分枝ランダムウォークの性質：
ある集合に到達する分枝数の期待値の有限性

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
渡部　金一郎

第1章　はじめに

本論文では $\mathbf{Z}^d$ 上の分枝ランダムウォークにおいて，与えられたある集合に到達する分枝数の期待値の有限性について考察する．

Albeverio と Bogachev[1] は，有限個の点でのみ分裂しうるような分枝ランダムウォークを考え，その過程における粒子数のモーメントが満たすべき方程式を，積分方程式，微分方程式の形で書き表している．一方，Grigor'yan と Kelbert[8] は，多様体上の分枝ブラウン運動について，ある集合に到達する分枝数の期待値を用いて分枝ブラウン運動の再帰性，非再帰性について考察している．本論文では，[1] のように有限個の点でのみ分裂が起こるという設定の下で，[8] で述べられている事柄を分枝ランダムウォークの場合に書き換え，更には 1 点のみで分裂する場合に，任意の集合に到達する分枝数の期待値が有限となるための十分条件を与える事を目標とする．

本論文で考える分枝ランダムウォークについて説明する．まず $\mathbf{Z}^d$ 上の 1 粒子は，パラメータ a を持つ指数時間だけそこに留まり，そのあと隣接点にそれぞれ確率 $1/2d$ で移動するような，$\mathbf{Z}^d$ 上の連続時間単純ランダムウォークの法則に従うとする．分枝法則 $\{p_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ は，点 x において分裂が起こった場合，確率 $p_k(x)$ で k 個の粒子に分裂することを表す．**分枝率** $Q(x)$ は非負の函数で，点 x における分裂の起こりやすさを表す．すなわち，この Q の値が大きいほど分裂しやすく，$Q(x_0) = 0$ であれば点 x_0 では分裂しないことを意味する．これらを基にして，**分枝ランダムウォーク**$(\overline{X}_t, \mathbf{P}_x)$ を構成する．点 x_0 から 1 つの粒子で始まる分枝ランダムウォークは，$Q(x)$ から定まるランダムな分裂時刻 T まで，元の単純ランダムウォーク X_t の法則に従って運動する．もし分裂時刻 T において点 x_1 にいるならば，点 x_1 における分枝法則 $\{p_k(x_1)\}$ に従って，確率 $p_k(x_1)$ で k 個の粒子に分裂する．そしてその k 個の粒子それぞれが，点 x_1 を出発するランダムウォークの法則に従って独立に運動し，以降これを繰り返すものとする．さて，分裂時刻 T はパラメータ Q の指数分布を持つものとして定める．すなわち，

$$\mathbf{P}_{x_0}(T < t|\sigma(X_t)) = 1 - \exp\left(-\int_0^t Q(X_s)ds\right).$$

ここで，$\sigma(X_t)$ は X_t の生成する σ-加法族である．以上が分枝ランダムウォークの定

義である．**分枝頻度**を

$$q(x) := Q(x)\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_k(x)$$

で定義する．これは点 x での分裂の起こりやすさをあらわす分枝率 $Q(x)$ と，分裂したときの粒子の純増加数の期待値を用いた,“ 分裂の大きさ ”を表すものである．

$d \geq 3$ のときには，ランダムウォーク X_t が非再帰的となることはよく知られた事実である．ところが分枝ランダムウォークの場合，分枝頻度 $q(x)$ で粒子を分裂させ粒子数を増やしていくと，1 粒子の運動としては非再帰的だったものが，分枝ランダムウォークとして再帰的になることもありうる．粒子が無限遠にいく速さと粒子が増大する早さの兼ね合いで，分枝ランダムウォークの再帰性，非再帰性が決まる．ここで，分枝ランダムウォークが再帰的とは，任意の空でない集合に対して確率 1 で少なくとも 1 つの粒子がその集合に到達することをいい，非再帰的とは再帰的でないことをいう．K を $\mathbf{Z}^d$ の部分集合とする．x から出発する分枝ランダムウォークにおいて，集合 K に到達する分枝数の期待値を $m_K(x)$ で表し，K-**ゲージ**と呼ぶ．$m_K(x)$ は，分枝ランダムウォークの強マルコフ性より，

$$m_K(x) = \mathrm{E}_x\Big[1_{\{\tau_K<\infty\}}\exp\Big(\int_0^{\tau_K} q(X_t)dt\Big)\Big] \tag{1.1}$$

と表されることがわかる (命題 3.3)．Grigor'yan と Kelbert[8] は，m_K を用いて再帰性，非再帰性の十分条件を与えている．当初は [8] の結果を分枝ランダムウォークの場合に検証し，m_K が有限になるための条件を求め，再帰性，非再帰性の判定条件を得ることを目標とした．しかし，分裂しうる点が有限個であれば，常に $\overline{X}_t$ は非再帰的である．何故なら，元のランダムウォークが非再帰的であるので，分裂しうる点と有限集合 K の両方に到達せずに無限遠方に行ってしまう確率が正となるからである．よって本論文では，集合 K に到達する分枝数の期待値 $m_K(x)$ が有限になるか無限になるかを考察する．

任意の有限集合 K に対して，$m_K < \infty$ となるための十分条件を，次で定義する値を用いて与える．$K \subset U$ なる任意の集合 $U \subset \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\nu(K,U) := \inf_{\varphi}\frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z\in\overline{U\setminus K},\ y\sim z}|\varphi(y)-\varphi(z)|^2}{\sum_{y\in U\setminus K} q(y)\varphi(y)^2}$$

とする．ここで下限は，恒等的に 0 ではなく U の中にコンパクトな台を持つ函数全体でとる．また，$y \sim z$ は y と z が隣り合っていること，すなわち $|y-z| = 1$ であることを表す．すると，$\nu(K,\mathbf{Z}^d) \geq 1$ ならば $m_K < \infty$ となることが分かる (定理 4.1)．分枝ランダムウォークは分枝ブラウン運動よりも単純なモデルであるので，[8] よりも多くの状況に対して m_K の有限性を判定できると思われた．しかし，分枝ランダムウォークの場合でも，一般的に $\nu(K,\mathbf{Z}^d)$ を求めることは困難であることが分かっ

た．最も単純な例である分裂が 1 点 $0 \in \mathbf{Z}^d$ のみで起こる場合には，m_K が有限となるための十分条件として

$$\frac{a}{\lambda} \geq G(0,0)$$

が得られた．ここで $G(\cdot,\cdot)$ は平均滞在時間 1 の単純ランダムウォークのグリーン函数であり，

$$\lambda := \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_k(0)$$

は分裂したときの粒子の純増加数の期待値である．すなわち，単純ランダムウォークの移動の速さを定める値 a と分裂したときの粒子の増加数を表す値 λ，及び次元 d によって十分条件を与えた．

最後に，本論文の構成を述べる．次の第 2 章において，本論文で用いる基本的な定義と定理について述べる．第 3 章では K-ゲージの定義とその性質について述べ，$m_K < \infty$ となるためのいくつかの十分条件を第 4 章で与えた．第 5 章では第 4 章の結果の具体例として，1 点のみで分裂が起こる場合に任意の有限集合 K に対して $m_K < \infty$ となるための十分条件を与える．第 6 章から第 8 章では [8] の結果を分枝ランダムウォークの場合に置き換える．第 9 章では $\mathbf{Z}^d$ における体積を定義し，その体積に関しても分枝ブラウン運動と全く同じ結果が得られることを確認する．

謝辞

本論文を書くにあたり，指導教官の竹田 雅好先生には熱心なご指導を頂きました．また，服部 哲弥先生をはじめ，先輩の塩沢 裕一さん，土田 兼治さん，田原 喜宏さん，確率論セミナーの皆様および同期の齊藤 文則君，三浦 充晴君にも多くのご支援を頂きました．この場を借りて皆様に深く感謝申し上げます．

第2章　準備

確率測度 P_x を $x \in \mathbf{Z}^d$ から出発する $\mathbf{Z}^d$ 上の連続時間単純ランダムウォーク X_t の法則とする．

分枝ランダムウォーク $(\overline{X}_t, \mathbf{P}_x)$ は**生成作用素**(generator)$\mathcal{L}$，**分枝率**(branching rate) $Q(x)$，列 $\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ で表現される**分枝構造**(branching mechanism) によって定まる．ここで $\mathcal{L}$ は,

$$\mathcal{L}f(x) := \frac{a}{2d} \sum_{y:|y-x|=1} (f(y) - f(x))$$

で定義される，離散ラプラシアンである．$p_k(x)$ は，粒子が点 x において分裂する際，k 個の子孫を作る確率であり，$Q(x)$ は $\mathbf{Z}^d$ 上の非負値函数で，Q を指数とする指数分布に従って分裂時刻 T が定まる．すなわち，

$$\mathbf{P}_{x_0}(T < t|\sigma(X_t)) = 1 - \exp\left(-\int_0^t Q(X_s)ds\right).$$

ここで，$\sigma(X_t)$ は X_t の生成する σ-加法族である．今後次を仮定する．

(A) 任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して，$0 \leq p_k(x) \leq 1$ かつ

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(x) = 1. \tag{2.1}$$

(B)

$$C_0 := \sup_x \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)p_k(x) < \infty. \tag{2.2}$$

分枝頻度(branching intensity)q を

$$q(x) := Q(x) \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)p_k(x) \tag{2.3}$$

で定義する．

$\mathbf{E}_x$ によって，$x \in \mathbf{Z}^d$ から一つの粒子でスタートした分枝ランダムウォーク $\overline{X}_t$ の期待値を表す．任意の $K \subset \mathbf{Z}^d$ に対して，$\mathbf{Z}^d$ 上の函数 $\psi_K(x)$ を，過程 $\overline{X}_t$ の少なくとも一つの粒子がいつか K に到達する確率とする．

この章を通じて集合 K を空でない有限集合とし，$\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ とする．また，集合 U の境界 ∂U を，

$$\partial U := \{x \in \mathbf{Z}^d \setminus U \mid \exists y \in U,\ |y - x| = 1\}$$

で定義する．

定義 2.1. U_l が空でない有限集合で，$\overline{U_l} = U_l \cup \partial U_l \subset U_{l+1}$ であり，$\bigcup_l U_l = \mathbf{Z}^d$ が満たされるとき，$\{U_l\}_{l\geq 0}$ を $\mathbf{Z}^d$ の**exhausting sequence** と言う．

exhausting sequence$\{U_l\}$ を与えると，U_l の外側で消滅するという条件をつけた吸収壁ランダムウォーク $X_t^{U_l}$ の極限としてランダムウォーク X_t が得られる．同様に，U_l の外側で消滅するという条件をつけた分枝過程 $\overline{X}_t^{U_l}$ の極限として分枝過程 $\overline{X_t}$ が得られる．特に，全ての粒子が U_l を出る前に少なくとも一つの粒子が K に到達する確率を $\psi_K^{U_l}$ とすると，任意の有限集合 K に対して

$$\psi_K = \lim_{l\to\infty} \psi_K^{U_l}$$

が成り立つ．

$\mathbf{Z}^d \times [0,1]$ 上の函数 P を

$$P(x,u) := Q(x) \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x)(1 + u + \ldots + u^{k-2}) \tag{2.4}$$

