Black-Scholesモデルの１つの拡張と無裁定条件

東北大学大学院 理学研究科 (数学専攻)
沼澤　洋平

はじめに

確率解析の応用分野である数理ファイナンスでは、目的に応じたいろいろな金融市場モデルが提唱されている。本修士論文では、Takaoka[T1] で提唱されている Black-Scholes モデルの拡張モデルを、金利から受ける影響を考慮するパラメータを入れることによって拡張し、元のモデルとの差について考察する。本修士論文では、次の**安全資産**B と**危険資産**S^α からなる金融市場モデルについて考える。

$$\begin{aligned} B_t &= e^{rt} \\ S_t^\alpha &= S_0 e^{\alpha r t}\int_0^\infty \exp\left\{\sigma(W_t+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\lambda(d\sigma) \end{aligned}$$

ただし、$\lambda \in \Lambda_2 := \{((0,\infty),\mathcal{B}((0,\infty)))$ 上の確率測度 $\mid \int_0^\infty \sigma^2\lambda(d\sigma) < \infty\}$ であり、$\{W_t\}$ はフィルター付き完備確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P};\mathcal{F}_t)$ 上の 1 次元標準ブラウン運動とし、満期は $T>0$ で、$t\in[0,T]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, r と C は正定数, S_0 は $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数とする。S^α は伊藤の公式より

$$dS_t^\alpha = (\alpha r + C\phi(t)S_t^\alpha)dt + \phi(t)S_t^\alpha dW_t \ \left(\phi(t) := \frac{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(W_t+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}\right)$$

と表示される。ただし、$\phi(t)S_t^\alpha dW_t$ は確率積分の表示である。$\alpha=1$ のとき、Takaoka[T1] で提唱されているモデルであり、λ が単位分布のとき、Black-Scholes モデルと呼ばれるものに対応する。Takaoka[T1] で提唱されているモデルの特徴としては、λ によって危険資産の性質が異なる点であり、特に λ の台の下限 m が $m=0$、または λ の台の上限 M が $M=\infty$ のとき、Black-Scholes モデルとの相違点が多い。

Black-Scholes モデルや Takaoka[T1] で提唱されているモデルの良い点は、大きく二つある。一つ目は**裁定機会が存在しない**ことである。裁定機会が存在するとは、「元手 0 から取引を始めて、確率正で正の利益を得ることが出来る」ということである。二つ目は**リスク中立確率の存在**である。$\theta_\alpha(t) := C - \frac{r(1-\alpha)}{\phi(t)}$ とすれば、S^α は

$$dS_t^\alpha = rS_t^\alpha dt + \phi(t)S_t^\alpha d\left(W_t + \int_0^t \theta_\alpha(s)ds\right) \tag{1}$$

と表示できる。ここで、$W_t^\alpha := W_t + \int_0^t \theta_\alpha(s)ds$ をブラウン運動にするような確率測度 P^α の存在を仮定する。(1) の表示から、P^α の下で危険資産の成長率は安全資産の成長率と同じと解釈できるので、金融市場はリスク中立であると見なせる。この確

率測度 P^α をリスク中立確率と呼ぶ。数理ファイナンスでは、「金融派生商品の価格は、リスク中立確率の下で計算したものが、元の確率の下で計算したものと等しい」という普遍原理がある。実際、リスク中立確率の下で計算する方がマルチンゲールの理論など確率過程の性質が生きてくる。また、裁定機会が存在しないこととリスク中立確率の存在することは、ほぼ同値であることが知られている。よって、筆者の拡張においても、この性質が保存されるか否かを調べることが、数学の出発点として最も重要であり、本修士論文の主結果はこれに関するものである。

この二つの性質が成り立つためには、$\theta_\alpha(t)$ の性質が重要である。$\alpha = 1$ または λ が単位分布の場合は、$\theta_\alpha(t)$ は t に依らない定数になる。しかし $\alpha \neq 1$ の場合は、$\theta_\alpha(t)$ が t に依存する関数になり、特に λ の台の下限が 0 の時は非有界になる。これが筆者のモデルの特徴である。このことが重要なのは、一般の金融市場モデルで、$\theta_\alpha(t)$ に対応する**市場リスク価格過程**が非有界の場合、必ずしも上述の二つの性質が成り立つとは限らないと知られているからである。

リスク中立確率の存在を保証するのが **Girsanov の定理**である。Girsanov の定理によれば、$Z^\alpha(t) := \exp\{-\int_0^t \theta_\alpha(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_\alpha(s)^2 ds\}$ が $(\{\mathcal{F}_t\}$-$)$ マルチンゲールならば、確率測度 $\mathrm{P}^\alpha(A) := \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z^\alpha(T)],\ A \in \mathcal{F}_T$ が構成でき、$W_t^\alpha := W_t + \int_0^t \theta_\alpha(s)ds$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathrm{P}^\alpha)$ 上のブラウン運動になる。確率過程 $\{X_t\}$ が $(\{\mathcal{F}_t\}$-$)$ マルチンゲールとは、X_t が $\mathcal{F}_t$-可測かつ可積分で、$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad (0 \leq s \leq t)$ が成り立つことである。Girsanov の定理より、リスク中立確率が存在することを示すには、$\{Z^\alpha(t)\}$ がマルチンゲールになることを確認すればよいが、伊藤の公式と Fatou の補題より $\{Z^\alpha(t)\}$ は $\mathrm{E}[Z^\alpha(t)|\mathcal{F}_s] \leq Z^\alpha(s) \quad (0 \leq s \leq t)$ を満たすことが分かる。よって $\{Z^\alpha(t)\}$ がマルチンゲールになることを示すには、$\mathrm{E}[Z^\alpha(t)]$ が時間に依らない定数になることを示せばよい。$\alpha = 1$ または λ が単位分布の時は、この事を直接確認できる。しかし、$\alpha \neq 1$ の場合は、$\mathrm{E}[Z^\alpha(t)]$ を直接計算するのは困難である。本修士論文では **Novikov の条件**(Karatzas and Shreve [KS1] 3.5.13) を用いて $\{Z^\alpha(t)\}$ がマルチンゲールになる十分条件を求めた。

定理 0.1. $\lambda \in \Lambda_2$ の台の下限を m とする。
(i)$m > 0$ ならば、$\{Z^\alpha(t)\}$ はマルチンゲールになる。
(ii)$m = 0$ とする。正定数 $y_0 = y_0(\lambda),\ D = D(T)$ が存在して、$y > y_0$ に対して

$$\frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-y + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} > \frac{D}{y} \tag{2}$$

が成り立つならば、$\{Z^\alpha(t)\}$ はマルチンゲールになる。

本修士論文では、$m = 0$ である全ての $\lambda \in \Lambda_2$ に対して (2) の条件が成り立つことは示せなかったが、例えば、λ がルベーグ測度に関する密度 ρ を持ち、ρ が原点近傍で多項式程度の増大度を持つならば (2) の条件が成り立つことが示せた。

(i) と (ii) の違いは以下の点からも興味深い。

定理 0.2. $\lambda \in \Lambda_2$ の台の下限を m とする。

$m > 0$ のとき、$t > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{P}\Big(\log \frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x\Big)}{\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\Big\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\Big\} dy} = \begin{cases} 0 & \eta > m^2 t \\ \infty & 0 < \eta < m^2 t \end{cases} \tag{3}$$

が成り立つ。また、$m = 0$ かつ (2) を満たすとき、$t > 0,\ \eta > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して (3) の極限は 0 になる。

これは、$m = 0$ かつ (2) を満たす場合は、$\log \frac{S_t^\alpha}{S_0}$ の分布の左側の尾が、正規分布の左側の尾より真に小さいことを表している。この性質は、Black-Scholes モデルには現れない性質である。

以上の議論の中では、α の大小が金融市場にどのような影響を与えているかは現れなかったが、本修士論文では**最適投資問題**(Karatzas and Shreve [KS2] 3.5.3) の中にその影響が現れることが示せた。最適投資問題とは、資産を分散投資して、満期での期待効用を最大にするような戦略を探すことである。つまり、

$$\begin{aligned} X^{x,\pi}(t) &= xB_t + B_t \int_0^t \frac{1}{B_u} \pi(u)\phi(u) dW_u^\alpha \\ \mathcal{A}'(x) &= \{\pi;\text{適当な可積分性を持つ発展的可測な確率過程},\ X^{x,\pi}(t) \geq 0,\ t \in [0,T] \text{ a.s}\} \\ U &: [0,\infty) \to [-\infty,\infty);\text{適当な凹関数} \\ V(x) &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}'(x)} E[U(X^{x,\pi}(T))] \end{aligned} \tag{4}$$

とした時に、(4) の右辺の上限を達成する $\pi = \tilde{\pi}$ を探すことである。π は S^α に投資している資金の総量、$X^{x,\pi}$ を初期資産 x, 戦略 π とした時の資金の総量と解釈する。本修士論文では以下のような結果が得られた。

