \lim_{t\to\infty} Q[W_t] = 1$ となり,$Q[W_\infty > 0] > 0$ が成り立つ. コルモゴロフの 0-1 法則により, $Q\{W_\infty > 0\} = 1$ が成り立つ. ∎

次に $\sup_{t>0} Q[W_t^2]$ の評価をする補題を示す.

**補題 3.6.**

$$\sup_{t>0} Q[W_t^2] \le P\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_t \in 2U(0)\}dt)\right] \tag{3.15}$$

**証明.**

$$P\left[\exp\left(\beta\eta(V_t(\omega))\right)^2\right] = P^{0,0}\left[\exp\left(\beta\eta(V_t(\omega))\right)\cdot\exp(\beta(\eta(V_t(\tilde{\omega}))))\right]$$

のように, 二つの独立なパスにわけて直積測度で測ることを考える. そこで,

$$\zeta_t(\omega,\eta) := \exp(\beta\eta(V_t(\omega)))$$

とすると,

$$W_t(\eta)^2 = e^{-2\lambda t}P^{0,0}[\zeta_t(\omega,\eta)\zeta_t(\tilde{\omega},\eta)]$$

となるから, フビニの定理を用いることにより,

$$Q[W_t^2(\eta)] = e^{-2\lambda t}P^{0,0}\left[Q[\zeta_t(\omega,\eta)\zeta_t(\tilde{\omega},\eta)]\right]$$

を得る.

そこで $\tilde{V}_t = V_t(\tilde{\omega})$ として,

$$\begin{aligned}
\zeta_t(\omega,\eta)\cdot\zeta_t(\tilde{\omega},\eta) &= \exp\left(\beta\eta(V_t) + \beta\eta(\tilde{V}_t)\right)\\
&= \exp\left(\beta\eta(V_t\cap\tilde{V}_t) + \beta\eta(V_t\cup\tilde{V}_t)\right)\\
&= \exp\left(2\beta\eta(V_t\cap\tilde{V}_t) + \beta\eta(V_t\triangle\tilde{V}_t)\right)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} Q[\exp(\beta\eta(V_t)+\beta\eta(\tilde{V}_t))] &= Q[\exp(2\beta\eta(V_t\cap\tilde{V}_t)+\beta\eta(V_t\triangle\tilde{V}_t))] \\ &= \exp(\lambda(2\beta)|V_t\cap\tilde{V}_t|+\lambda(\beta)|V_t\triangle\tilde{V}_t|) \end{aligned}$$

が成り立つ. 今 $\lambda(\beta)=e^\beta-1$ であるから,

$$\lambda^2(\beta)=e^{2\beta}-2e^\beta+1=\lambda(2\beta)-2\lambda(\beta)$$

に注意すると，集合の演算により,

$$\begin{aligned} Q[\exp(\beta\eta(V_t)+\beta\eta(\tilde{V}_t))] &= \exp\Big((\lambda^2(\beta)+2\lambda(\beta))|V_t\cap\tilde{V}_t|+\lambda(\beta)|V_t\triangle\tilde{V}_t|\Big) \\ &= \exp\Big(\lambda^2(\beta)|V_t\cap\tilde{V}_t|+\lambda(\beta)(|V_t|+|\tilde{V}_t|)\Big). \end{aligned}$$

以上のことから $|V_t|=t$ に注意すれば, 単調収束定理により次の関係式が成り立つ.

$$e^{-2\lambda t}Q[\exp(\beta\eta(V_t)+\beta\eta(\tilde{V}_t))]=\exp(\lambda^2(\beta)|V_t\cap\tilde{V}_t|)\underset{t\to\infty}{\nearrow}\exp(\lambda^2(\beta)|V_\infty\cap\tilde{V}_\infty|).$$