で定義する．(2.2) より

$$C_0^{-1} q(x) \leq P(x,u) \leq P(x,1) = q(x) \tag{2.5}$$

が導かれる．

命題 2.2. 函数 $u = 1 - \psi_K$ は，Ω における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}u - P(x,u)u(1-u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

の解であり，(2.6) の全ての解の中で最大のものである．また，函数 $v = \psi_K$ は，Ω における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}v + P(x,1-v)(1-v)v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

の解であり，(2.7) の全ての解の中で最小のものである．

この命題の証明に必要な補題を挙げる．作用素 L を $L := \mathcal{L} + q$ で定義する．

補題 2.3. (一般的な最大値原理) $U \subset \mathbf{Z}^d$ を有限集合とし，函数 f は U 上で $f > 0$, 函数 g は $\overline{U}$ 上で $g > 0$ であるとする．このとき，U 上で

$$\frac{Lf}{f} \geq \frac{Lg}{g} \tag{2.8}$$

が成立するならば

$$\sup_U \frac{f}{g} \leq \sup_{\partial U} \frac{f}{g}$$

である．特に境界 ∂U 上で $f \leq g$ ならば，U 上で $f \leq g$ である．

証明. $\frac{Lf}{f} = \frac{\mathcal{L}f}{f} + q$ であるから，(2.8) の L を $\mathcal{L}$ に置き換えたものを仮定して構わない．

$$\sup_U \frac{f}{g} > \sup_{\partial U} \frac{f}{g} \tag{2.9}$$

とする．f/g が $x_0 \in U$ において最大値をとると仮定する．ここで今，e_i を $\mathbf{Z}^d$ の第 i 成分の単位ベクトルとすると，各 i に対して

$$\frac{f(x_0 \pm e_i)}{g(x_0 \pm e_i)} \leq \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \tag{2.10}$$

となる．今，補題の仮定より，

$$\sum_{i=1}^{d} \left(f(x_0 + e_i) + f(x_0 - e_i)\right) g(x_0) - \sum_{i=1}^{d} \left(g(x_0 + e_i) + g(x_0 - e_i)\right) f(x_0) \geq 0$$

である．ここで，

$$\frac{f(x_0 + e_1)}{g(x_0 + e_1)} < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \tag{2.11}$$

であると仮定すると，

$$\sum_{i=2}^{d} \Big(f(x_0 + e_i)g(x_0) - g(x_0 + e_i)f(x_0)\Big) + \sum_{i=1}^{d} \Big(f(x_0 - e_i)g(x_0) - g(x_0 - e_i)f(x_0)\Big)$$
$$\geq g(x_0 + e_1)f(x_0) - f(x_0 + e_1)g(x_0) > 0$$

となるが，(2.10) より上式の左辺は 0 以下となるので，(2.11) に矛盾．従って

$$\frac{f(x_0 + e_1)}{g(x_0 + e_1)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

となる．全く同様にして，全ての i について

$$\frac{f(x_0 \pm e_i)}{g(x_0 \pm e_i)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

が成り立つことが分かる．これを繰り返すことにより，f/g は $U \cup \partial U$ 上定数であることが分かるが，これは(2.9) に矛盾．故に主張が従う． ∎

補題 2.4. (比較原理) $U \in \mathbf{Z}^d$ を有限集合とする．$0 \leq v_1, v_2 \leq 1$ なる函数 v_1, v_2 が，U において等式

$$\mathcal{L}v + P(x, 1-v)(1-v)v = 0$$

を満たし，境界 ∂U 上で $v_1 \leq v_2$ であれば，U においても $v_1 \leq v_2$ である．

証明. 集合

$$W := \{x \in U \mid v_1(x) > v_2(x)\}$$

が空でないと仮定する．任意の $v = v_1$ および $v = v_2$ に対して

$$\frac{\mathcal{L}v}{v} = -P(x, 1-v)(1-v)$$

が U において成り立つ．(2.4) より，$P(x, u)$ は u について単調増加なので，明らかに $-P(x, 1-v)(1-v)$ は函数 v について単調増加．故に，W 上では

$$\frac{\mathcal{L}v_1}{v_1} \geq \frac{\mathcal{L}v_2}{v_2}$$

であり，補題 2.3 より

$$\sup_W \frac{v_1}{v_2} \leq \sup_{\partial W} \frac{v_1}{v_2} \leq 1$$

を得る．従って $v_1(x) \leq v_2(x)$, $x \in W$ となるが，これは仮定に矛盾する． ∎

命題 2.2 の証明. $u = 1 - v$ であるから，明らかに(2.6) と(2.7) は同値である．よって，(2.6) を証明すればよい．$\partial\Omega \subset K$ であり，K 上を出発して K に到達する確率は 1 なので，u は境界条件を満たしている．最初の分裂が起こる時刻を T，任意の集合 K に初めて到達する時間を τ_K とする．なお，K に到達しないときは $\tau_K = \infty$ とする．このとき，$u(x)$ は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{P}_x(\tau_K = \infty) \\ &= \mathbf{P}_x(\tau_K = \infty, T = \infty) + \mathbf{P}_x(\tau_K = \infty, T < \infty) \\ &= \mathrm{E}_x[e^{-\int_0^\infty Q(X_t)dt}; \tau_K = \infty] + \mathbf{E}_x\big[\mathbf{P}_{X_T}(\tau_K = \infty); T < \infty\big]. \qquad (2.12) \end{aligned}$$

(2.12) は強マルコフ性より従う．作用素 $(-\mathcal{L}+Q)$ のグリーン函数を $G^Q(x,y)$ とかくと，(2.12) の第 2 項は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\big[\mathbf{P}_{X_T}(\tau_K=\infty);T<\infty\big] &= \mathbf{E}_x\Big[\sum_{k=2}^{\infty}p_k(X_T)u(X_T)^k;T<\infty]\\ &= \int_0^\infty \mathrm{E}_x\Big[\exp\Big(-\int_0^t Q(X_s)ds\Big)\sum_{k=2}^{\infty}p_k(X_t)u(X_t)^kQ(X_t)\Big]dt\\ &= \sum_{y\in\mathbf{Z}^d}G^Q(x,y)\sum_{k=2}^{\infty}p_k(y)u(y)^kQ(y)\end{aligned}$$

と書き換えることができる．ここで Feynman-Kac の公式より，

$$(-\mathcal{L}+Q)\,\mathrm{E}_x\Big[\exp\Big(-\int_0^\infty Q(X_t)dt\Big);\tau_K=\infty\Big]=0$$

なので，

$$(-\mathcal{L}+Q)\,u=\sum_{k=2}^{\infty}p_ku^kQ$$

となる．すなわち

$$\mathcal{L}u-Q(u-\sum_{k=2}^{\infty}p_ku^k)=0$$

となり，(2.6) が従う．次に ψ_K が(2.7) の最小解であることを確かめる．任意の exhausting sequence$\{U_l\}$ をとると，列 $\big\{\psi_K^{U_l}\big\}$ は単調増加し，ψ_K に収束する．v を(2.7) の任意の解とすると，∂U_l 上 $\psi_K^{U_l}=0$ であるから，$\psi_K^{U_l}\le v$ であり，補題 2.4 より U_l 上で $\psi_K^{U_l}\le v$ が言える．また，U_l の外でも $\psi_K^{U_l}=0$ なので，Ω 上 $\psi_K^{U_l}\le v$ であることが従う．よって $l\to\infty$ とすることにより，$\psi_K\le v$ を得る．すなわち，ψ_K は最小解である． ∎

補題 2.5. (強最大値原理) $U\subset\mathbf{Z}^d$ を連結集合とする．$0\le v\le 1$ なる任意の函数 v が，U において等式

$$\mathcal{L}v+P(x,1-v)(1-v)v=0$$

を満たすとする．このとき，ある点 $x_0\in U$ で $v(x_0)=1$ ならば，U 上で $v\equiv 1$ である．

証明. $u:=1-v$，$V(x):=P(x,1-v)v$ とすると，U において

$$-\mathcal{L}u+V(x)u=0$$

が成り立ち，$u(x_0)=0$ である．

$$M_t := u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds$$

とおくと，M_t はマルチンゲールとなる．よって伊藤の公式より，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&e^{-\int_0^t V(X_s)ds}u(X_t) - u(X_0) \\
&\qquad = -\int_0^t V(X_s)u(X_s)e^{-\int_0^s V(X_r)dr}ds + \int_0^t e^{-\int_0^s V(X_r)dr}du(X_s) \\
&\qquad = \int_0^t e^{-\int_0^s V(X_r)dr}dM_s + \int_0^t e^{-\int_0^s V(X_r)dr}\left(\mathcal{L}u - Vu\right)(X_s)ds \\
&\qquad = \int_0^t e^{-\int_0^s V(X_r)dr}dM_s\ , \quad t < \tau_{U^c}.
\end{aligned}$$

D を，$D \cup \partial D \subset U$ なる x_0 の有限な近傍とする．すると，M_s がマルチンゲールであるから任意抽出定理より，

$$u(x_0) = \mathrm{E}_{x_0}\left[\exp\left(-\int_0^\tau V(X_s)ds\right)u(X_\tau)\right] \tag{2.13}$$

が成り立つ．ここで τ は，X_t が ∂D に到達する最初の時刻である．今，∂D 上のある点で u が正になったとすると，$\mathrm{P}_{x_0}(u(X_\tau)>0)>0$ であるから(2.13) より $u(x_0)>0$ が従い，$u(x_0)=0$ に矛盾．故に，u は ∂D 上恒等的に 0 である．U は連結であるので，D の取り方を変えることによって，U 全体で $u \equiv 0$ を得る．すなわち，U 全体で $v \equiv 1$ である． ∎

注意 2.6. 補題 2.5 より，$\Omega = \mathbf{Z}^d \setminus K$ の任意の連結部分集合上で，$\psi_K \equiv 1$ であるか $\psi_K < 1$ であるかのどちらかであることが分かる．

注意 2.7. v が(2.7) を満たせば，$P(x, 1-v) \leq q(x)$ であることより，$Lv \geq 0$ が導かれる．特に，$\Omega := \mathbf{Z}^d \setminus K$ 上で $L\psi_K \geq 0$ である．すなわち，ψ_K は Ω 上の L-劣調和函数である．

第3章　K-ゲージ

各粒子が K に達したらそこで止まる分枝過程 $\overline{X}_t^{\Omega}$ を考える．N_K を，$\overline{X}_t^{\Omega}$ においていつか K に到達する粒子の（ランダムな）数とする．つまり，N_K はいつか K に到達する過程 $\overline{X}_t$ の枝（子孫でなく）の総数である．

定義 3.1. $\mathbf{Z}^d$ 上の函数 $m_K(x) := \mathbf{E}_x N_K$ を，分枝ランダムウォーク $\overline{X}_t$ のK-**ゲージ**と言う．

定義から明らかに $m_K \geq \psi_K$ である．

定義 3.2. 任意の有限集合 K に対して，$\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ とする．このとき，作用素 $(-\mathcal{L} + Q)$ のグリーン函数 $G_\Omega^Q(x, y)$ は任意の函数 $f(x)$ に対して

$$\sum_{y \in \Omega} G_\Omega^Q(x, y) f(y) := \mathrm{E}_x \Big[\int_0^{\tau_K} \exp\Big(- \int_0^t Q(X_s) ds \Big) f(X_t) dt \Big]$$