定理 0.3. $\alpha = 1$ のとき、任意の $\lambda \in \Lambda := \{((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)))$ 上の確率測度 $\mid \int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty\}$ に対して、$\tilde{\pi} > 0$ となる。また、$\alpha < 1$ のときは、$\tilde{\pi} < 0$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。

このことは、投資家にとって、$\alpha < 1$ のときは、安全資産に比べて、危険資産が魅力的でない場合があることを示している。

最後に、本修士論文の構成を紹介する。第 1 章では、本論文の中で中心的な役割を果たすマルチンゲールや Girsanov の定理など、確率解析の手法について述べる。第 2 章では、本論文で論じる数理ファイナンスの枠組みを導入し、取引や無裁定などの概念を確率論を用いて数学的に定義する。第 3 章では、Takaoka[T1] の拡張モデルを導入し、リスク中立確率の存在などの主結果について述べる。第 4 章では最適投資問題を定式化し、第 3 章で導入したモデルに対して最適投資問題を考える。第 5 章では確率論の基礎について補足する。

謝辞

本修士論文を書き上げるにあたり、指導教官の服部 哲弥先生には、四年セミナーや自主ゼミ、出張旅費の援助なども含め、多大な御指導を頂きました。また、一橋大学の高岡 浩一郎先生には、集中講義、研究集会等を通じて、ファイナンスの観点から多大な御指導を頂きました。そして東北確率論セミナーを通じ、竹田 雅好先生、針谷 祐先生には貴重な御意見を頂きました。この場を借りて厚く御礼申し上げます。また、東北確率論セミナーの先輩である塩沢 裕一さん、土田 兼治さん、田原 喜宏さん、渡部 金一郎さんにも有益な助言を多数頂きました。深く感謝いたします。同じ服部研究室の佐々木 拓郎君には、自主ゼミ、セミナーに付き合って頂き、心からお礼を申し上げます。

第1章　準備

この章では、第2章以降に必要な概念を定義する。本章では $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ でフィルター付き確率空間を表し、フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ は右連続 ($\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$) であり、$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ に含まれる零集合を全て含むと仮定する。E で P の期待値を表す。また、断らない限り確率過程は実数値確率過程とし、連続時間で考える。

1.1　マルチンゲール

まず、マルチンゲールと呼ばれる確率過程について述べることにする。

定義 1.1. 確率過程 $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の**マルチンゲール (martingale)** であるとは次を満たすことである。

(i)　X は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合 (定義 5.5) である。

(ii)　任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{E}[|X_t|] < \infty$ である。

(iii)　$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ が任意の $t \geq s$ について成り立つ。

また、確率過程 X が (i), (ii) と、

(iii)'　$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ が任意の $t \geq s$ について成り立つ。

を満たすとき、**劣マルチンゲール (submartingale)**、

(iii)"　$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ が任意の $t \geq s$ について成り立つ。

を満たすとき、**優マルチンゲール (supermartingale)** という。

マルチンゲールの大きな特徴としては、期待値が時間に依らない定数になることである。マルチンゲールの重要な性質をいくつか紹介する。

定理 1.2. ([KS1]1.3.15 Theorem) $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲールで、$C := \sup_{t\geq 0} \mathrm{E}[X_t^+] < \infty$ を満たすものとする。このとき、$X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ がほとんど確実に存在し、かつ $\mathrm{E}[|X_\infty|] < \infty$ が成り立つ。

定理 1.2 から次が言える。

系 1.3. ([KS1] 1.3.16 Problem) $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P};\mathcal{F}_t)$ 上の右連続な非負優マルチンゲールとする。このとき $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ がほとんど確実に存在し、$t=\infty$ も込めて優マルチンゲールになる。

次に、任意抽出定理について述べる。

定理 1.4. (任意抽出定理 (Optional Sampling Theorem))([KS1] 1.3.22 Theorem) $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P};\mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲールで、$X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ が存在するものとする。この時、フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ に関する二つの停止時刻 (定義 5.6)$S\leq T$ に対して、ほとんど確実に

$$\mathrm{E}(X_T|\mathcal{F}_S)\geq X_S$$

が成り立つ。ただし $\mathcal{F}_S$ は定義 5.9 で定義されるものである。

系 1.3 と任意抽出定理から次が言える。

命題 1.5. ([KS1] 1.3.29 Problem) $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P};\mathcal{F}_t)$ 上の連続な非負優マルチンゲールとし、$T:=\inf\{t\geq 0; X_t=0\}$ とする。このとき、$\{T<\infty\}$ 上で

$$X_{T+t}=0,\quad 0\leq t<\infty$$

がほとんど確実に成り立つ。

命題 1.5 は、後に最適投資問題を定式化する上で重要になる。次にマルチンゲールの概念を弱めた局所マルチンゲールについて述べる。

定義 1.6. 確率過程 $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P};\mathcal{F}_t)$ 上の**局所マルチンゲール (local martingale)** であるとは、停止時刻の増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} T_n=\infty]=1$ となるものが存在し、任意の $n\geq 1$ に対して、$\{X_t^{(n)}\}_{t\geq 0} := \{X_{t\wedge T_n}\}_{t\geq 0}$ がマルチンゲールになることである。

注意 1.7. マルチンゲールならば局所マルチンゲールであるが、逆は一般には成り立たない。

局所マルチンゲールの簡単な性質を挙げる。

命題 1.8. $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を下に有界な局所マルチンゲールとする。このとき、X は優マルチンゲールになる。

証明. X は局所マルチンゲールより、停止時刻の増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} T_n=\infty]=1$ となるものが存在し、任意の $n\geq 1$ に対して、$\{X_t^{(n)}\}_{t\geq 0} := \{X_{t\wedge T_n}\}_{t\geq 0}$ がマルチンゲールになる。

$t\geq s$ とすると、ファトゥー (Fatou) の補題より

$$\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s]=\mathrm{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_{t\wedge T_n}\middle|\mathcal{F}_s\right]\leq \liminf_{n\to\infty}\mathrm{E}[X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s]=\liminf_{n\to\infty} X_{s\wedge T_n}=X_s$$

となる。 ∎

次に、二次変分について述べる。特に断らない限り、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程について考える。

$\mathcal{M}_2^c := \{X = \{X_t\}_{t \geq 0}$;連続かつ 2 乗可積分なマルチンゲールで、$X_0 = 0$ a.s$\}$

とする。$X \in \mathcal{M}_2^c$ とすると、イエンセン (Jensen) の不等式 (命題 5.8) より、X^2 は非負劣マルチンゲールになる。よってドゥーブ-メイヤー (Doob-Meyer) 分解 (定理 5.16) により、

$$X_t^2 = M_t + A_t,\ 0 \leq t < \infty$$

と表せる。ここで、$M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ は連続なマルチンゲール、$A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ は自然な増加過程 (定義 5.13, 定義 5.14) である。この分解の一意性から X の二次変分 $\langle X \rangle$ を（区別できない (定義 5.1) という意味で）一意に決めることができる。

定義 1.9. $X \in \mathcal{M}_2^c$ とする。このとき X に対する **2 次変分 (quadratic variation)** $\langle X \rangle$ とは、自然な増加過程で $\langle X \rangle_0 = 0$ を満たし、かつ $X^2 - \langle X \rangle$ がマルチンゲールとなるものである。

$X,\ Y \in \mathcal{M}_2^c$ とすると、2 次変分の定義より、$(X+Y)^2 - \langle X+Y \rangle, (X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ はそれぞれマルチンゲールになる。よって、その差 $4XY - [\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle]$ もマルチンゲールになる。故に、二つの確率過程 $X,\ Y$ に対する 2 次変分を次のように定める。

定義 1.10. $X,\ Y \in \mathcal{M}_2^c$ とする。このとき $X,\ Y$ に対する 2 次変分 $\langle X, Y \rangle$ を

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t],\ 0 \leq t < \infty$$

とする。

また、$X,\ Y \in \mathcal{M}^{c,loc} := \{X = \{X\}_{t \geq 0}$;連続な局所マルチンゲールで、$X_0 = 0$ a.s$\}$ に対しても、以下の命題から 2 次変分 $\langle X \rangle,\ \langle X, Y \rangle$ が定義できる。

命題 1.11. ([KS1] 1.5.17 Problem) $X,\ Y \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする。このとき、以下の条件を満たす確率過程 $\langle X, Y \rangle$ が一意に決まる。これを X と Y の 2 次変分と呼ぶ。

(i) $\langle X, Y \rangle_0 = 0$

(ii) $\langle X, Y \rangle$ は連続な増加過程である。

(iii) $XY - \langle X, Y \rangle \in \mathcal{M}^{c,loc}$

注意 1.12. ([KS1] 1.5.7 Problem, 1.5.21 Exercise) $X,\ Y,\ Z \in \mathcal{M}^{c,loc}$かつ$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\langle X, X \rangle = \langle X \rangle,\ \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle,\ \langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$$