さらに $|V_\infty\cap\tilde{V}_\infty|$ を計算すると,

$$|V_\infty\cap\tilde{V}_\infty| = \int_0^\infty|U(\omega_t)\cap U(\tilde{\omega}_t)|dt=\int_0^\infty|U(0)\cap U(\omega_t-\tilde{\omega}_t)|dt$$

対称安定過程の性質から，$P^{0,0}$ における $\omega_t-\tilde{\omega}_t$ の分布と $P^0$ における $\omega_{2t}$ の分布は等しいので,

$$|V_\infty\cap\tilde{V}_\infty|=\int_0^\infty|U(0)\cap U(\omega_{2t})|dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty|U(0)\cap U(\omega_t)|dt. \tag{3.16}$$

の等式が分布で成り立つ．今，$U(0)\cap U(\omega_t)=\phi$ ならば，半径と球の中心との関係により $\omega_t\in 2U(0)$ となること，さらに，$|U(0)|=|U(\omega_t)|=1$ より,

$$|U(0)\cap U(\omega_t)|\le 1$$

であることに注意すると (3.16) の右辺は次のように評価される.

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty|U(0)\cap U(\omega_t)|dt\le\frac{1}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_t\in 2U(0)\}dt.$$

以上のことから，$\sup_{t>0}Q[W_t^2]\le P\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_t\in 2U(0)\}dt)\right]$ が従う． ∎

次に,

$$P\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_t \in 2U(0)\}dt)\right]$$

が有限になる条件について述べる．そこで，この評価をするために次の語句を定義する．

$B(x,R)$ を中心 $x$, 半径 $R$ の閉球とする．さらに $B(R) := B(0,R)$ とする．$d > \alpha$ のとき,

$$A_t = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t 1_{B(x,R)}(\omega_s)ds$$

とおく．更に，対称 $\alpha$-安定過程のグリーン関数を $\bar{G}(x,y) := \int_0^\infty p^\alpha(t,x,y)dt$ と書くと,

$$G(x,y) := \frac{\lambda^2}{2}\bar{G}(x,y) = \frac{\lambda^2}{2}\frac{2^{1-\alpha}\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\cdot|x-y|^{\alpha-d}$$

となる．また，単位球の表面積 $k_d = 2\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(\dfrac{d}{2})$ とする．このとき次の定理が成り立つ.

**定理 3.7.** $\sup_{x\in B(R)} P^x\left[A_\infty\right] < 1$ ならば，$\sup_{x\in B(R)} P^x\left[\exp(A_\infty)\right] < \infty$ が成り立つ.

**証明.** この定理は，ハスミンスキーの補題において，$f(y) = 1_{B(x,R)}(y)$, $\tau = \infty$ とおくことによりただちに得られる． ∎

関数

$$f(d,\alpha) = \sqrt{\frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}\alpha\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{d}{2})^{1-\frac{\alpha}{d}}}{2^{1-\frac{\alpha}{d}}\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})d^{\frac{\alpha}{d}}}}$$

とすると，次の補題が従う.

**補題 3.8.** $\lambda$ が $-(f(d,\alpha)\wedge 1) < \lambda < f(d,\alpha)$ を満たすとき,

$$P\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_t \in 2U(0)\}dt)\right] < \infty$$

が成り立つ.

**証明.** 定理 3.7 を適用するために計算すると,

$$A_\infty = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1_{B(R)}(\omega_s)ds$$

であり,

$$C := C(\alpha,d) = \frac{\lambda^2}{2}\frac{2^{1-\alpha}\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$$

とおくと，次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B(R)} P^x[A_\infty] &= \sup_{x\in B(R)} \int_{B(R)} G(x,y)dy = \int_{B(R)} G(0,y)dy \\
&= C\int_{B(R)} |y|^{\alpha-d}dy = Ck_d\int_0^R r^{\alpha-d}\cdot r^{d-1}dr \\
&= Ck_d\frac{R^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