を満たすものとして定義される．ここで τ_K はランダムウォーク X_t が K に到達する最初の時刻である．すなわち，

$$\tau_K := \inf\{t > 0 : X_t \in K\}.$$

命題 3.3. (a)

$$m_K(x) = \mathrm{E}_x \Big[1_{\{\tau_K < \infty\}} \exp\Big(\int_0^{\tau_K} q(X_t) dt \Big) \Big].$$

(b) Ω における次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} Lf = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき $m_K < \infty$ であれば，m_K は(3.1) の最小の正の解である．そうでない時は，(3.1) は正の解を持たない．

これは，強マルコフ性と Feynman-Kac の公式より従う．(a) の等式はよく知られている結果であり，K-ゲージ m_K は元々分枝過程 $\overline{X}_t$ によって定義されるが，実は作用素 L によって完全に決定できるということを言っている．

注意 3.4. 実は，ある点 $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して $m_K(x) < \infty$ であることと，

$$\sup_{x \in \mathbf{Z}^d} m_K(x) < \infty$$

は同値である ([2])．故に，必ず $m_K < \infty$ か $m_K \equiv \infty$ のどちらかになる．

命題 3.3 の証明. 定義 3.1 で定義した $m_K(x)$ が命題 3.2 を満たすことを示す．$m_K(x)$ は分枝ブラウン運動 $\overline{X}_t$ の最初の分裂時刻 T を使って，次のように二つに分けることができる．

$$\begin{aligned} m_K(x) &= \mathbf{E}_x N_K \\ &= \mathbf{E}_x[N_K; T < \tau_K] + \mathbf{E}_x[N_K; T \geq \tau_K] \\ &= I + II \end{aligned}$$

Ω 上の作用素 $(-\mathcal{L} + Q)$ のグリーン函数を $G_\Omega^Q(x,y)$ とすると，強マルコフ性より

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{E}_x\Big[\sum_{k=2}^{\infty} kp_k(X_T) m_K(X_T); T < \tau_K\Big] \\ &= \mathrm{E}_x\Big[\int_0^{\tau_K} Q(X_t) \exp\left(-\int_0^t Q(X_s)ds\right)\Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k m_K\Big)(X_t)dt\Big] \\ &= \sum_{y \in \Omega} G_\Omega^Q(x,y)\Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k(y)\Big) m_K(y) Q(y). \end{aligned}$$

一方，第 2 項は

$$\begin{aligned} II &= \mathbf{E}_x[N_K; T \geq \tau_K] \\ &= \mathrm{E}_x\Big[\exp\left(-\int_0^{\tau_K} Q(X_t)dt\right); \tau_K < \infty\Big] \end{aligned}$$

となり，Feynman-Kac の公式より，$(-\mathcal{L} + Q)$ を作用させると 0 になる．よって，

$$(-\mathcal{L} + Q)\, m_K = \Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k\Big) m_K Q. \tag{3.2}$$

これより，

$$\begin{aligned} Lm_K &= (\mathcal{L} + q)\, m_K \\ &= \mathcal{L} m_K + \Big(Q \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) p_k\Big) m_K \\ &= \mathcal{L} m_K + \Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k - \sum_{k=2}^{\infty} p_k\Big) m_K Q. \end{aligned}$$

(2.1), (3.2) を用いることにより，

$$
\begin{aligned}
Lm_K &= \mathcal{L}m_K + \Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k - 1\Big)m_K Q \\
&= \mathcal{L}m_K - Qm_K + \Big(\sum_{k=2}^{\infty} kp_k\Big)m_K Q \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る．また，境界条件 $m_K|_{\partial\Omega} = 1$ は定義より明らか．以上より，$m_K(x) = \mathbf{E}_x N_K$ は

$$
\begin{cases}
Lm_K = 0 \\
m_K|_{\partial\Omega} = 1
\end{cases}
$$

を満たす． ∎

点 $x \in \mathbf{Z}^d$ を出発したランダムウォーク X_t が K に到達する確率を $h_K(x)$ で表す．すなわち

$$
h_K(x) := \mathrm{P}_x(\tau_K < \infty). \tag{3.3}
$$

Ω 上では，$h_K(x)$ は次の境界値問題における最小の正解として表すことができる．

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}h = 0 \\
h|_{\partial\Omega} = 1.
\end{cases}
$$

$\partial\Omega$ でディリクレ境界条件を持つ Ω 上の作用素 $\mathcal{L}$ に対するグリーン函数を G_Ω とする．今，K は空ではないので，任意の $x, y \in \Omega$ に対して $G_\Omega(x, y) < \infty$ である．G_Ω は Ω における $\mathcal{L}$ の最小の正の基本解である．

補題 3.5. $m_K < \infty$ ならば，任意の $x \in \Omega$ に対して

$$
m_K(x) = h_K(x) + \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x, y)m_K(y)q(y) \tag{3.4}
$$

が成り立つ．さらにこの場合，全ての $x \in \Omega$ に対して $m_K(x) \geq 1$ であるか，

$$
\liminf_{x\to\infty} m_K(x) = 0
$$

であるかのどちらかである．

証明. $\{U_l\}$ を $K \subset U_0$ であるような exhausting sequence とし，$\Omega_l := U_l \setminus K$ とする．$m_l(x)$ を，Ω_l における次の境界値問題の解とする．

$$\begin{cases} \mathcal{L}m_l + qm_l = 0 \\ m_l|_{\partial\Omega} = 1,\ m_l|_{\partial U_l} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

すると，$l \to \infty$ としたとき $m_l \to m_K$ となる．一方，函数 w_l, h_l を Ω_l における次の問題の解とする．

$$\begin{cases} \mathcal{L}h_l = 0 \\ h_l|_{\partial\Omega} = 1,\ h_l|_{\partial U_l} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}w_l = -qm_l \\ w_l|_{\partial\Omega} = 0,\ w_l|_{\partial U_l} = 0. \end{cases}$$

すると，m_l は h_l, w_l を用いて

$$m_l = h_l + w_l$$

と表すことができる．今，w_l の定義より

$$w_l(x) = \sum_{y\in\Omega_l} G_{\Omega_l}(x,y)m_l(y)q(y)$$

を得る．すなわち

$$m_l(x) = h_l(x) + \sum_{y\in\Omega_l} G_{\Omega_l}(x,y)m_l(y)q(y). \tag{3.6}$$

補題 2.4 より，列 $\{m_l\}, \{h_l\}, \{G_{\Omega_l}\}$ は l について増加列なので，(3.6) において $l \to \infty$ とすることにより (3.4) を得る．

$F := m_K q$ と定め，Ω における境界値問題：

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = -F \\ v|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

を考える．(3.7) の非負解が存在した場合には，その最小の非負解を v_{min} と書く．次の 2 つを示せば証明は終わる．

(i) v_{min} が存在して，$v_{min} = m_K$.

(ii) $\inf_{\Omega} h_K < 1$ ならば，$\liminf_{x\to\infty} v_{min}(x) = 0$.

実際，$h_K \geq 1$ ならば，(3.4) の被積分函数が非負であることから $m_K \geq 1$ が従う．故に，上を示せばよい．

(i) の証明 函数 v_l を Ω_l 上の境界値問題

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{L}v_l = -F \\ v_l|_{\partial\Omega} = 1,\ v_l|_{\partial U_l} = 0. \end{cases}$$

の解とする．すると明らかに

$$v_l(x) = h_l(x) + \sum_{y \in \Omega_l} G_{\Omega_l}(x,y)F(y).$$

(3.7) の任意の非負解 v に対して，比較原理より $v \geq v_l$ が言える．故に $l \to \infty$ とすることにより

$$v(x) \geq h_K(x) + \sum_{y \in \Omega} G_{\Omega}(x,y)F(y) = m_K(x)$$

を得る．一方，命題 3.3 より m_K は(3.7) を満たすので，$m_K = v_{min}$ が従う．

(ii) の証明 v_{min} は優調和函数なので，最小値原理より

$$\liminf_{x \to \infty} v_{min} = \inf v_{min}$$

が言える．今，

$$\inf_{\Omega} v_{min} > \varepsilon > 0$$

であるとする．函数

$$v = v_{min} - \varepsilon(1 - h_K)$$

を考えると，$\mathcal{L}h_K = 0,\ h_K|_{\partial\Omega} = 1$ より，v は(3.7) を満たすことが分かる．また，$h_K \leq 1$ なので $0 \leq v < v_{min}$ が成り立つのだが，これは v_{min} の最小性に反する．よって

$$\inf_{\Omega} v_{min} = 0$$

となり，主張が従う． ▮

定義 3.6. $\psi_K(x) \equiv 1$ であるとき，過程 $\overline{X}_t$ はK**-再帰的である**といい，任意の空でない集合 K に対して K-再帰的であるとき，過程 $\overline{X}_t$ は**再帰的である**という．K-再帰的でない，すなわち $\psi_K(x) < 1$ となる x が存在するとき，過程 $\overline{X}_t$ はK**-非再帰的である**といい，再帰的でない，すなわち $\psi_K(x) < 1$ となる空でない集合 K および x が存在するとき，過程 $\overline{X}_t$ は**非再帰的である**という．

定理 3.7. $m_K < \infty$ と仮定する．このとき次の 2 つのどちらかが起こる．

(i) X_t と $\overline{X}_t$ が共に K-非再帰的で，$\liminf_{x \to \infty} m_K(x) = 0$.

(ii) X_t と $\overline{X}_t$ が共に K-再帰的で，$m_K \geq 1$.

特に，X_t が非再帰的で $m_K < \infty$ ならば，$\overline{X}_t$ も非再帰的.

証明. (i) X_t が K-非再帰的ならば，全ての $x \in \Omega$ に対して

$$h_K(x) = \mathrm{P}_x(\tau_K < \infty) < 1$$

である．故に，補題 3.5 より

$$\liminf_{x \to \infty} m_K(x) = 0.$$

ここで，$\psi_K \leq m_K$ であったので，$\overline{X}_t$ も K-非再帰的であることが従う．

(ii) X_t が K-再帰的であるとすると，粒子の消滅がないので $\overline{X}_t$ も当然 K-再帰的である．故に $h_K \equiv 1$ となり，(3.4) より

$$m_K \geq h_K \equiv 1$$

が従う． ∎

第4章　固有値と K-ゲージ

集合 $U \subset \mathbf{Z}^d$ に対して，ディィリクレ境界を持つ U 上の作用素 L の L^2-スペクトルの下限を $\lambda(U)$ で表す．すなわち，

$$\begin{aligned}\lambda(U) &= \inf_{\varphi} \frac{-\sum_{x\in U}\varphi(x)L\varphi(x)}{\sum_{x\in U}\varphi(x)^2} \\ &= \inf_{\varphi} \frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z\in\overline{U},\ y\sim z}|\varphi(y)-\varphi(z)|^2 - \sum_{y\in U}q(y)\varphi(y)^2}{\sum_{x\in U}\varphi(x)^2}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで下限は，恒等的に 0 ではなく U の中にコンパクトな台を持つ函数全体でとる．また，$y\sim z$ は y と z が隣り合っていること，すなわち $|y-z|=1$ であることを表す．U が有界ならば，$\lambda(U)$ は U における方程式

$$\begin{cases} Lu+\lambda u = 0 \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

の最小固有値として表される．

また，任意の集合 $U \subset \mathbf{Z}^d$ と有限集合 $K \subset U$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(K,U) &:= \inf_{\varphi} \frac{-\sum_{y\in U\setminus K}\varphi(y)\mathcal{L}\varphi(y)}{\sum_{y\in U\setminus K}q(y)\varphi(y)^2} \\ &= \inf_{\varphi} \frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z\in\overline{U\setminus K},\ y\sim z}|\varphi(y)-\varphi(z)|^2}{\sum_{y\in U\setminus K}q(y)\varphi(y)^2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

と定義する．ここでの下限も，恒等的に 0 ではなく U の中にコンパクトな台を持つ函数全体でとる．U が有限集合ならば，$\nu(K,U)$ は $U\setminus K$ における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}u+\nu qu = 0 \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

の最小固有値となる．

定理 4.1. $q \not\equiv 0$ とする．このとき，次の条件のいずれかが成立すれば，任意の有限集合 K に対して $m_K < \infty$ である．

(i) $\mathbf{Z}^d$ 上の正の L-優調和函数が存在する．

(ii) 作用素 L が，$G^L(x,y) < \infty$ となる正のグリーン函数 $G^L(x,y)$ を持つ．

(iii) 任意の有界連結集合 $U \subset \mathbf{Z}^d$ に対して，$\lambda(U) > 0$.