が成り立つ。さらに $X,\ Y$ の少なくとも一方がほとんど確実に有界変動ならば、ほとんど確実に $\langle X, Y \rangle = 0$ である。

次に半マルチンゲールについて述べる。半マルチンゲールは、局所マルチンゲールを更に一般化したものである。

定義 1.13. 確率過程 $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の連続な**半マルチンゲール (semimartingale)** であるとは、X が $\{\mathcal{F}_t\}$-適合で、ほとんど確実に次の分解を持つことである。

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,\ 0 \leq t < \infty \tag{1.1}$$

ここで $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ は $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$、$A = \{A_t\}_{t\geq 0}$ は $A_0 = 0$ を満たす連続な増加過程であり、任意の $t \geq 0$ に対して $[0, t]$ 上有界変動であるものとする。

さらに上の分解を持つ連続な半マルチンゲール X に対して、２次変分 $\langle X \rangle$ を

$$\langle X \rangle_t := \langle M \rangle_t$$

とする。

注意 1.14. X が連続な半マルチンゲールのとき、分解は（区別できないという意味で）一意に定まる。

1.2 ブラウン運動と確率積分

この節では、本修士論文で中心的な役割を果たすブラウン運動と確率積分を定義し、その応用として、伊藤の公式とマルチンゲール表現定理について述べる。

定義 1.15. 実数値確率過程 $W = \{W(t)\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の**１次元標準ブラウン運動 (Brownian motion)** であるとは次を満たすことである。

(i) 非負実数列 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して、$W(t_1) - W(t_0), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ が独立である。

(ii) $s,\ t \geq 0,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して、

$$\mathrm{P}(W(s+t) - W(s) \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) ds$$

が成り立つ。

(iii) ほとんど確実に $W(0) = 0$ であり、ほとんど確実に $W(t)$ は連続である。

また初期分布に関する仮定を弱めたものを単に (１次元) ブラウン運動と呼ぶことにする。

１次元ブラウン運動は、2 次変分の定義より、$\langle W \rangle_t = t$ であることが分かるが、次の定理よりその逆も言える。

定理 1.16. ([KS1] 3.3.16 Theorem) $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の１次元確率過程とし、連続で $\{\mathcal{F}_t\}$-適合であると仮定する。この時、$M_t := X_t - X_0$ が連続な局所マルチンゲールであり、$\langle M \rangle_t = t$ を満たすならば、X は１次元ブラウン運動である。

1.1 節ではフィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続であることを仮定したが、１次元標準ブラウン運動 W に対して、$\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\}$ とすると、$W(t)$ は $\mathcal{F}^W(t)$-可測であるが、$\{\mathcal{F}^W(t)\}_{t\geq 0}$ は右連続ではない ([KS1] 2.7.1 Problem)。しかし、次のようなフィルターの**拡大 (augmentation)** を考えると、フィルターは右連続であるように拡張できる。

命題 1.17. ([KS1] 2.7 Section) W を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の１次元標準ブラウン運動、$T > 0$、$\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\}$、$\mathcal{N}$ を $\mathcal{F}^W(T)$ 上の零集合の族とする。このとき、$\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}^W(t) \cup \mathcal{N}\},\ t \in [0, T]$ とすると、$\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ は右連続なフィルターになる。

次に確率積分という概念を導入する。目標は $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ と

$$X \in \mathcal{P}^*(M) \quad := \quad \{X = \{X_t\}_{t\geq 0}; \text{発展的可測な確率過程で、} \quad \text{ほとんど確実に} \int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty,\ 0 \leq t < \infty\}$$

に対して、確率積分 $\int_0^t X_s dM_s$ を定義することである。確率積分は、それ自体が確率過程であり、特に（局所）マルチンゲールになるという点で非常に重要である。以下、いくつかの段階に分けて定義する。断らない限り、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程を考える。

定義 1.18. 確率過程 X が

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),\ 0 \leq t < \infty$$

という形に書けるとき、X を**単純 (simple)** という。ただし、$\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $t_0 = 0$ かつ $t_n \to \infty$ を満たす単調増加な実数列、$\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は定数 $C > 0$ に対して、ほとんど確実に $\sup_{n\geq 0} |\xi_n| \leq C$ を満たし、ξ_n が $\mathcal{F}_{t_n}$-可測である確率変数の列である。また、単純過程の集合を $\mathcal{L}_0$ とする。
X が単純の時、**確率積分**$(X \cdot M)_t := \int_0^t X_s dM_s$ を

$$\int_0^t X_s dM_s = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i})$$

と定義する。

更に広いクラスに対して確率積分を定義する。

定義 1.19. $M \in \mathcal{M}_2^c$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(M) \ &:= \ \{X = \{X\}_{t\geq 0}; \text{発展的可測な確率過程で、}\\ &\qquad \text{任意の } T>0 \text{ に対して } [X]_T := (\mathrm{E}\int_0^T X_t^2 d\langle M\rangle_t)^{\frac{1}{2}} < \infty\}\end{aligned}$$

とする。ただし、任意の $T>0$ に対して $[X-Y]_T = 0$ の時は、X と Y を同一視する。また $\mathcal{L}^*(M)$ 上の距離 $[\cdot]$ を

$$[X-Y] := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge [X-Y]_n)$$

と定める。

$M \in \mathcal{M}_2^c$ と $X \in \mathcal{L}^*(M)$ に対して確率積分 $\int_0^t X_s dM_s$ を定義するが、そのためにいくつか準備する。

命題 1.20. ([KS1] 1.5.23 Proposition) $M \in \mathcal{M}_2^c$ とする。$t \geq 0$ に対して、$\|M\|_t := \sqrt{\mathrm{E}(X_t^2)}$ とし、$\|M\| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \|M\|_n)$ とする。この時、$\|\cdot\|$ の下で $\mathcal{M}_2^c$ は完備距離空間になる。

命題 1.21. ([KS1] 3.2 Section B) $X,\ Y \in \mathcal{L}_0,\ M \in \mathcal{M}_2^c$ に対して、以下が成り立つ。

$$\mathrm{E}[(X\cdot M)_t|\mathcal{F}_s] = (X\cdot M)_s \tag{1.2}$$

$$\|X\cdot M\| = [X] \tag{1.3}$$

また、任意の $t \geq 0$ に対して、ほとんど確実に

$$\int_0^t (\alpha X_u + \beta Y_u)dM_u = \alpha\int_0^t X_u dM_u + \beta\int_0^t Y_u dM_u \tag{1.4}$$

$$\int_0^t X_u d(\alpha M_u + \beta N_u) = \alpha\int_0^t X_u dM_u + \beta\int_0^t X_u dN_u \tag{1.5}$$

$$\langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M,N\rangle_u \tag{1.6}$$

ただし、$\|\cdot\|$ は命題 1.20 で定義した距離である。

以下の確率積分の定義の拡張は、以上の性質を保つ。

命題 1.22. ([KS1] 3.2.8 Proposition) $M \in \mathcal{M}_2^c$ とすると、$\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^*(M)$ で稠密である。

以上を用いて、$M \in \mathcal{M}_2^c$ と $X \in \mathcal{L}^*(M)$ に対して確率積分 $\int_0^t X_s dM_s$ を定義する。命題 1.22 から $X \in \mathcal{L}^*(M)$ に対して、$\{X^{(n)}\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}_0$ が存在して、

$$[X^{(n)} - X] \to 0 \ as \ n \to \infty$$

と出来る。(1.3), (1.4) より、

$$\|X^{(n)} \cdot M - X^{(m)} \cdot M\| = \|(X^{(n)} - X^{(m)}) \cdot M\| = [X^{(n)} - X^{(m)}] \to 0 \ as \ n, m \to \infty$$

であるから、(1.2) と合わせて、$\{X^{(n)} \cdot M\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_2^c$ はコーシー列になるが、命題 1.20 より $\mathcal{M}_2^c$ は完備距離空間である。よって、$I \in \mathcal{M}_2^c$ が存在して、

$$\|I - X^{(n)} \cdot M\| \to 0 \ as \ n \to \infty$$

となる。この I を $M \in \mathcal{M}_2^c$ と $X \in \mathcal{L}^*(M)$ に対する**確率積分**$X \cdot M$ と定義する。

命題 1.23. ([KS1] 3.2.10 Proposition) $M, \ N \in \mathcal{M}_2^c, \ X, \ Y \in \mathcal{L}^*(M) \cap \mathcal{L}^*(N)$ とする。この時、(1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) が成り立つ。

更に次が成り立つ。

命題 1.24. (**国田-渡辺の不等式**)([KS1] 3.2.14 Proposition)
$M, \ N \in \mathcal{M}_2^c, \ X \in \mathcal{L}^*(M), \ Y \in \mathcal{L}^*(N)$ とする。この時、ほとんど確実に

$$\int_0^t |X_s Y_s| d\check{\xi}_s \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}, \ 0 \leq t < \infty$$