となる．よって，定理 3.7 により，

$$Ck_d\frac{R^\alpha}{\alpha} < 1 \tag{3.17}$$

ならば，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B(R)} P^x\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1_{B(R)}(\omega_s)ds)\right] &= \sup_{x\in B(R)} P^x\left[\exp(\frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty 1\{\omega_s\in B(R)\}ds)\right] \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{3.18}$$

である．(3.17) の条件を計算すると，

$$\lambda^2 < \frac{\alpha\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{2^{1-\alpha}R^\alpha\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})} \tag{3.19}$$

となる．一方，$\mathbf{R}^d$ 上の半径 $R$ の球の体積が $2(R^2\pi)^{\frac{d}{2}}/d\Gamma(\dfrac{d}{2})$ であることに注意すれば，$2U(0)$ の半径 $R'$ は

$$\frac{2\left((R'/2)^2\pi\right)^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} = |U(0)| = 1$$

より

$$R' = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\Gamma(\frac{d}{2}+1)\right)^{\frac{1}{d}}$$

となる．上記の不等式 (3.19) において，$R=R'$ とすれば，$\lambda\in(-1,\infty)$ であることから $\lambda$ の条件を得る． ∎

最後に主定理の (b) について証明する.

**証明.** (主定理 (b) の証明) これまでの補題により

$$-\left(f(d,\alpha)\wedge 1\right) < \lambda < f(d,\alpha)$$

であるときに，

$$\sup_{t>0} Q[W_t^2] < \infty$$

となる．上記の $\lambda(\beta)$ の条件は $\lambda(\beta) = e^{\beta} - 1$ より次のような $\beta$ の条件に書き換えることができる．

$$\log\left(1 - (f(d,\alpha) \wedge 1)\right) < \beta < \log\left(f(d,\alpha) + 1\right)$$

ただし $\log 0 := -\infty$ と定義する．この不等式の左辺，右辺が主定理における $-\beta_2, \beta_3$ ということになる． ∎

**注意 3.9.** $f(d,\alpha)$ は $\alpha$ について連続で，

$$\beta_3(d,\alpha) := \log\left(f(d,\alpha) + 1\right)$$

となるから，$\beta_3(d,\alpha)$ は連続であることがわかる．また，$f(1,\alpha) < 1$ で $\alpha$ について単調減少である．これにより，$\alpha$ により，連続的に媒質の強弱が変化していることが読み取ることができる．

本論文では，ブラウン運動を対称安定過程にまで拡張するのが目標であった．しかし，この論文においては，$d = 1$，$\alpha = 1$ の場合が抜け落ちている．これは，式 (3.13) において $\alpha = 1$ としてしまうと，それを満たすような $\epsilon$ がとれないためである．その原因として，一様可積分の条件を十分条件にして，条件を弱めていることが原因のように思われる．この部分を一様可積分の条件をそのまま用いることができて，$\alpha = 1$ にまで拡張できれば，この定理は対称安定過程の指数全てに拡張できることになる．

# 参考文献


[1] F. Comets, N. Yosida: Brownian directed polymers in random environment, *Commn. Math. Phys.*, **24**, 257-287, 2005.

[2] F. Comets, T. Shiga, N. Yoshida: Directed polymers in random environment: Path localization and strong disorder, *Bernoulli,* **9**, 705-723, 2003.

[3] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes*(2nd ed.), North-Holland, Amsterdam / Kodansha, Tokyo, 1981.

[4] R.F. Bass, Z.-Q. Chen: Systems of equations driven by stable processes, *Probab. Theory Relat. Fields*, **134**, 175-214, 2006.

[5] K.L. Chung, Z. Zhao: *From Brownian motion to Schrödinger's equation*, Springer-Verlarg Berlin Heidelberg New York, 1995.

[6] Y. Shiozawa, M. Takeda: Variational formula for Dirichlet forms and estimates of principal eigenvalues for symmetric $\alpha$-stable processes, *Potential Analysis*, **23**, 135-151, 2005.

[7] K. Sato: *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999.