(iv)

$$\nu(K, \mathbf{Z}^d) \geq 1. \tag{4.3}$$

証明. (i) u を $\mathbf{Z}^d$ 上の正の L-優調和函数とする．このとき $\mathcal{L}u \leq -qu \leq 0$ であるから，強最小値原理より u は真に正である．よって，$q \not\equiv 0$ という仮定より，u は定数ではありえない．つまり，非定数な正の $\mathcal{L}$-優調和函数 u が存在する．

K を空でない有限集合とする．ここで，K 上 $u \geq 1$ であると仮定しても一般性を失わない．$\{U_l\}_{l\geq 1}$ を，$K \subset U_l$ を満たすような exhausting sequence とする．L は $\mathbf{Z}^d$ 全体で正となる優調和函数を持つので，L に関するディリクレ問題は任意の有限集合上で解くことができる．f_l を，$U_l \backslash K$ におけるディリクレ問題

$$\begin{cases} Lf_l = 0 \\ f_l|_{\partial\Omega} = 1,\ f_l|_{\partial U_l} = 0 \end{cases}$$

の解とする．強最小値原理より，$U_l \backslash K$ において $f_l > 0$ であることが従うので，補題 2.4 の比較原理より $f_l \leq u$ を得る．再び比較原理より，(補題 3.5 の証明中の m_l と全く同じ方法により）列 f_l は l について単調増加．故に f_l は $\mathbf{Z}^d \backslash K$ 上で正の函数 f に収束し，この f は外部問題(3.1) の解である．(3.1) の最小解が m_K であったので，$m_K \leq f \leq u < \infty$ が従う．

(ii) コンパクトな台を持ち，恒等的に 0 ではない $\mathbf{Z}^d$ 上の非負函数 f を任意にとり，

$$u(x) := \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} G^L(x,y) f(y) \tag{4.4}$$

とする．ここで $Lu = -f \leq 0$ なので，函数 u は正かつ L-優調和となる．よって (i) の仮定が満たされる．

(iii) $\lambda(U) > 0$ という条件は，任意の有限連結集合 U において L が最大値原理を満たし，U におけるディリクレ問題

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u|_{\partial U} = \varphi \end{cases}$$

が任意の φ に対して，一意な解を持つことを意味している．
exhausting sequence$\{U_l\}$ をとり，U_l 上 $Lu_l = 0$ なる非負解 u_l を構成する. (例えば，任意の正の境界値で U_l におけるディリクレ問題を解く.）すべての U_l に属する点 x_0 を固定し，$u_l(x_0) = 1$ となるように u_l を正規化する．列 $\{u_l\}$ は局所一様位相でコ

ンパクトなので，u_l の極限が u であるとすると，$\mathbf{Z}^d$ 全体で $Lu = 0$ となる．また $u(x_0) = 1$ なので，強最小値原理より u は真に正である．つまり，(i) の条件が成立する．

(iv) 条件(4.3) より，K を含む任意の有限集合 U に対して

$$\nu := \nu(K,U) > 1$$

である．すなわち

$$\frac{a}{4d} \sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2 \geq \nu \sum_{y\in U\backslash K} q(y)\varphi(y)^2$$

であり，これより

$$\begin{aligned}\sum_{y\in U\backslash K} q(y)\varphi(y)^2 \ &\leq \ \frac{a}{4d} \sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2 \\ &\qquad -\big(1-\frac{1}{\nu}\big)\frac{a}{4d} \sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2\end{aligned}$$

が従う．φ に依らないある $C>0$ が存在して，

$$\sum_{y\in U\backslash K} \varphi(y)^2 \leq \frac{a}{4d}C \sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2$$

が成り立つ．よって

$$\sum_{y\in U\backslash K} q(y)\varphi(y)^2 \leq \frac{a}{4d} \sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2 - \frac{(\nu-1)}{C\nu} \sum_{y\in U\backslash K} \varphi(y)^2$$

となり，すなわち

$$\frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2 - \sum_{y\in U\backslash K} q(y)\varphi(y)^2}{\sum_{y\in U\backslash K}\varphi(y)^2} \geq \frac{(\nu-1)}{C\nu} > 0 \tag{4.5}$$

である．

拡張記号 $\lambda(U,\mathbf{Z}^d)$ を，(4.1) で定義したように U 上の作用素 L のスペクトルの下限として用いる．すると

$$\inf_{\varphi} \frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z \in \overline{U\backslash K},\ y\sim z} |\varphi(y)-\varphi(z)|^2 - \sum_{y\in U\backslash K} q(y)\varphi(y)^2}{\sum_{y\in U\backslash K}\varphi(y)^2} = \lambda(U',M').$$

ここで，$U' = U\backslash K, M' = \mathbf{Z}^d\backslash K$ である．(4.5) より $\lambda(U',M') > 0$ が従う．(iii) の条件において $\mathbf{Z}^d$ を M' に置き換えることが出来，そうすると $\partial M'$ で反射する M' 上の過程 $\overline{X}'_t$ において，$m_K < \infty$ となることが分かる．$\overline{X}_t$ と $\overline{X}'_t$ は K の外で一致するので，$\mathbf{Z}^d$ 上の過程 $\overline{X}_t$ についても $m_K < \infty$ が従う． ∎

注意 4.2. 条件 (iii) は $\mathbf{Z}^d$ 上の等式 $\mathcal{L}u + qu = 0$ の正の解が存在することと同値である．

注意 4.3. 定理 4.1 から従うように，$P(x, u) \not\equiv 0$ で任意の有界連結集合 U に対して $\lambda(U) > 0$ とすると，問(2.6), (2.7) は非自明な解を持つ．この結果はここで適用されている確率的アプローチから明らかだが，純粋な解析的な方法からも得ることができる．

次の主張は定理 4.1(iii) に関係がある．

命題 4.4. $m_K < \infty$ ならば，任意の有限集合 $U \subset \Omega$ に対して $\lambda(U) > 0$ である．

証明. U におけるディリクレ条件の下での L の第一固有値を $\lambda = \lambda(U)$ とし，その固有函数を $u > 0$ とする．$\lambda \leq 0$ と仮定すると，$Lm_K = 0,\ Lu + \lambda u = 0$ より，U において

$$\frac{Lm_K}{m_K} = 0 \leq -\lambda = \frac{Lu}{u}$$

が成り立つ．補題 2.3 より，

$$\sup_U \frac{u}{m_K} \leq \sup_{\partial U} \frac{u}{m_K}$$

を得る．しかし，左辺が正であるのに対して，$u|_{\partial U} = 0$ であるから右辺は 0 となり，矛盾．$\lambda > 0$ が従う． ∎

第5章　具体例

分枝ブラウン運動の場合，ブラウン運動のグリーン函数などが分かっているので，K-ゲージ m_K が有限となるための必要十分条件や，再帰性，非再帰性の条件を求める例をいくつか挙げることができる．ところが分枝ランダムウォークの場合には，ランダムウォークのグリーン函数などがきちんと計算できないため，分枝ブラウン運動と同様の例を挙げることはかなり難しい．よってここでは，1 点のみで分裂しうる最も簡単な場合において，任意の有限集合 K に対して m_K が有限となるための十分条件を与える．

この章では $Q(x) = \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$，すなわち原点 $0 \in \mathbf{Z}^d$ のみで分裂が起こるとする．ここで

$$\lambda := \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_k(0)$$

とおくと，分枝頻度は $q(x) = \lambda \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ となり，命題 3.2 から

$$m_K(x) = \mathrm{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_K<\infty\}} \exp\left(\lambda \int_0^{\tau_K} \mathbf{1}_{\{0\}}(X_t)dt\right)\right]$$

が従う．m_K の有限性を与えるために定理 4.1 を適用したいのだが，$\nu(K, \mathbf{Z}^d)$ を計算するのは困難である．したがって，任意の有限集合 K に対して $\nu(K, \mathbf{Z}^d) \geq 1$ となるための十分条件を求めることにより，定理 4.1 を適用する．

任意の $U \subset \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(U) :&= \inf_{\varphi} \frac{-\sum_{y\in U}\varphi(y)\mathcal{L}\varphi(y)}{\sum_{y\in U} q(y)\varphi(y)^2} \\ &= \inf_{\varphi} \frac{\frac{a}{4d}\sum_{y,z\in\overline{U},\ y\sim z}|\varphi(y)-\varphi(z)|^2}{\sum_{y\in U} q(y)\varphi(y)^2}\end{aligned}$$

と定義する．ここでの下限は，恒等的に 0 ではなく U の中にコンパクトな台を持つ函数全体でとる．このとき，任意の有限集合 K に対して

$$\nu(K, \mathbf{Z}^d) > \nu(\mathbf{Z}^d)$$

が成り立つので，$\nu(\mathbf{Z}^d) \geq 1$ であれば，任意の有限集合 K に対して $m_K < \infty$ となることが定理 4.1 より分かる．

固有値 $\nu(\mathbf{Z}^d)$ を計算する．[4, 例 2.1.2] と同様にして，函数 $\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{P}_x(\sigma_0 < \infty)$ が $\nu(\mathbf{Z}^d)$ の定義式の下限を満足させるものであることが分かる．ここで $\sigma_0 := \inf\{t > 0 \mid X_t = 0\}$ は，ランダムウォークが点 0 に初めて到達するランダムな時刻である．$G(\cdot,\cdot)$ を平均滞在時間が 1 のランダムウォークのグリーン函数とすると，強マルコフ性より

$$
\begin{aligned}
G(x,0) &= \mathrm{E}_x\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\}}(X_t)dt\right] = \mathrm{E}_x\left[\int_{\sigma_0}^\infty \mathbf{1}_{\{0\}}(X_t)dt\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\mathrm{E}_{X_{\sigma_0}}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\}}(X_t)dt\right]; \sigma_0 < \infty\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\mathrm{E}_0\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\}}(X_t)dt\right]; \sigma_0 < \infty\right] \\
&= G(0,0)\mathrm{P}_x(\sigma_0 < \infty)
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\mathrm{P}_x(\sigma_0 < \infty) = \frac{G(x,0)}{G(0,0)} = \frac{G\delta_0(x)}{G(0,0)}
$$