が成り立つ。ただし、$\check{\xi}_s$ は確率過程 $\xi = \langle M, N\rangle$ の $[0, s]$ 上での全変動である。

次に $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ と $X \in \mathcal{P}^*(M)$ に対して、確率積分を定義する。M_t が連続であること考慮すると、停止時刻の増大列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} S_n = \infty] = 1$ となるものが存在し、任意の $n \geq 1$ に対して、$\{M_{t\wedge S_n}\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ となる。更に $X \in \mathcal{P}^*(M)$ に対して、停止時刻の列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$R_n = n \wedge \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n\right\}$$

で定めると、$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ は増大列で、$\mathrm{P}[\lim_{n\to\infty} R_n = \infty] = 1$ が成り立つ。ここで、

$$T_n := R_n \wedge S_n, \ M_t^{(n)} := M_{t\wedge T_n}, \ X_t^{(n)} := X_t \mathbf{1}_{\{T_n > t\}}$$

とすれば、$M^{(n)} \in \mathcal{M}_2^c, \ \ X^{(n)} \in \mathcal{L}^*(M^{(n)})$ であり、確率積分 $X^{(n)} \cdot M^{(n)}$ が定義できる。よって**確率積分**$X \cdot M$ を

$$\int_0^{\mathrm{t}} X_u dM_u = \int_0^t X_u^{(n)} dM_u^{(n)}; \ \ 0 \leq t \leq T_n$$

で定義する。

また、(1.1) の分解をもつ半マルチンゲール X と $Y \in \mathcal{P}^*(M)$ に対して、確率積分を

$$\int_0^t Y_s dX_s := \int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t Y_s dA_s$$

と定義する。ただし、右辺第 1 項は確率積分、右辺第 2 項は $\omega \in \Omega$ を固定するごとの積分で定義する。

命題 1.25. ([KS1] 3.2 Section D) $M,\ N \in \mathcal{M}^{c,loc},\ X,\ Y \in \mathcal{P}^*(M) \cap \mathcal{P}^*(N)$ とする。この時、$X \cdot M,\ Y \cdot N$ は局所マルチンゲールであり、(1.4), (1.5), (1.6) が成り立つ。

次に確率積分の応用である伊藤の公式について述べる。

定理 1.26. (伊藤の公式)([KS1] 3.3.3 Theorem) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f \in C^2$、X を (1.1) の分解を持つ連続な半マルチンゲールとする。このとき、ほとんど確実に

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{d}{dx} f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} f(X_s) d\langle X_s \rangle,\ 0 \le t < \infty$$

が成り立つ。

伊藤の公式は「X が半マルチンゲールならば、適当な関数 f に対して $f(X)$ も半マルチンゲールであり、その分解が確率積分で書ける」ということを意味している。伊藤の公式は次の形に拡張できる。

定理 1.27. ([KS1] 3.3.6 Theorem) $\{X_t\}_{t \ge 0}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の d 次元確率過程とし、さらに各成分が (1.1) の分解を持つ連続な半マルチンゲールであることを仮定する。このとき、ほとんど確実に

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s) d\left\langle X^{(i)}, X^{(j)} \right\rangle_s,\ 0 \le t < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

伊藤の公式から、部分積分の公式が導かれる。

定理 1.28. (部分積分の公式)([KS1] 3.3.12 Problem) $X,\ Y$ を (1.1) の分解を持つ連続な半マルチンゲールとする。このとき、ほとんど確実に

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X, Y \rangle_t,\ 0 \le t < \infty$$

が成り立つ。

最後に確率積分の応用として、マルチンゲールの表現定理について述べる。この定理は、最適投資問題 (第 4 章) の解を求めるときに、非常に重要である。

定理 1.29. (**マルチンゲールの表現定理**)([KS1] 3.4.15 Theorem, 3.4.16 Problem) W を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動とし、フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ はブラウン運動から生成されたものを拡大したものとする。また、M は $M_0 = 0$ a.s で、右連続で左極限を持つ局所マルチンゲールであると仮定する。この時、$M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ であり、M に対して、$Y \in \mathcal{P}^*(M)$ が存在して、

$$M_t = \int_0^t Y_s dW_s \tag{1.7}$$

と表現される。また、$\tilde{Y} \in \mathcal{P}^*(M)$ が存在して、(1.7) を満たすならば、ほとんど確実に、

$$\int_0^\infty |\tilde{Y}_s - Y_s| ds = 0$$

である。

1.3 ギルザノフの定理

次にギルザノフの定理について述べる。この節では、W を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の 1 次元標準ブラウン運動、フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ は W から生成されたものを拡大したものとする。数理ファイナンスにおいて、ギルザノフの定理は「リスクの中立化」という観点から非常に重要である。

まず、発展的可測で任意の $T \geq 0$ に対して、$\mathrm{P}[\int_0^T X_t^2 dt < \infty] = 1$ を満たす確率過程 $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ を考える。このとき、

$$Z_t(X) := \exp\left[\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right]$$

が定義でき、さらに伊藤の公式より

$$Z_t(X) = 1 + \int_0^t Z_s(X) X_s dW_s \tag{1.8}$$

が成り立つ。よって $Z(X) = \{Z_t(X)\}_{t \geq 0}$ は $Z_0(X) = 1$ を満たす連続な局所マルチンゲールになる。ここでもし、$Z(X)$ が連続なマルチンゲールになるならば、$\mathcal{F}_T (0 \leq T < \infty)$ 上の確率測度 $\tilde{\mathrm{P}}_T$ を

$$\tilde{\mathrm{P}}_T(A) := \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z_T(X)], \ A \in \mathcal{F}_T$$

で定めることができ,$Z(X)$ がマルチンゲールであることより、確率測度の族 $\{\tilde{\mathrm{P}}_T; 0 \leq T < \infty\}$ は

$$\tilde{\mathrm{P}}_T(A) = \tilde{\mathrm{P}}_t(A), \ A \in \mathcal{F}_t, \ 0 \leq t \leq T \tag{1.9}$$

を満たす。このようにして確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathrm{P}}_T)$ を構成することにより、以下の事が言える。

定理 1.30. (ギルザノフ (Girsanov) の定理)([KS1] 3.5.1 Theorem) $Z(X)$ が連続なマルチンゲールであると仮定する。このとき、$\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t\geq 0}$ を、

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t X_s ds,\ 0 \leq t \leq T$$

と定めると、$\tilde{W}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathrm{P}}_T; \{\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\}_{0\leq t\leq T})$ 上の１次元ブラウン運動になる。

ギルザノフの定理を証明するために、いくつか準備する。

補題 1.31. (ベイズ (Bays) の公式)([KS1] 3.5.3 Lemma) $0 \leq T < \infty$ を固定し、$Z(X)$ はマルチンゲールであると仮定する。この時、$0 \leq s \leq t \leq T$ かつ、Y が $\mathcal{F}_t$-可測な確率変数で $\tilde{\mathrm{E}}_T|Y| < \infty$ ならば、

$$\tilde{\mathrm{E}}_T[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s(X)} \mathrm{E}[YZ_t(X)|\mathcal{F}_s]$$

が P と $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下でほとんど確実に成り立つ。ただし、$\tilde{\mathrm{E}}_T$ は $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下での期待値である。

証明. (1.9) と $\mathbf{1}_A$ は $\mathcal{F}_s$-可測だから、任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して、

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{E}}_T\left[\mathbf{1}_A \frac{1}{Z_s(X)} \mathrm{E}[YZ_t(X)|\mathcal{F}_s]\right] &= \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \mathrm{E}[YZ_t(X)|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathrm{E}[\mathbf{1}_A YZ_t(X)]\ (\because \mathbf{1}_A \text{ は } \mathcal{F}_s\text{-可測}) \\
&= \tilde{\mathrm{E}}_T[\mathbf{1}_A Y]
\end{aligned}$$

が成り立つので、条件付き期待値の定義から示せた。 ▮

命題 1.32. ([KS1] 3.5.4 Proposition) $T \geq 0$ を固定し、$Z(X)$ はマルチンゲールであると仮定する。この時、$M \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$ ならば、

$$\tilde{M}_t := M_t - \int_0^t X_s d\langle M, W\rangle_s,\ 0 \leq t \leq T$$

は、$\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ となる。更に、$N \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$ とし、

$$\tilde{N}_t := N_t - \int_0^t X_s d\langle N, W\rangle_s,\ 0 \leq t \leq T$$

と定めれば、

$$\left\langle \tilde{M}, \tilde{N} \right\rangle = \langle M, N\rangle,\ 0 \leq t \leq T \tag{1.10}$$

が P と $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下で、ほとんど確実に成り立つ。ただし、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_T^{c,loc} &:= \{M=\{M\}_{0\le t\le T} | (\Omega, \mathcal{F}_T, \mathrm{P}; F_t) \text{ 上の連続な局所マルチンゲールで、} \mathrm{P}[M_0=0]=1\} \\
\tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc} &:= \{M=\{M\}_{0\le t\le T} | (\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathrm{P}}_T; F_t) \text{ 上の連続な局所マルチンゲールで、} \tilde{\mathrm{P}}_T[M_0=0]=1\}
\end{aligned}
$$