を得る．ただし，

$$
G\delta_0(\cdot) := \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} G(\cdot,y)\delta_0(y).
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathbf{Z}^d) &= \frac{1}{\lambda G(0,0)^2}\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} G\delta_0(y)\left(-\mathcal{L}G\delta_0(y)\right) \\
&= \frac{a}{\lambda G(0,0)^2}\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} G\delta_0(y)\delta_0(y) \\
&= \frac{a}{\lambda}\frac{1}{G(0,0)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，a は $-a^{-1}\mathcal{L}G = \mathrm{id}$ から出てくる．従って，任意の有限集合 K に対して $m_K < \infty$ となるための十分条件は

$$
\frac{a}{\lambda} \geq G(0,0) \tag{5.1}
$$

であることが分かる．

条件式(5.1) は，次のことを意味する．まず，a が大きいほど(5.1) を満たしやすく，よって $m_K < \infty$ となりやすい．これは 1 点に滞在する時間が短いほど，分裂が起こる前に別の場所に移動してしまう可能性が高くなり，よって粒子数は増加しにくいということである．一方，λ が大きいほど(5.1) を満たしにくいので，$m_K = \infty$ となりやすい．これは 1 回の分裂で生まれる粒子数が多いほど，K に到達する分枝数も増加しやすいということである．

$G(\cdot,\cdot)$ は積分の形で表現されるが，最も計算が容易なはずの $G(0,0)$ ですら値を求めることは出来ない．実際，$G(0,0)$ は次で表される：

$$G(0,0) = \frac{d^2}{(2\pi)^d}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_d}{d^2-(\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_d)^2}.$$

これを $mathematica$ で近似計算をすると次のようになる．

$$\begin{aligned} d=3\ \text{のとき} &\quad G(0,0)=1.51638 \\ d=4\ \text{のとき} &\quad G(0,0)=1.23947 \\ d=5\ \text{のとき} &\quad G(0,0)=1.15631 \end{aligned}$$

これは，次元が高いほど1粒子のランダムウォークは無限遠方に速く行くので，分裂のしかたが一緒であれば，分枝ランダムウォークにおいても次元が高いほど $m_K<\infty$ となりやすいことを表している．

第6章　到達確率の性質

ここでは到達確率 h_K と ψ_K の間の関係を導き，ψ_K に関するいくつかの性質を示す．ψ_K は第2章で定義した，過程 $\overline{X_t}$ の少なくとも一つの粒子がいつか K に到達する確率，h_K は(3.3) で定義したものである．

$\{U_l\}_{l=1}^{\infty}$ を $\mathbf{Z}^d$ における exhausting sequence とする．$K \subset \mathbf{Z}^d$ に対して $\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$, $\Omega_l := \Omega \cap U_l$ とし，函数

$$\psi_l := \psi_l^{\Omega_l},\ G_l := G_{\Omega_l}$$

を考える．

$$\begin{aligned} f_l &:= P(\cdot, 1-\psi_l)(1-\psi_l) \\ f_K &:= P(\cdot, 1-\psi_K)(1-\psi_K) \end{aligned} \tag{6.1}$$

とおき，h_l を Ω_l における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}h_l = 0 \\ h_l|_{\partial\Omega_l} = 1,\ h_l|_{\partial U_l} = 0. \end{cases}$$

の解とする．

補題 6.1. 任意の $x \in \Omega_l$ に対して

$$\psi_l(x) = h_l(x) + \sum_{y \in \Omega_l} G_l(x,y) f_l(y) \psi_l(y) \tag{6.2}$$

が成り立つ．

証明. 命題2.2 で，ψ_l が

$$\mathcal{L}\psi_l + P(x, 1-\psi_l)(1-\psi_l)\psi_l = 0$$

を満たすことを示した．また，定義より $\psi_l|_{\partial\Omega} = 1,\ \psi_l|_{\partial U_l} = 0$ であるから，ψ_l は Ω_l における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi_l + f_l\psi_l = 0 \\ \psi_l|_{\partial\Omega_l} = 1,\ \psi_l|_{\partial U_l} = 0 \end{cases}$$

の解である．故に，$w := \psi_l - h_l$ とおくと，この w は

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = -f_l\psi_l \\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ w|_{\partial U_l} = 0 \end{cases}$$

を満たす．これより

$$w = \sum_{y\in\Omega_l} G_l(\cdot, y) f_l(y)\psi_l(y)$$

が得られ，これはまさに(6.2) である． ∎

補題 6.2. $K \subset \mathbf{Z}^d$ を有界集合とし，$\Omega = \mathbf{Z}^d \backslash K$ とする．一点 $x \in \Omega$ に対して $\psi_K(x) < 1$ が成り立つならば，この x について

$$\psi_K(x) = h_K(x) + \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x, y)P(y, 1-\psi_K(y))(1-\psi_K(y))\psi_K(y) \tag{6.3}$$

が成り立つ．

証明. (6.1) を用いると，(6.3) は次のように書き換えることができる．

$$\psi_K(x) = h_K(x) + \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x, y) f_K(y)\psi_K(y). \tag{6.4}$$

(6.2) を用いて(6.4) が従うことを示す．$\psi_l \to \psi_K$，$f_l \to f_K$，$h_l \to h_K$，$G_l \to G_\Omega$ なので，Fatou の補題より

$$\begin{aligned} \psi_K(x) &\geq \lim_{l\to\infty} h_l(x) + \liminf_{l\to\infty} \sum_{y\in\Omega_l} G_l(x, y) f_l(y)\psi_l(y) \\ &\geq h_K(x) + \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x, y) f_K(y)\psi_K(y). \end{aligned}$$

が従う．故に

$$\sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x, y) f_K(y)\psi_K(y) \leq 1 \tag{6.5}$$

が成り立つ．Ω' を，x を含む Ω の連結成分とする．このとき全ての $y \notin \Omega'$ に対して $G_\Omega(x, y) = 0$ なので，(6.2), (6.4) において，和の範囲は Ω' に制限しても構わない．K は有界であり，一点 $x \in \Omega'$ において $\psi_K(x) < 1$ であるので，注意 2.6 より Ω' 上全体で $\psi_K < 1$ である．K' を，$K \cup \partial K \subset K'$ を満たすような有界集合とする．すると，$\partial(\mathbf{Z}^d \setminus K')$ 上で $\psi_K \leq 1 - \delta$ となるような $0 < \delta < 1$ が存在する．これより $\Omega' \backslash K'$ において

$$\psi_K \leq 1 - \delta$$

が従う．この不等式と(6.1), (2.5) により，全ての $x \in \Omega' \backslash K'$ に対して

$$\begin{aligned} f_l(x) \le & P(x, 1-\psi_l(x)) \le P(x,1) \le C_0 P(x, 1-\psi_K(x)) \\ & \le C_0 P(x, 1-\psi_K(x))(1-\psi_K(x)\delta^{-1} = C_0 \delta^{-1} f_K(x) \end{aligned}$$

が従う．ここで C_0 は仮定 (B) の定数である．これと列 $\{G_l\}, \{\psi_l\}$ が単調増加であることから，任意の $y \in \Omega' \backslash K'$ に対して

$$G_l(x,y) f_l(y) \psi_l(y) \le C_0 \delta^{-1} G_\Omega(x,y) f_K(y) \psi_K(y)$$

が成り立つ．(6.5) より上式右辺は Ω' 上で可積分であるから，$\Omega' \backslash K'$ 上でも可積分であり，優収束定理より

$$\sum_{y \in \Omega' \backslash K'} G_l(x,y) f_l(y) \psi_l(y) \xrightarrow[l \to \infty]{} \sum_{y \in \Omega' \backslash K'} G_\Omega(x,y) f_K(y) \psi_K(y) \tag{6.6}$$

を得る．一方，$K' \setminus K$ は有限個の元からなるので，

$$\sum_{y \in K' \backslash K} G_l(x,y) f_l(y) \psi_l(y) \xrightarrow[l \to \infty]{} \sum_{y \in K' \backslash K} G_\Omega(x,y) f_K(y) \psi_K(y).$$

これと(6.6) を合わせて，

$$\sum_{y \in \Omega' \backslash K} G_l(x,y) f_l(y) \psi_l(y) \xrightarrow[l \to \infty]{} \sum_{y \in \Omega' \backslash K} G_\Omega(x,y) f_K(y) \psi_K(y)$$

を得る．故に，(6.2) において $l \to \infty$ とすることにより，(6.4) が得られる． ∎

補題 6.3. $K \subset \mathbf{Z}^d$ に対して $\Omega = \mathbf{Z}^d \backslash K$ とし，ある $x \in \Omega$ に対して

$$\sum_{y \in \Omega} G_\Omega(x,y) q(y) < \infty$$

が成り立つとする．このとき，この点 x に対して

$$\psi_K(x) = h_K(x) + \sum_{y \in \Omega} G_\Omega(x,y) P(y, 1-\psi_K(y))(1-\psi_K(y))\psi_K(y) \tag{6.7}$$

が成り立つ．

証明. 補題 6.1 より，

$$\psi_l(x) = h_l(x) + \sum_{y \in \Omega_l} G_l(x,y) P(y, 1-\psi_l(y))(1-\psi_l(y))\psi_l(y). \tag{6.8}$$

ここで $G_l \le G_\Omega$，$\psi_l \le 1$ であり，(2.5) より $P(\cdot, 1-\psi_l) \le q$ である．よって，

$$G_{\Omega_l}(x, \cdot) P(\cdot, 1-\psi_l)(1-\psi_l)\psi_l \le G_\Omega(x, \cdot) q$$

となり，右辺は可積分函数なので，(6.8) において $l \to \infty$ とすることで優収束定理より(6.7) を得る． ∎

補題 6.4. 次の条件

(a) K が有界かつ $\psi_K \not\equiv 1$

(b) 一般の集合 K について，$h_K \not\equiv 1$ であり，かつ任意の $x \in \Omega$ に対して(6.3) が成立

のどちらかが成立すれば,

$$\liminf_{x \to \infty} \psi_K(x) = 0 \tag{6.9}$$

が従う.

証明.
(a) の場合には，$\Omega' \subset \Omega$ を，任意の $x \in \Omega'$ に対して $\psi_K < 1$ が成り立つ連結集合のうち，元の数が最も多いものとする．すると最小値原理より，Ω' は非有界である．補題 6.2 より，任意の $x \in \Omega'$ に対して

$$\psi_K(x) = h_K(x) + \sum_{y \in \Omega} G_\Omega(x, y) F(y) \tag{6.10}$$

が成り立つ．ここで

$$F := P(\cdot, 1 - \psi_K)(1 - \psi_K)\psi_K.$$

(b) の場合には，$\Omega' \subset \Omega$ を，任意の $x \in \Omega'$ に対して $h_K < 1$ が成り立つ連結集合のうち，元の数が最も多いものとする．h_K は Ω 上調和なので，先と同じように最小値原理から，Ω' は非有界であることが分かる．この Ω' に対して補題 6.3 より，任意の $x \in \Omega'$ に対して(6.10) が成立する．

(a), (b) それぞれの場合で定めた Ω' に対して，Ω' における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = -F \\ v|_{\partial\Omega'} = 1 \end{cases} \tag{6.11}$$

を考える．補題3.5 の証明と全く同様にして，(6.11) の非負の最小解 v_{min} が存在して，

$$v_{min}(x) = h_K(x) + \sum_{y \in \Omega'} G_{\Omega'}(x, y) F(y)$$

となることを確かめることができる．これと(6.10) を比べることで Ω' 上 $v_{min} \equiv \psi_K$ であることが分かる．次に

$$\inf_{\Omega'} v_{min} = 0 \tag{6.12}$$

を背理法で証明する．$\inf_{\Omega'} \psi_K > \varepsilon > 0$ を仮定し，函数

$$v := v_{min} - \varepsilon(1 - h_K)$$

を考えると，この v も(6.11) の正の解となる．今，(a),(b) のそれぞれについて

$$\inf_{\Omega'} h_K < 1$$

も成り立つ．よって

$$\inf_{\Omega'} v = \inf_{\Omega'} v_{min} - \varepsilon \inf_{\Omega'}(1 - h_K) > \inf_{\Omega'} v_{min}$$

となり，v_{min} の最小性に矛盾するので，(6.12) が成り立つ．

今，Ω' は非有界である．また，ψ_K は Ω' 上の優調和函数であり，$\Omega' \cap \partial\Omega'$ 上で $\psi_K > 0$ であるから，(6.9) が従う． ∎

第7章　グリーン函数と K-ゲージ

この章では $K \subset \mathbf{Z}^d$ を有限集合とし，$\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ とする．

定義 7.1. (3.3) で定義した h_S について，$h_S(x) < 1$ となるような点 $x \in \mathbf{Z}^d$ が少なくとも一つ存在する時，集合 $S \subset \mathbf{Z}^d$ は**thin** であるという．

S が thin ならば $\inf h_S = 0$ である．また，ランダムウォーク X_t が非再帰的ならば，任意の有限集合は thin である．すなわち，$d \geq 3$ のとき，任意の有限集合は thin である．

定理 7.2. $K \subset \mathbf{Z}^d$ を有限集合とし，$q \not\equiv 0$ とする．このとき，次の条件のいずれかが成立すれば，過程 $\overline{X}_t$ は K-非再帰的である．

(i) X_t が非再帰的であり，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^d \backslash S} G(x,y)q(y) < \infty \tag{7.1}$$

となる thin な集合 S が存在する．

(ii) $\mathbf{Z}^d$ 上で，不等式

$$\mathcal{L}u - qu \geq 0 \tag{7.2}$$

が成り立つような正の有界函数 u が存在する．

注意 7.3. [5, 定理 5.1], [6, 定理 4.1] より，条件 (i) と (ii) は同値である．

注意 7.4. ([8, 注意 6.1]) 分枝過程 $\overline{X}_t$ が非再帰的になる簡単な例を二つ挙げる．

1. 条件(7.1) において $S = \emptyset$ をとることができるとすると，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} G(x,y)q(y) < \infty \tag{7.3}$$

ならば，(7.1) が成立するので，分枝過程 $\overline{X}_t$ は非再帰的である．

2. q のサポートが thin であるとき．実際，S を q のサポートの十分小さな近傍とすると，それもまた thin．よって明らかに(7.1) の和は 0 となる．q の値がどれだけ大きくても，q のサポートが十分小なので，過程 $\overline{X}_t$ は非再帰的である．（有限集合 $U \subset \Omega$ の中で q を十分大きくとることによって，$\lambda(U) < 0$ とすることができるので，命題 4.4 の対偶により $m_K = \infty$ となる．定理 3.7 は用いることが出来ないが，定理 7.2 が非再帰を保証する．）

注意 7.5. $q \not\equiv 0$ であり，$\mathbf{Z}^d$ 上で不等式

$$\mathcal{L}v + qv \leq 0$$

をみたすような正の函数 v が存在すれば，$\overline{X}_t$ は非再帰的である．[定理 4.1(i)]

定理 7.2 の証明. (i) $0 < \varepsilon < 1$ を固定し，$S' := \{x \in \mathbf{Z}^d | h_S(x) > \varepsilon\}$ とおく．$x \in S$ ならば $h_S(x) = 1 > \varepsilon$ であるから $S' \supset S$ であり，S' 上では $h_{S'} < \varepsilon^{-1} h_S$ なので，S' もまた thin である．ここで $0 < \varphi < 1$ なる函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \notin S' \\ 0 & x \in S \end{cases}$$

を考える．$Q' := \varphi Q\ (\leq Q)$, $q' := \varphi q\ (\leq q)$ とおき，$\overline{X}'_t$ をランダムウォーク X_t，分枝率 Q'，分枝構造 $\{p_k\}$ から構成される分枝過程とする．q' は S 上で 0 であるので，(7.1) の仮定より，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} G(x,y) q'(y) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d \setminus S} G(x,y) q'(y) \leq \sum_{y \in \mathbf{Z}^d \setminus S} G(x,y) q(y) < \infty \tag{7.4}$$

が従う．S' が thin なので，集合 $S'' := K \cup S'$ もまた thin である（[5, 命題 4.2]）．(7.4) と $\inf h_{S''} < 1$ が成立しているので，補題 6.4(b) より $\overline{X}'_t$ は S''-非再帰的である．また，S'' の外では $\overline{X}_t$ と $\overline{X}'_t$ は一致するので，$\overline{X}_t$ は S''-非再帰的である．故に，K-非再帰的である．

(ii) $0 < u < 1$ と仮定してよい．u は定数でない劣調和函数なので，強最大値原理より，

$$c := \max_K u < \sup_{\mathbf{Z}^d} u$$

を得る．ここで $w := u - c$ とおくと，w は

$$\begin{cases} \mathcal{L}w - qw \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{Z}^d \\ w|_K \leq 0 \\ 0 < \sup_{\mathbf{Z}^d} w < 1 \end{cases}$$

を満たす．$\{U_l\}$ を exhausting sequence とし，$\varphi_l := 1-\psi_K^{U_l}$ とする．また，$\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ とする．すると，φ_l は U_l において，

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_l - P(x,\varphi_l)\varphi_l(1-\varphi_l) = 0 \\ \varphi_l|_{\partial\Omega} = 0 \\ \varphi_l|_{\partial U_l} = 1 \end{cases}$$

を満足する（(2.6)）．$P(x,\cdot) \leq q(x)$ なので，$x \in U_l$ に対して

$$\mathcal{L}\varphi_l(x) - q(x)\varphi_l(x) \leq 0$$

が成り立つ．$U_l \backslash K$ における作用素 $\mathcal{L} - q$ の比較原理より，$w \leq \varphi_l$ が従う．$l \to \infty$ とすることにより，$w \leq 1 - \psi_K$ となる．これより $\psi_K \not\equiv 1$ が従う．これは $\overline{X}_t$ が K-非再帰的であることの定義である．　▮

$$G_\Omega q(x) := \sum_{y \in \Omega} G_\Omega(x,y)q(y)$$

と定める．次の主張は $G_\Omega q$ と m_K，そして $\overline{X}_t$ の非再帰性との間の関係についてである．

命題 7.6.　(i) 任意の $x \in \Omega$ に対して

$$G_\Omega q(x) < \infty$$

が成り立つと仮定する．このとき，X_t が非再帰的であることと $\overline{X}_t$ が非再帰的であることは同値である．

(ii)

$$c := \sup_{x \in \Omega} G_\Omega q(x) < 1 \tag{7.5}$$

を仮定する．このとき任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$m_K(x) \leq (1-c)^{-1} h_K(x)$$

が成り立つ．更に，$\inf m_K < 1$ ならば $\overline{X}_t$ は K-非再帰的であり，$\inf m_K \geq 1$ ならば $\overline{X}_t$ は K-再帰的である．

(iii)

$$\inf_{x \in D} \sum_{y \in D} G_\Omega(x,y)q(y) > 1$$

を満たす有限集合 $D \subset \Omega$ が存在するなら，$m_K \equiv \infty$ である．

証明. (i) 補題 6.3 より，任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\psi_K(x) = h_K(x) + \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x,y)F(y) \tag{7.6}$$

が従う．ここで

$$F := P(\cdot, 1-\psi_K)(1-\psi_K)\psi_K \ (\leq q(1-\psi_K)\psi_K).$$

もし X_t が再帰的であれば，$\overline{X}_t$ も明らかに K-再帰的．一方，$\overline{X}_t$ が K-再帰的であるとすると，$\psi_K \equiv 1$．よって $F \equiv 0$ となり，(7.6) より $h_K \equiv 1$ を得る．従って，X_t も K-再帰的となる．

(ii) Ω における和作用素 J を

$$Jf(x) := \sum_{y\in\Omega} G_\Omega(x,y)f(y)q(y)$$

で定義する．すると，

$$\sup_\Omega |Jf| \leq c \sup_\Omega |f|$$

となる．ここで c は(7.5) で定義したもの．これより，作用素ノルムを $||J||$ で書くと，$||J|| \leq c < 1$ が成り立つ．よって，級数 $I + J + J^2 + \ldots$ は $(I-J)^{-1}$ に絶対収束する．函数 $(I-J)^{-1}h_K$ は(3.1) の正の最小解となるので，

$$m_K = (I-J)^{-1}h_K \leq (1-c)^{-1}h_K$$

となる．これで $m_K < \infty$ が分かったので，定理 3.4 より後半の主張が従う．

(iii) $m_K < \infty$ であると仮定し，

$$C := \inf_{x\in D} \sum_{y\in D} G_\Omega(x,y)q(y) > 1$$

とすると，(3.4) より

$$\begin{aligned} m_K(x) &\geq h_K(x) + \sum_{y\in D} G_\Omega(x,y)m_K(y)q(y) \\ &\geq h_K(x) + (\inf_D m_K) \sum_{y\in D} G_\Omega(x,y)q(y) \end{aligned}$$

となる．よって

$$\inf_D m_K \geq \inf_D h_K + C \inf_D m_K$$

となるので，

$$(1-C)\inf_D m_K \geq \inf_D h_K > 0$$

を得る．故に $C < 1$ となり，これは $C > 1$ なる仮定に矛盾．従って $m_K \equiv \infty$ である． ∎

注意 7.7. 命題 7.6 の (i) において，命題の条件の代わりに(7.3) を仮定した場合には，定理 7.2 を用いて示せる．

第8章　再帰性とK-ゲージ

この章では分枝構造にさらなる仮定を付す．

(C) 任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(x) < \infty$$

が成り立つ．

函数 $\overline{q}$ を

$$\overline{q}(x) := Q(x)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(x) \tag{8.1}$$

と定義する．また，(2.3) と比較することにより，$\overline{q}(x) \geq 2q(x)$ が分かる．

有限集合 $K \subset \mathbf{Z}^d$ を固定し，積率母函数

$$w(x,s) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)s^k$$

を考える．ここで g_k は，$\overline{X}_t$ においていつか K に到達する分枝の数 N_K を用いて

$$g_k(x) := \mathbf{P}_x(N_K = k)$$

と表されるものである．$\overline{X}_t$ の K-ゲージは

$$m_K(x) := \mathbf{E}_x N_K = \sum_{k=1}^{\infty} kg_k(x) = \frac{\partial w}{\partial s}(x,1)$$