とする。

注意 1.33. 注意 1.12 より、(1.10) は P の下では成り立つ。

証明. 局所化の手法を用いることで、$M,\ N,\ \langle M\rangle,\ \langle N\rangle,\ Z(X)$ は有界であると仮定してよい。さらに、$\int_0^t X_s^2 ds$ も (ω, t) に関して有界であると仮定してよい。また、国田-渡辺の不等式より、

$$
\left|\int_0^t X_s^2 d\langle M, W\rangle_s\right|^2 \le \langle M\rangle_t \int_0^t X_s^2 ds
$$

だから、$\tilde{M}$ も有界となる。部分積分の公式より

$$
\begin{aligned}
Z_t(X)\tilde{M} &= \int_0^t Z_s(X) d\tilde{M}_s + \int_0^t \tilde{M}_s dZ_s(X) + \left\langle Z(X), \tilde{M}\right\rangle_t \\
&= \int_0^t Z_s(X) dM_s + \int_0^t \tilde{M} dZ_s(X) \\
&\quad \left(\because \mathrm{P} \text{ の下で、} \left\langle Z(X), \tilde{M}\right\rangle_t = \langle Z(X), M\rangle_t = \int_0^t X_s Z_s(X) d\langle M, W\rangle_s\right)
\end{aligned}
$$

となる。よって命題 1.23 より、$Z(X)\tilde{M}$ は P の下でマルチンゲールになる。故に、$0\le s\le t\le T$ とすれば、ベイズの公式より

$$
\tilde{\mathrm{E}}_T[\tilde{M}_t|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s(X)} \mathrm{E}[Z_t(X)\tilde{M}_t|\mathcal{F}_s] = \tilde{M}_s
$$

が P と $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下でほとんど確実に成り立つ、すなわち $\tilde{M}\in\tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ となる。また、部分積分の公式より

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t &= \int_0^t \tilde{M}_s d\tilde{N}_s + \int_0^t \tilde{N}_s d\tilde{M}_s + \left\langle \tilde{M}, \tilde{N}\right\rangle_t - \langle M, N\rangle_t \\
&= \int_0^t \tilde{M}_s dN_s - \int_0^t \tilde{M}_s X_s d\langle N, W\rangle_s + \int_0^t \tilde{N}_s dM_s - \int_0^t \tilde{N}_s X_s d\langle M, W\rangle_s \\
&\quad \left(\because \mathrm{P} \text{ の下で } \left\langle \tilde{M}, \tilde{N}\right\rangle_t = \langle M, N\rangle_t\right)
\end{aligned}
$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} Z_t(X)\left(\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t\right) &= \int_0^t Z_s(X)d\left(\tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right) + \int_0^t \left(\tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right)dZ_s(X) \\ &\quad + \left\langle Z(X), \tilde{M}\tilde{N} - \langle M, N\rangle \right\rangle_t \\ &= \int_0^t Z_s(X)\tilde{M}_s dN_s + \int_0^t Z_s(X)\tilde{N}_s dM_s \\ &\quad + \int_0^t \left(\tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s\right)dZ_s(X) \end{aligned}$$

となる。よって、$Z(X)\left(\tilde{M}\tilde{N} - \langle M, N\rangle\right)$ は P の下でマルチンゲールであり、ベイズの公式より

$$\tilde{\mathrm{E}}_T\left[\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t \middle| \mathcal{F}_s\right] = \tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s$$

が P と $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下でほとんど確実に成り立つ。よって、2 次変分の定義より、$\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下で、ほとんど確実に

$$\left\langle \tilde{M}, \tilde{N} \right\rangle_t = \langle M, N\rangle_t\,,\ 0 \le t \le T$$

が成り立つ。 ∎

ギルザノフの定理の証明. $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathrm{P}}_T)$ 上の確率過程 $\tilde{W}$ が定理 1.16 の仮定を満たすことを示す。命題 1.32 で、$M = W$ とすると、$\tilde{M} = \tilde{W}$ となる。よって、$\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{M}}_t^{c,loc}$ であり、更に、命題 1.32 より

$$\left\langle \tilde{W} \right\rangle_t = \langle W\rangle_t = t,\ 0 \le t \le T$$

が $\tilde{\mathrm{P}}_T$ の下で成り立つ。よって、定理 1.16 より示せた。 ∎

(1.8) より、$Z(X)$ は非負局所マルチンゲールであるから、命題 1.8 より $Z(X)$ は優マルチンゲールになる。よって、$Z(X)$ がマルチンゲールになる必要十分条件は任意の $t \ge 0$ に対して、$E[Z_t(X)] = 1$ となることである。

ギルザノフの定理では $Z(X)$ がマルチンゲールであることを仮定したが、実際にギルザノフの定理を用いる場合は、与えられた X に対して $Z(X)$ がマルチンゲールになることを確認しなければならない。(これは本修士論文の主題と密接な関係がある (第 3 章 3.1 節)) しかし、一般の X については、任意の $t \ge 0$ に対して、$E[Z_t(X)] = 1$ を直接確認することは容易ではない。そこで $Z(X)$ がマルチンゲールになる十分条件を与える。

補題 1.34. (ノヴィコフ (Novikov) の条件)([KS1] 3.5.13 Corollary) $T>0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

が成り立てば、$\mathrm{E}[Z_T(X)] = 1$ である。つまり、$0 \leq t \leq T$ で $\{Z_t(X)\}$ はマルチンゲールになる。

補題 1.34 を示すには次を示せばよい。

命題 1.35. ([KS1] 3.5.12 Proposition) $M = \{M_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $Z_t := \mathrm{E}[M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t]$, $t \geq 0$ とする。このとき、

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\}\right] < \infty$$

が成り立てば、$\mathrm{E}[Z_t] = 1$ である。

証明. 定理 5.19 より、$s \geq 0$ に対して、

$$T(s) := \inf\{t \geq 0; \langle M\rangle_t > s\},\ B_s := M_{T(s)},\ \mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T(s)}$$

とすると、$\{B_s\}_{s\geq 0}$ は 1 次元標準ブラウン運動であり、$\{\mathcal{G}_s\}$ は通常の条件を満たす。また、$b<0$ に対して $\{\mathcal{G}_s\}$ に関する停止時刻 S_b を

$$S_b := \inf\{s \geq 0; B_s - s = b\}$$

とすると、命題 5.20, 命題 5.21 より、

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(B_{S_b} - \frac{1}{2}S_b\right)\right] = 1,\ \mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}S_b\right)\right] = e^{-b}$$

が成り立つ。また、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{G}_s)$ 上の確率過程 $Y = \{Y_s\}_{s\geq 0}$, $N_s = \{N_s\}_{s\geq 0}$ を

$$Y_s := \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right),\ N_s := Y_{s\wedge S_b}$$

とすると、命題 5.18 より N は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{G}_s)$ 上のマルチンゲールになる。また、$\mathrm{P}[S_b < \infty] = 1$ より

$$N_\infty := \lim_{s\to\infty} N_s = \exp\left(B_{S_b} - \frac{1}{2}S_b\right)$$

となる。ここで、$\mathrm{E}[N_\infty] = 1 = \mathrm{E}[N_0]$ だから命題 5.17 より、N は $s=\infty$ も含めて $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{G}_s)$ 上のマルチンゲールになる。よって任意抽出定理より、$\{\mathcal{G}_s\}$ に関する任意の停止時刻 R に対して

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{B_{S_b} - \frac{1}{2}S_b\right\}\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left\{B_{R\wedge S_b} - \frac{1}{2}(R\wedge S_b)\right\}\right] = 1$$

となる。ここで定理 5.19 より、$t \geq 0$ を固定すると $\langle M \rangle_t$ は $\{\mathcal{G}_s\}$ に関する停止時刻となる。$b < 0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_b \leq \langle M \rangle_t\}} \exp\left(b + \frac{1}{2} S_b\right)\right] + \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{\langle M \rangle_t < S_b\}} \exp\left(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t\right)\right] = 1$$

が成り立つ。左辺第一項に対しては、仮定 $\mathrm{E}[\exp\{\frac{1}{2} \langle M \rangle_t\}] < \infty$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_b \leq \langle M \rangle_t\}} \exp\left(b + \frac{1}{2} S_b\right)\right] &= e^b \mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2} \langle M \rangle_t\right\}\right] \\ &\to 0 \ as \ b \downarrow -\infty \end{aligned}$$

が成り立つ。左辺第二項に対しては、単調収束定理より

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{1}_{\{\langle M \rangle_t < S_b\}} \exp\left(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t\right)\right] \to \mathrm{E}[Z_t] = 1 \ as \ b \downarrow -\infty$$