となる．同様に $\overline{X}_t$ の 2 次 K-ゲージ v_K を

$$v_K(x) := \mathbf{E}_x N_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 g_k(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(x,1) + \frac{\partial w}{\partial s}(x,1)$$

と定義すると，明らかに $m_K(x) \leq v_K(x)$ である．

補題 8.1. $v_K < \infty$ を仮定すると，$v = v_K$ は $\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ における境界値問題

$$\begin{cases} Lv = -\overline{q} m_K^2 \\ v|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

の正なる最小解である．ここで，$\overline{q}$ は(8.1) で定義したもの．$v_K < \infty$ でなければ，(8.2) は正の解を持たない．

証明. 函数 $w(x,s)$ は次の等式をみたす ([3])：

$$\mathcal{L}w(x,s) + \eta(x, w(x,s)) = 0. \tag{8.3}$$

ここで，

$$\eta(x,z) := Q(x)\Big[\sum_{k=2}^{\infty} p_k(x) z^k - z\Big].$$

(8.3) を s に関して 2 回微分し，$s=1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(x,s)\Big|_{s=1} &= \mathcal{L}v_K(x) - \mathcal{L}m_K(x), \\
\frac{\partial^2 \eta(x, w(x,s))}{\partial s^2}\Big|_{s=1} &= \Big[Q(x)\Big(\sum_{k=2}^{\infty} k p_k(x) w(x,s)^{k-1} - 1\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(x,s) \\
&\quad + Q(x)\Big(\frac{\partial w}{\partial s}(x,s)\Big)^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k(x) w(x,s)^{k-2}\Big]\Big|_{s=1} \\
&= (v_K(x) - m_K(x)) q(x) + \overline{q}(x) m_K(x)^2
\end{aligned}$$

となる．よって

$$Lv_K - Lm_K + \overline{q} m_K^2 = 0$$

を得る．今，$Lm_K = 0$ であるので，

$$Lv_K = -\overline{q} m_K^2$$

が従う．境界値については明らかである． ▮

注意 8.2. K-ゲージ m_K は完全に作用素 L にのみよって定まるのに対して，2 次 K-ゲージ v_K は $(L, \overline{q})$ のペアによって定まる．

次に，この章の主定理を証明する．

定理 8.3. 仮定 (A)(B)(C) が満たされ，ランダムウォーク X_t は非再帰的であるとする．$\{K_l\}_{l=0}^{\infty}$ を $\mathbf{Z}^d$ 上の exhausting sequence とし，$\Omega_l := \mathbf{Z}^d \setminus K_l$ とする．

$$q_l := q\mathbf{1}_{K_{l+1}\setminus K_l},\ \overline{q}_l := \overline{q}\mathbf{1}_{K_{l+1}\setminus K_l}$$

と定め，m_l を作用素 $L_l := \mathcal{L} + q_l$ の K_l-ゲージ，v_l をペア $(L_l, \overline{q}_l)$ から定まる 2 次 K_l-ゲージとする．このとき，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，任意の $l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\inf_{x\in\partial\Omega_{l+1}} m_l(x) \geq 1+\varepsilon,\quad \sup_{x\in\partial\Omega_{l+1}} v_l(x) \leq \varepsilon^{-1} \tag{8.4}$$

が成り立つならば，過程 $\overline{X}_t$ は K_0-再帰的である．

証明. 過程 $\overline{X}_t^l$ を，過程 $\overline{X}_t$ の推移と分枝構造 $\{p_k\}$ は変えずに，分枝率のみ $Q\mathbf{1}_{K_{l+1}\setminus K_l}$ に変えたものとする．すると，$\overline{X}_t^l$ の分枝頻度は q_l となる．よって，$\overline{X}_t^l$ は $K_{l+1}\setminus K_l$ 上でのみ分裂しうる．

整数 n を固定して，スタートが点 $x^{(0)} \in \partial\Omega_n$ で，j 回目に生成された子孫（これを j 世代目という）が $\partial\Omega_{n-j}$ の上にあるように，あるランダムな分枝木 $\Gamma_n \subset \mathbf{Z}^d$ を構成する．$x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots$ を j 世代目としたとき，$j+1$ 世代目を次のように構成する．$l := n-j-1$ とし，$x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots$ のそれぞれからスタートする過程 $\overline{X}_t^l$ の独立なコピーを考える．ここで，$x_i^{(j)} \in \partial\Omega_{l+1}$ であることに注意する．このそれぞれの過程において，$\partial\Omega_l$ 上の過程の枝が初めて K_l に到達した場所を特定し，それらを $x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, \ldots$ とする．もし，K_l に到達するのがなければ，木 Γ_n はそのステップで終了となる．

$x \in \partial\Omega_{l+1}$ を木 Γ_n の点とし，N_l を Γ_n にある点 x の（直接の）子の数とする．このとき明らかに

$$\mathbf{E}_x N_l = m_l(x),\ \mathbf{E}_x N_l^2 = v_l(x)$$

である．仮定(8.4) より，任意の $x \in \partial\Omega_{l+1}$ に対して

$$\mathbf{E}_x N_l \geq 1+\varepsilon,\ \mathbf{E}_x N_l^2 \leq \varepsilon^{-1}$$

となる．ゴルトン-ワトソンの定理の系より，2 次モーメントが一様に有界であることから，Γ_n は少なくとも $\pi(\varepsilon) > 0$ の確率で K_0 に到達する．

$\overline{X}_t$ の分枝率は $\overline{X}_t^l$ の分枝率よりも大きいので，$x \in \partial\Omega_n$ をスタートした過程 $\overline{X}_t$ は，少なくとも $\pi(\varepsilon)$ の確率で K_0 に到達する．従って任意の $x \in \partial\Omega_n$ に対して $\psi_{K_0}(x) \geq \pi(\varepsilon)$ が成り立ち，これは任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対しても成り立つ．故に補題 6.4（の対偶）より，$\psi_{K_0} \equiv 1$ が得られ，過程 $\overline{X}_t$ は K_0-再帰的であることが言えた． ∎

ある条件下では，ペア $(L, \overline{q})$ から定まる 2 次 K-ゲージは，作用素 $\mathcal{L} + 2q$ から定まる K-ゲージによって上から評価できる．

補題 8.4. 仮定 (C) に加えて，

$$C_1 := \sup_x \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(x) < \infty \tag{8.5}$$

も仮定する．m_K を作用素 $L = \mathcal{L} + q$ の K-ゲージ，v_K をペア $(L, \overline{q})$ からなる 2 次 K-ゲージ，$\overline{m}_K$ を作用素 $\mathcal{L} + 2q$ の K-ゲージとする．このとき，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$v_K(x) \le C_1(\sup_{\mathbf{Z}^d} m_K)\overline{m}_K(x) \tag{8.6}$$

が成り立つ．

証明. (8.6) の右辺が無限大ならば自明であるので，(8.6) の右辺は有限であるとする．命題 3.3 より，$\overline{m}_K$ は $\Omega := \mathbf{Z}^d \backslash K$ における境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}f + 2qf = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases}$$

の正なる最小解である．この境界値問題は

$$\begin{cases} Lf = -qf \\ f|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} \tag{8.7}$$

と同値である．今，Ω 上の作用素 L のグリーン函数を G_Ω と同様に定義し，G_Ω^L と書く．Ω 上の非負函数に対する作用素として

$$G_\Omega^L[f](x) := \sum_{y \in \Omega} G_\Omega^L(x, y) f(y)$$

を考える．補題 3.5 の証明と同様にして，(8.7) より

$$\overline{m}_K = m_K + G_\Omega^L[q\overline{m}_K] \tag{8.8}$$

が得られる.（この式から G_Ω^L の有限性が言えている.）上と同様にして(8.2) より，

$$v_K = m_K + G_\Omega^L[\overline{q} m_K^2] \tag{8.9}$$

も得られる．ここで(2.1), (2.3), (8.1), (8.5) より

$$\begin{aligned} \overline{q} &= Q(x) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(x) \\ &\le C_1 Q(x) \ = \ C_1 Q(x) \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x) \\ &\le C_1 Q(x) \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)p_k(x) \ = \ C_1 q(x) \end{aligned}$$

であるから，(8.9) 及び $m_K \le \overline{m}_K$ より

$$\begin{aligned} v_K &\le m_K + G^L_\Omega[C_1 q(\sup_\Omega m_k) m_K] \\ &= m_K + C_1(\sup_\Omega m_K) G^L_\Omega[q m_K] \\ &\le m_K + C_1(\sup_\Omega m_K) G^L_\Omega[q \overline{m}_K] \end{aligned}$$

となる．更に(8.8) を用いることで

$$\begin{aligned} v_K &\le m_K + C_1(\sup_\Omega m_K)(\overline{m}_K - m_K) \\ &\le C_1(\sup_{\mathbf{Z}^d} m_K)\overline{m}_K + \{1 - C_1(\sup_{\mathbf{Z}^d} m_K)\} m_K \\ &\le C_1(\sup_{\mathbf{Z}^d} m_K)\overline{m}_K \end{aligned}$$

を得る． ▮

系 8.5. 定理 8.3 の仮定の下で，さらに(8.5) も仮定する．作用素 $\mathcal{L} + 2q_l$ の K_l-ゲージを $\overline{m}_l$ で表す．ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\inf_{x \in \partial\Omega_{l+1}} m_l(x) \ge 1 + \varepsilon, \quad \sup_{x \in \Omega_{l+1}} \overline{m}_l(x) \le \varepsilon^{-1} \tag{8.10}$$

が成り立つならば，過程 $\overline{X}_t$ は K_0-再帰的である．

証明. l について一様に $\sup_{\partial\Omega_{l+1}} v_l$ が有限となることのみ示せばよい．K_{l+1} の外では $\overline{m}_l$ は調和かつ最小であるので，最大値原理より任意の $x \in \Omega_{l+1}$ に対して

$$\overline{m}_l(x) \le \varepsilon^{-1} \tag{8.11}$$

が成り立つ．故に(8.10) と合わせて，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対しても(8.11) が成り立つことを得る．補題 8.4 より，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$v_l(x) \le C_1(\sup \overline{m}_l)^2 \le C_1 \varepsilon^{-2}$$

となるので，定理 8.2 より主張が従う． ▮

第9章　再帰性，非再帰性とグリーン関数

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbf{Z}^d$ のとき，$\mathbf{Z}^d$ 上の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_d - y_d|$$

で定義する．ここでは，

$$B(x, r) := \{y \in \mathbf{Z}^d | d(x, y) \leq r\}$$

を中心 x，半径 r の球と言うことにする．また，$B(x, r)$ の表面積 $S(x, r)$ を

$$S(x, r) := \sharp\{y \in B(x, r) | d(x, y) = r\}$$

と定義し，体積 $V(x, r)$ を

$$V(x, r) := 1 + \sum_{k=1}^{r} S(x, k) = \sharp B(x, r)$$

と定義する．このとき次が成り立つ：

(a) 倍体積性：任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ と任意の $r > 0$ に対して

$$V(x, 2r) \leq C_V V(x, r). \tag{9.1}$$

(b) 体積増加性：ある $\alpha > 2$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ と任意の $R > r > 0$ に対して

$$\frac{V(x, R)}{V(x, r)} \geq \frac{1}{C_V} \Big(\frac{R}{r}\Big)^{\alpha}.$$

(c) グリーン関数の評価：任意の $x,\ y\ (x \neq y)$ に対して

$$C_G^{-1} \frac{d(x, y)^2}{V(x, d(x, y))} \leq G(x, y) \leq C_G \frac{d(x, y)^2}{V(x, d(x, y))}. \tag{9.2}$$

定理 9.1. 仮定 (A), (B) を満たしているとする．基準点 $o \in \mathbf{Z}^d$ を固定し，$|x| := d(x,o)$ とする．また，$|x|$ が十分大きくなる任意の x に対して

$$q(x) \geq \frac{b}{|x|^2}$$

が成り立つとする．このとき，ある正の定数 $b_0 = b_0(\alpha, C_V, C_G)$ が存在して，$b > b_0$ ならば $\overline{X}_t$ は再帰的となる．

注意 9.2. 定理 9.1 からも，有限個の点でのみ分裂が起こる場合には必ず非再帰になることが分かる．

定理 9.1 を証明する前に，(a), (b), (c) から導かれるいくつかの結果を述べる．

ラプラス作用素の固有値： 任意の有限集合 $U \subset \mathbf{Z}^d$ に対して，ディリクレ境界をもつ U におけるラプラス作用素の最小固有値を $\lambda_0(U)$ と書く．($\lambda(U)$ は，作用素 $L = \mathcal{L} + q$ の最小固有値であった事に注意.）仮定 (a) は，任意の球 $B(x,R)$ に対して

$$\lambda_0(B(x,R)) \leq \frac{C_\lambda}{R^2}$$

が成り立つことを保証している．

($\because$) テスト函数 φ を

$$\varphi(y) := \begin{cases} 1 & y \in B(x, \frac{R}{2}) \\ -\frac{2}{R}|y-x| + 2 & y \in B(x,R) \setminus B(x, \frac{R}{2}) \\ 0 & y \in \mathbf{Z}^d \setminus B(x,R) \end{cases}$$

と定める．すると，$d(y,z) = 1$（すなわち $y \sim z$）のとき $|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{2}{R}$ なので，

$$\lambda_0(B(x,R)) \leq \frac{\dfrac{a}{4d} \displaystyle\sum_{y,z \in B(x,R),\ y \sim z} |\varphi(y) - \varphi(z)|^2}{\displaystyle\sum_{y \in B(x,R)} \varphi(y)^2} \leq \frac{2a}{R^2} \frac{V(x,R)}{V(x,R/2)} \leq \frac{2aC_V}{R^2}$$

となる．

グリーン函数の和： (a) と (c) から，任意の球 $B(x,R)$ に対して

$$\sum_{y \in B(x,R)} G(x,y) \leq C_I R^2 \tag{9.3}$$

が従う．

(∵) (9.1) を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_{y\in B(x,R)\setminus\{x\}} G(x,y) &\le C_G \sum_{y\in B(x,R)\setminus\{x\}} \frac{d(x,y)^2}{V(x,d(x,y))}\\ &= C_G \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{y:2^{-(k+1)}R<d(x,y)\le 2^{-k}R} \frac{d(x,y)^2}{V(x,d(x,y))}\\ &\le C_G \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{y:2^{-(k+1)}R<d(x,y)\le 2^{-k}R} \frac{(2^{-k}R)^2}{V(x,2^{-(k+1)}R)}\\ &\le C_G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V(x,2^{-k}R)}{V(x,2^{-(k+1)}R)}\frac{R^2}{4^k}\end{aligned}$$

となり，(9.2) を用いると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{V(x,2^{-k}R)}{V(x,2^{-(k+1)}R)}\frac{R^2}{4^k} \le C_V R^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}C_V R^2$$

となるので，(9.3) が従う．

ハルナック不等式： [9, 命題 10.1] より，(a) と (c) から，$\mathbf{Z}^d$ 上の調和函数がハルナック不等式をみたすことが従う．すなわち，球 $B(x,R)$ を任意とし，u を $B(x,R)$ 上の非負値函数としたとき，$B(x,R)$ において $\mathcal{L}u=0$ であれば，

$$\sup_{B(x,R/2)} u \le H_0 \inf_{B(x,R/2)} u \tag{9.4}$$

が成り立つ．ここで，$H_0=H_0(C_V,C_G)$ であり，x,R には依らない．また，[7], [10] の結果として，(a), (b), (c) と(9.4) から，$B(x,R)$ における非負函数 u が

$$\mathcal{L}u-qu=0$$

を満たすならば，

$$\sup_{B(x,\delta R)} u \le H \inf_{B(x,\delta R)} u \tag{9.5}$$

が成り立つことが言える．ここで，q は一般の非負函数，$\delta=\delta(\alpha,C_V,C_G)\in(0,1/2)$，

$$H=H_0\exp\Big(C\sup_{x'\in B(x,R)}\sum_{y\in B(x,R)}G(x',y)q(y)\Big)$$

であり，$C=C(\alpha,C_V,C_G)>0$ である．この H は球 $B(x,R)$ の取り方による．

定理 9.1 の証明. $|x| \geq r_0 > 0$ なる全ての x に対して，$q(x) = b/|x|^2$ が成り立つと仮定しても一般性を失わない．$K \subset \mathbf{Z}^d$ を有限集合として，$\overline{X}_t$ が K-再帰的であることを示す.

$\overline{X}_t$ が K-非再帰的である（すなわち $v := \psi_K \not\equiv 1$）と仮定すると，補題 6.4 より，$\liminf_{x\to\infty} v(x) = 0$ である．よって，$u := 1 - \psi_K$ に対して

$$\limsup_{x\to\infty} u(x) = 1$$

となるので，$u(x_n) > 1/2,\ \ x_n \to \infty$ なる列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が存在する．$r_n := |x_n| = d(x_n, o), R_n := r_n/4$ とおく．今，

$$B(x_n, 2R_n) \cap (B(o, r_0) \cup K) = \emptyset$$

となる程に r_n が大きいと仮定することができる．すると，任意の $y \in B(x_n, R_n)$ に対して

$$q(y) = \frac{b}{|y|^2} \leq \frac{2b}{r_n^2}$$

が成り立つので，(9.3) を用いると，任意の $x' \in B(x_n, R_n)$ に対して

$$\sum_{y\in B(x_n,R_n)} G(x', y)q(y) \leq \frac{2b}{r_n^2} \sum_{y\in B(x_n,2R_n)} G(x', y) \leq \frac{2b}{r_n^2} C_I(2R_n)^2 = \frac{1}{2} C_I b \tag{9.6}$$

が従う．函数 u は $\mathbf{Z}^d \setminus K$ において等式(2.6) を満たす．すなわち

$$\mathcal{L}u - P(x, u)vu = 0 \tag{9.7}$$

を満たす．$\tilde{q}(x) := P(x, u)v$ とおくと，(9.7) は

$$\mathcal{L}u - \tilde{q}u = 0$$

と書ける．故に，ハルナック不等式(9.5) より

$$\begin{aligned}
\sup_{B(x_n,\delta R_n)} u &\leq H_0 \exp\Big(C \sup_{x'\in B(x_n,R_n)} \sum_{y\in B(x_n,R_n)} G(x', y)\tilde{q}(y)\Big) \inf_{B(x_n,\delta R_n)} u \\
&\leq H_0 \exp\Big(C \sup_{x'\in B(x_n,R_n)} \sum_{y\in B(x_n,R_n)} G(x', y)q(y)\Big) \inf_{B(x_n,\delta R_n)} u \\
&\leq H \inf_{B(x_n,\delta R_n)} u
\end{aligned}$$

が従う．ここで，H は n に依らない定数 $H := H_0 \exp(CC_I b)$ であり，この評価には $\tilde{q} \leq q$ であること及び(9.6) を用いている．今，$u(x_n) > 1/2$ なので

$$\sup_{B(x_n,\delta R_n)} u \geq \frac{1}{2}$$

であり，これより

$$\inf_{B(x_n,\delta R_n)} u \geq \frac{1}{2H} \tag{9.8}$$

を得る．(9.7) を

$$\mathcal{L}v + P(x,u)uv = 0$$

と書き直す．(2.5), (9.8) より，任意の $x \in B(x_n, \delta R_n)$ に対して

$$P(x,u(x))u(x) \geq \frac{1}{2HC_0}q(x) =: cq(x)$$

が成り立つので，

$$\mathcal{L}v + cqv \leq 0$$

が得られる．w を $B(x_n, \delta R_n)$ での $\mathcal{L}$ の最小固有函数とする．すなわち，w は $B(x_n, \delta R_n)$ において

$$\begin{cases} \mathcal{L}w + \lambda w = 0 \\ w|_{\partial B(x_n,\delta R_n)} = 0 \end{cases}$$

を満たすとする．ここで，$\lambda = \lambda_0(B(x_n, \delta R_n)) \leq C_\lambda(\delta R_n)^{-2}$ である．$B(x_n, \delta R_n)$ においで $w > 0$ と仮定しても構わない．すると，$B(x_n, \delta R_n)$ において

$$q(x) = \frac{b}{|x|^2} \geq \frac{b}{2r_n^2} = \frac{b}{32R_n^2}$$

であるから，

$$b \geq= \frac{32C_\lambda}{\delta^2 c} =: b_0$$

ならば

$$-\frac{\mathcal{L}w}{w} = \lambda \leq \frac{C_\lambda}{\delta^2 R_n^2} \leq \frac{C_\lambda}{\delta^2}\left(\frac{32q}{b}\right) \leq \left(\frac{32C_\lambda}{\delta^2 bc}\right)cq \leq cq \leq -\frac{\mathcal{L}v}{v}$$

が成り立つ．すると補題 2.3 より，

$$\sup_{\partial B(x_n,\delta R_n)} \frac{w}{v} \geq \sup_{B(x_n,\delta R_n)} \frac{w}{v} \tag{9.9}$$

が従う．今，(9.9) の右辺は正であるが，$w|_{\partial B(x_n,\delta R_n)} = 0$ より左辺は 0 であるから，矛盾．故に $\overline{X}_t$ は K-再帰的であり，主張が従う． ∎

参考文献

[1] S. Albeverio, L.V. Bogachev, Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations, Positivity, **4** (2000) 41-100.

[2] Z.-Q. Chen, Gaugeability and conditional gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002) 4639-4679.

[3] E.B. Dynkin, Branching particle systems and superprocesses, Ann. Probab., **19** (1991) 1157-1194.

[4] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[5] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **36** (1999) 135-249.

[6] A. Grigor'yan, W. Hansen, A Liouville property for Schrödinger operators, Math. Ann., **312** (1998) 659-716.

[7] A. Grigor'yan, W. Hansen, A Green function for a Schrödinger equation, in preparation.

[8] A. Grigor'yan, M. Kelbert, Recurrence and transience of branching diffusion processes on Riemannian manifolds, Ann. Probab., **31** (2003) 244-284.

[9] A. Grigor'yan, A. Telcs, Sub-Gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs, Duke Math. J., **109** (2001) no.3, 452-510.

[10] W. Hansen, Harnack inequalities for Schrödinger operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **28** (1999) 413-470.

[11] 丸山 俊晴, 分枝ブラウン運動の性質と Feynman-Kac 汎関数の可積分性, 2003 年度東北大学修士論文