となり示せた。 ∎

さらに補題 1.34 から次が言える。

補題 1.36. ([KS1] 3.5.14 Cororally) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \uparrow \infty$ 実数列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ で、

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} X_s^2 ds\right)\right] < \infty, \ n \geq 1 \tag{1.11}$$

を満たすものが存在するとき、$Z(X)$ はマルチンゲールになる。

証明. $X_t(n) := X_t \mathbf{1}_{[t_{n-1}, t_n]}(t)$ とすると、仮定と補題 1.34 より $Z(X(n))$ はマルチンゲールになる。よって、

$$\mathrm{E}[Z_{t_n}(X) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}] = \mathrm{E}[Z_{t_n}(X(n)) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}] = \mathrm{E}[Z_{t_{n-1}}(X(n))] = \mathrm{E}[Z_{t_{n-1}}(X)]$$

となり、帰納法より任意の $n \geq 1$ に対して $\mathrm{E}[Z_{t_n}(X)] = 1$ かつ、$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ となる。よって任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{E}[Z_t(X)] = 1$ が成り立つので示せた。 ∎

第2章　金融市場の定式化

この章では、本修士論文で用いる数理ファイナンスの概念を定義する。

2.1　金融市場を通じた取引の定式化

本修士論文では、一個の危険資産と、一個の安全資産が存在する金融市場について述べる。まずはこの二つの資産とその取引について述べる。

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を完備確率空間、W を１次元標準ブラウン運動とする。$T \geq 0$ で**満期 (terminal time)** を表し、$\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\},\ \mathcal{F}(t) := \sigma\{\mathcal{F}^W(t) \cup \mathcal{N}\}$ とする。ただし、$\mathcal{N}$ は $\mathcal{F}^W(T)$ に含まれる零集合の族とする。

まず**安全資産（第０資産）**S_0 を

$$S_0(t) := e^{rt}(\Longleftrightarrow dS_0(t) = rS_0(t)dt),\ t \in [0, T] \tag{2.1}$$

で定義する。次に**危険資産（第１資産）**S_1 を連続で $S_1(t) > 0,\ t \in [0, T]$ かつ、

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= S_1(0) + \int_0^t b(s)S_1(s)ds + \int_0^t \sigma(s)S_1(s)dW(s) \\ (&\Longleftrightarrow dS_1(t) = b(t)S_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)dW(t)),\ t \in [0, T] \end{aligned} \tag{2.2}$$

という形で表される半マルチンゲールで定義する。

ただし、$\{b(t)\}$ は発展的可測であり、$\int_0^T |b(t)|dt < \infty$ a.s、$\{\sigma(t)\}$ は発展的可測であり、$\int_0^T |\sigma(t)|^2 dt < \infty$ a.s を満たす確率過程である。$\{b(t)\}$ を**ドリフト係数過程**, $\{\sigma(t)\}$ を**ボラティリティ過程**と呼ぶ。

定義 2.1. ポートフォリオ過程 (portfolio process)(π_0, π_1) を以下を満たす発展的可測な確率過程とする。

$$\int_0^T |\pi_0(t) + \pi_1(t)|dt < \infty \quad a.s \tag{2.3}$$

$$\int_0^T |\pi_1(t)(b(t) - r)|dt < \infty \quad a.s \tag{2.4}$$

$$\int_0^T |\sigma(t)\pi_1(t)|^2 dt < \infty \quad a.s \tag{2.5}$$

さらに (π_0, π_1) に付随する**利得過程 (gains process)**G を

$$G(t) := \int_0^t r[\pi_0(s)+\pi_1(s)]ds + \int_0^t \pi_1(s)[b(s)-r]ds + \int_0^t \pi_1(s)\sigma(s)dW(s),\ 0 \le t \le T$$

とする。$\pi_i(t)$ は（時刻 $t \in [0,T]$ での第 i 資産の単位保有量）×（時刻 $t \in [0,T]$ での第 i 資産の価格）と解釈する。

定義 2.2. (π_0, π_1) に付随する利得過程 G に対して、

$$G(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t),\ 0 \le t \le T$$

が成り立つとき、(π_0, π_1) を**自己調達的 (self-financed, self-financing)** という。

定義 2.3. 超過収益率過程 (excess yield process, over the interest rate process)R を

$$R(t) := \int_0^t (b(s) - r)du + \int_0^t \sigma(u)dW(u),\ 0 \le t \le T \tag{2.6}$$

とする。

注意 2.4. ポートフォリオが自己調達的であるとは、「各時刻のポートフォリオの価値は、その時刻までの資産保有から得られる利益に等しい」ということを表している。超過収益率過程 R を用いると、(π_0, π_1) に付随する利得過程 G は

$$G(t) = \int_0^t [\pi_0(s) + \pi_1(s)]rdt + \int_0^t \pi_1(s)dR(s)$$

と表され、さらに (π_0, π_1) が自己調達的であることを仮定すると、

$$dG(t) = \frac{G(t)}{S_0(t)}dS_0 + \pi_1(t)dR(t)$$

つまり、

$$G(t) = S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)dR(u),\ 0 \le t \le T \tag{2.7}$$

となる。

定義 2.5. (2.4), (2.5) を満たす $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程 π_1 で、

$$M_0^{\pi_1}(t) = \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)dR(u),\ 0 \le t \le T$$

が時間に依らない定数で下からおさえられるとき、π_1 を **tame** という。

定義 2.6. $x \in \mathbb{R}$, (π_0, π_1) をポートフォリオ過程とする。(x, π_0, π_1) に付随する**資産価値過程 (wealth process)**X を

$$X(t) := x + G(t),\ 0 \le t \le T \tag{2.8}$$

とする。ただし、G は (π_0, π_1) に付随する利得過程である。さらに、

$$X(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t),\ 0 \le t \le T$$

を満たすとき、ポートフォリオ (π_0, π_1) を x**-financed** という。

注意 2.7. x は初期資産（初期投資額）を表す。(2.8) で x-financed を仮定すると、

$$dX(t) = \frac{X(t)}{S_0(t)} dS_0(t) + \pi_1(t) dR(t)$$

つまり、

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = x + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi_1(u) dR(u),\ 0 \le t \le T$$

となる。

2.2 裁定機会と完備市場

この節では、裁定機会と市場の完備性について述べる。これらの概念はギルザノフの定理と密接な関係があり、具体的なモデルを構成する上で重要な概念である。

定義 2.8. 自己調達的なポートフォリオ過程 (π_0, π_1) が tame であると仮定する。このとき、(π_0, π_1) に付随する利得過程 G が、

$$G(T) \ge 0 \text{ a.s かつ } \mathrm{P}(G(T) > 0) > 0$$

を満たすとき、（金融市場は）**裁定機会 (arbitrage) が存在する**という。裁定機会が存在しないとき、（金融市場は）**viable** という。

注意 2.9. 利得過程 G は $G(0) = 0$ であるので、利得過程が満期で正の値を取ることがあれば、それは初期時点では資金ゼロであっても、取引を通じて満期には正の利得を獲得できることを意味する。

定理 2.10. ([KS2] 1.4.2 Theorem) (i) もし裁定機会が存在しなければ、ほとんどすべての $t \in [0, T]$ に対して、

$$b(t) - r = \sigma(t)\theta(t) \text{ a.s}$$

となる発展的可測な確率過程 $\{\theta(t)\}$ が存在する。

$\{\theta(t)\}$ を**市場リスク価格過程 (market price of risk)** という。
(ii) 逆に、ほとんどすべての $t \in [0,T]$ に対して、

$$b(t) - r = \sigma(t)\theta(t) \text{ a.s}$$

となる発展的可測な確率過程 $\{\theta(t)\}$ が存在すると仮定する。

この時 $\{\theta(t)\}$ が $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt < \infty$ a.s であり、局所マルチンゲール

$$Z_0(t) := \exp\left\{ -\int_0^{\mathrm{t}} \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{t}} \theta(s)^2 ds \right\},\ 0 \leq t \leq T \tag{2.9}$$

が $\mathrm{E}[Z_0(T)] = 1$ を満たせば、裁定機会は存在しない。

証明. (ii) のみ証明する。仮定を満たす $\{\theta(t)\}$ が存在するとき、自己調達的なポートフォリオ過程 (π_0, π_1) に付随する利得過程 G は (2.6), (2.7) より、

$$\begin{aligned} G(t) &= S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)dR(u) \\ &= S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u) \end{aligned}$$

と表される。ここで、

$$W_0(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds,\ 0 \leq t \leq T \tag{2.10}$$

とおいて、$R(t) = \int_0^t \sigma(u)dW_0(u)$ を用いた。一方、(2.9) の $Z_0(t)$ を用いて、

$$\mathrm{P}_0(A) := \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z_0(T)],\ A \in \mathcal{F}(T) \tag{2.11}$$

とおくと、ギルザノフの定理より W_0 は P_0 の下でブラウン運動になる。故に、$\left\{\frac{G(t)}{S_0(t)}\right\}$ は非負局所マルチンゲールになり、命題 1.8 より $\left\{\frac{G(t)}{S_0(t)}\right\}$ は P_0 の下で優マルチンゲールになるので $\mathrm{E}_0\left[\frac{G(T)}{S_0(T)}\right] \leq \mathrm{E}_0\left[\frac{G(0)}{S_0(0)}\right] = 0$ となる。ただし、E_0 は P_0 の下での期待値である。つまり、

$$\mathrm{E}\left[\frac{G(T)}{S_0(T)}Z_0(T)\right] \leq 0$$

となるので、$\mathrm{P}(G(T) \geq 0) = 1$ かつ $\mathrm{P}(G(T) > 0) > 0$ とは成り得ない。 ∎

定義 2.11. (2.1) で定義される一個の安全資産と、(2.2) で定義される一個の危険資産からなる金融市場は、以下の条件を満たすとき**標準的 (standard)** であるという。

(i) 市場には裁定機会は存在しない (viable)。

(ii) 発展的可測な市場リスク価格過程 $\{\theta(s)\}$ が存在して、$\int_0^T |\theta(t)|^2 dt < \infty$ a.s

(iii) (2.9) の $\{Z_0(t)\}$ がマルチンゲールになる。

また金融市場が標準的であるときに、(2.11) の確率測度 P_0 を **standard martingale measure** と呼ぶ。P_0 の下での期待値を E_0 とする。

注意 2.12. P_0 はリスク中立確率と呼ばれる確率測度である。実際、

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= b(t)S_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)dW(t) \\ &= rS_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)d\biggl(W(t) + \int_0^t \theta(s)ds\biggr) \\ &= rS_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)dW_0(t) \end{aligned}$$

と表示でき、P_0 の下で W_0 はブラウン運動になる。

定義 2.13. (2.4), (2.5) を満たす $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程 π_1 で、

$$M_0^{\pi_1}(t) := \int_0^t \frac{1}{S_0(u)} \pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u),\ 0 \le t \le T$$

が P_0 の下でマルチンゲールになるとき、π_1 は**マルチンゲールを生成する (martingale-generating)** という。

定義 2.14. (2.1) で定義される一個の安全資産と、(2.2) で定義される一個の危険資産からなる標準的な金融市場を考える。B を $\mathcal{F}(T)$-可測かつ $\frac{B}{S_0(T)}$ がほとんど確実に下に有界で $x := \mathrm{E}_0\bigl[\frac{B}{S_0(T)}\bigr] < \infty$ を満たす確率変数とする。また x-financed を仮定する。

(i)
$$\frac{B}{S_0(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)} \pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{2.12}$$
を満たす tame であるポートフォリオ (π_0, π_1) が存在するとき、B を**ヘッジ可能 (financeable)** という。

(ii) 任意の下に有界で $\mathcal{F}(T)$-可測な確率変数がヘッジ可能である時、この市場は**完備 (complete)** であるという。

注意 2.15. (i) は、金融商品を複製するポートフォリオが存在することを意味する。(ii) は、任意の金融商品が複製できることを意味する。さらに本修士論文で扱うような危険資産が一個で、ブラウン運動の次元が 1 次元である金融市場は、標準的であれば完備であることが知られている。([KS2] 1.6.6 Theorem)

注意 2.16. 市場が完備であれば、$\mathrm{E}_0\left[\frac{C(T)}{S_0(T)}\right] < \infty$ を満たす $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数 $C(T)$ に対して、

$$\frac{C(T)}{S_0(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{2.13}$$

を満たし、tame であるポートフォリオ (π_0, π_1) が存在する。ここで、

$$M_0^{\pi_1}(T) := \int_0^T \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u),\ 0 \le t \le T$$

とする。(2.13) の両辺の期待値をとると、$\mathrm{E}_0[M_0^{\pi_1}(T)] = 0$ となるので、定理 2.10(ii) の証明と同様にして、$M_0^{\pi_1}$ がマルチンゲールになることがわかる。よって π_1 は、マルチンゲールを生成するポートフォリオになっている。

次にヨーロッパ型派生証券と呼ばれる金融商品を定義する。

定義 2.17. S_1 に依存する支払関数 $C(T)$ を満期 T において受け取る権利のことを、**ヨーロッパ型派生証券**と呼ぶ。

例

(i) $C(T) = (S_1(T) - K)^+$; 権利行使価格が K のヨーロピアンコールオプション (満期で $S_1(T)$ を価格 K で買う権利)

(ii) $C(T) = (K - S_1(T))^+$; 権利行使価格が K のヨーロピアンプットオプション (満期で $S_1(T)$ を価格 K で売る権利)

本修士論文では、ヨーロピアンコールオプションのみを扱う。

時刻 t でのヨーロッパ型派生証券の価値を定義するために、簡単な考察をする。市場は完備と仮定する。初期時刻 t の市場におけるヨーロッパ型派生証券価格を x とする。この派生証券を市場価格 x で販売し、満期になった時に契約通り支払いを行うために、支払関数をヘッジする必要のある派生証券の発行主体（例えば金融機関）を考える。この主体は販売から得た利得 x を用いて市場に存在する安全資産と危険資産を組み合わせて保有する。このとき、運用するポートフォリオを (π_0, π_1) とすれば、この発行主体の資産価値過程 X は、$0 \le t \le T$ において、

$$\frac{X(T)}{S_0(T)} = x + \int_t^T \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u)$$

と表現される。他方、この派生証券を市場で購入した主体は、時点 t で $-x$ の利得を得て (x を保険料として支払い)、満期 T で $C(T)$ を得ることになる。ここで、時刻 $t \in [0, T]$ でのヨーロッパ型派生証券の価値を次のように定める。

定義 2.18. (ヨーロッパ型派生証券の価格)
時刻 T で支払関数が $C(T)$ のヨーロッパ型派生証券の、時刻 t における価格 $V_E(t,T)$ は $\mathcal{F}(t)$-可測であって、$X(t)=\xi$ とするとき、マルチンゲールを生成するポートフォリオ (π_0,π_1) が存在して、

$$\frac{X(T)}{S_0(T)}=\frac{X(t)}{S_0(t)}+\int_t^T\frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u)\geq\frac{C(T)}{S_0(T)} \tag{2.14}$$

となる最小の確率変数 ξ により定義する。

注意 2.19. 上の定義の意味は、「時刻 t でヨーロッパ型派生証券を売って得た金額 $X(t)$ で時刻 t から時刻 T まで上手な運用をして (マルチンゲールを生成するポートフォリオ (π_0,π_1) が存在して) 時刻 T で $C(T)$ を支払うことが出来る」ような最小の $X(t)$ が時刻 t でのヨーロッパ型派生証券の価値であるということを言っている。このことを数式を用いて厳密に説明するためには、$\Gamma(\cdot)$-financed（時刻 t において、取引以外から $\Gamma(t)$ だけ収入または支出がある）という概念 ([KS2] 1.3.2 Definition) が必要であるが、本修士論文ではこれ以後その概念は登場しないので省略する。

市場が完備であれば次のことが言える。

定理 2.20. ([KS2] 2.2.3 Proposition) 市場は完備であり、標準的であると仮定する。このとき、満期が T で支払関数が $C(T)$ のヨーロッパ型派生証券の、時刻 t における価格 $V_E(t,T)$ は

$$V_E(t,T)=S_0(t)\mathrm{E}_0\left[\frac{C(T)}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

で与えられる。

証明. 市場の完備性より、支払関数 $C(T)$ に対して、ポートフォリオ $(\pi_0,\bar{\pi})$ が存在して、

$$\frac{C(T)}{S_0(T)}=x+\int_0^T\frac{1}{S_0(u)}\bar{\pi}(u)\sigma(u)dW_0(u) \tag{2.15}$$

と書ける。ただし、$x=\mathrm{E}_0[\frac{C(T)}{S_0(T)}]$ である。このポートフォリオ $(\pi_0,\bar{\pi})$ を用いて、

$$\frac{\bar{X}(t)}{S_0(t)}=x+\int_0^t\frac{1}{S_0(u)}\bar{\pi}(u)\sigma(u)dW_0(u)$$

により $\bar{X}$ を定義すれば、$\bar{X}(T)=C(T)$ かつ

$$\frac{\bar{X}(t)}{S_0(t)}=\mathrm{E}_0\left[\frac{C(T)}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\quad(\because (2.15)\text{ かつ }\bar{\pi}\text{ はマルチンゲールを生成する})$$

となる。一方、定義の (2.14) で条件付き期待値を取れば、

$$\frac{X(t)}{S_0(t)}\geq\mathrm{E}_0\left[\frac{C(T)}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{2.16}$$

となる。ここで $\bar{\pi}$ による $\bar{X}$ が (2.16) の等号を成立させるので示せた。 ∎

第3章　Black-Scholesモデルの1つの拡張

この章ではTakaoka[T1]で提唱されているモデルを拡張したモデルを導入し、その性質について述べる。

3.1　Black-Scholesモデルの拡張とその性質

この節では、本修士論文で中心となるモデルの性質について述べる。本修士論文では、次の**安全資産**Bと**危険資産**S^αからなる金融市場について考える。

$$\begin{cases} B_t = e^{rt} \\ S_t^\alpha = S_0 e^{\alpha rt} \int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma) \end{cases} \tag{3.1}$$

ただし、Wは完備確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上の1次元標準ブラウン運動、$\lambda \in \Lambda := \{((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)))$上の確率測度$\mid \int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty\}$とする。また、満期は$T > 0$で、$t \in [0,T],\ r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ S_0$は$\mathcal{F}_0$-可測な確率変数とする。フィルター$\{\mathcal{F}_t\}$は$\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}^W(t) \cup \mathcal{N}\},\ t \in [0,T]$ ($\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W_s; 0 \le s \le t\},\ \mathcal{N}$は$\mathcal{F}^W(T)$上の零集合の族) とする。
$\alpha = 1$のときTakaoka[T1]で提唱されているモデルであり、λが単位分布のとき、Black-Sholesモデルと呼ばれるものに対応する。

この章の前半の議論は任意の$\alpha \in \mathbb{R}$に対して成り立つ議論であるが、特に$\alpha = 0$のとき、危険資産の振る舞いが、安全資産の振る舞い（金利）と無関係な状況という意味で、Takaoka[T1]のモデル$(\alpha = 1)$との比較において、ファイナンスへの応用の立場から興味がある。

前章で考察したように、危険資産S^αは(2.2)のような表示の方が扱い易い。そのために次を用いる。

系 3.1. ([T1] Appendix) ηを$((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)))$上の有限測度で、$\int_0^\infty \sigma\eta(d\sigma) < \infty$を満たすとする。このとき、ほとんど確実に

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp\left\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\eta(d\sigma) \\ = \quad & \eta(\mathbb{R}_{++}) + \int_0^t \left[\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma(W_u + Cu) - \frac{1}{2}\sigma^2 u\right\}\eta(d\sigma)\right] d(W_u + Cu) \end{aligned}$$

が $t \geq 0$ に対して成り立つ。

注意 3.2. $\int_0^\infty \sigma^2 \eta(d\sigma) < \infty$ を仮定すれば、系 3.1 は伊藤の公式より成り立つ。

$X_t = S_0 e^{\alpha r t},\ Y_t = \int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)$ とすると、部分積分の公式より、

$$dS_t^\alpha = d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t \quad (\because X_t \text{は有界変動})$$

ここで、系 3.1 から $dY_t = [\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)]d(W_t + Ct)$ となるので、

$$\begin{aligned}
& dS_t^\alpha \\
= \ & X_t \left[\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\lambda(d\sigma)\right] d(W_t + Ct) + \alpha r Y_t X_t dt \\
= \ & X_t Y_t \frac{1}{Y_t}\left[\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\lambda(d\sigma)\right] d(W_t + Ct) + \alpha r X_t Y_t dt \\
= \ & S_t^\alpha \left(\alpha r + C \frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}\right) dt \\
& + S_t^\alpha \left(\frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}\right) dW_t
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\phi(t) := \frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

とすると、市場リスク価格過程 $\theta_\alpha(t)$ は、

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha(t) &= \frac{(\alpha r + C\sigma(t)) - r}{\phi(t)} \\
&= C - \frac{r(1-\alpha)}{\phi(t)}
\end{aligned}$$

となるが、２章で見たように、金融市場が標準的であるためには、

$$Z^\alpha(t) := \exp\left\{-\int_0^t \theta_\alpha(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta_\alpha(s)|^2 ds\right\}$$

が $0 \leq t \leq T$ でマルチンゲールである必要がある。そこで、$\lambda \in \Lambda$ の台の下限を m として、以下の場合を考える。

(i)$\alpha = 1$ のとき

$\theta_1(t) = C$ より任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、Z^1 がマルチンゲールであることは、直接計算することにより分かる。

(ii)$\alpha \neq 1$ かつ $m > 0$ のとき

θ_α は有界であるから、補題 1.34 より Z^α はマルチンゲールになる。

(iii)$\alpha \neq 1$ かつ $m = 0$ のとき

θ_α は非有界である。この場合 Z^α がマルチンゲールであるかは自明ではない。そこで補題 1.36 を用いて、Z^α がマルチンゲールになる十分条件を与える。

系 3.3. ([KS1] 3.5.16 Corollary)

$$f(t,x) = \begin{cases} \int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) & t = 0 \\ \frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} & t > 0 \end{cases}$$

とする。このとき、$K_T > 0$ が存在して、

$$\left| C - \frac{r(1-\alpha)}{f(t,x)} \right| \leq K_T(1+|x|),\ 0 \leq t \leq T \tag{3.2}$$

が成り立つならば、Z^α は $0 \leq t \leq T$ でマルチンゲールになる。

証明. $T > 0$ に対して、実数列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n(T)} = T$ が存在して、$1 \leq n \leq n(T)$ に対して (1.11) が成り立てば、補題 1.36 の過程を満たす実数列 $1 \leq n \leq n(T)$ が構成できる。(第 1 章では簡単のため $T = \infty$ の扱いで基礎事項を要約したが、ファイナンスのモデルでは、満期 $T < \infty$ までの時間発展のみ考えるので、1 章の結果を $Y_t = X_{t \wedge T}$ に適用すればよい。よって、補題 1.36 を適用する際も時刻 T までの有限列を構成すれば十分である。) (3.2) より、

$$\left| C - \frac{r(1-\alpha)}{\sigma(t)} \right| \leq K_T\left(1 + \max_{0 \leq t \leq T} |W_t|\right),\quad 0 \leq t \leq T$$

であるから、$0 \leq t_{n-1} < t_n \leq K_T$ に対して、

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\theta_\alpha(s)|^2 ds \leq (t_n - t_{n-1})K_T^2\left(1 + \max_{0 \leq t \leq T}|W_t|\right)^2$$

が成り立つ。$D(t) := \exp[\frac{1}{4}(t_n - t_{n-1})K_T^2(1+|W_t|)^2]$ とすると、イエンセンの不等式より $\{D(t)\}$ は劣マルチンゲールになる。よって、ドゥーブの最大値不等式 (定理 5.4) より

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}(t_n - t_{n-1})K^2\left(1 + \max_{0 \leq t \leq T}|W_t|\right)^2\right\}\right] = \mathrm{E}\left[\max_{0 \leq t \leq T} D(t)^2\right] \leq 4\mathrm{E}[D(T)^2]$$

となる。ここで、$t_n - t_{n-1} < \frac{1}{TK_T^2}$ となるように $\{t_n\}_{n=1}^{n(T)}$ たちを選べば、$\mathrm{E}[D(T)^2] < \infty$ である。よって、補題 1.36 の仮定を満たす実数列 $\{t_n\}_{n=1}^{n(T)}$ が構成できるので、Z^α は $0 \leq t \leq T$ でマルチンゲールとなる。 ∎

$\lambda \in \Lambda_2 := \{((0,\infty),\mathcal{B}((0,\infty)))$ 上の確率測度 $\mid \int_0^\infty \sigma^2\lambda(d\sigma) < \infty\}$ とすると、$f(t,x)$ は $x \in \mathbb{R}$ に関して非減少となる。よって $\lambda \in \Lambda_2$ の場合、満期 $T > 0$ に対して (3.2) を満たす K_T が存在することを示すには、正定数 $y_0 = y_0(\lambda),\ D = D(T)$ が存在して、$y > y_0$ に対して

$$f(t,-y) > \frac{D}{y} \quad (D > 0 \text{ は定数}) \tag{3.3}$$

が成り立つことを示せばよい。以下、$\lambda \in \Lambda_2$ かつ (iii) の場合のみを考え、命題 3.4 から命題 3.8 の各場合について、(3.3) が成り立つことを示す。

命題 3.4. $\lambda \in \Lambda_2$ がルベーグ測度に対する密度 ρ を持ち、定数 $d > 0$ に対して ρ が区間 $(0,d]$ で $a \le \rho(x) \le b$ $(b > a > 0)$ が成り立つとき、(3.3) を満たす。

証明. $t > 0$ としてよい。

$$\begin{aligned} yf(t,-y) &= \frac{\int_0^\infty y\sigma\exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \\ &= \frac{\int_0^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \quad (y\sigma = z \text{ と置換}) \\ &= \frac{\int_0^1 z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \end{aligned}$$

分子第一項は、十分大きな $y > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz &\ge a\exp\left(-\frac{t}{2}C^2\right)\int_0^1 z\exp(-z)dz \\ &= a\exp\left(-\frac{t}{2}C^2\right)\left(1-\frac{2}{e}\right) \end{aligned}$$

分子第二項は、

$$\int_1^\infty z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \ge \int_1^\infty \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

分母第一項は、

$$\int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \le \int_0^1 \rho\left(\frac{z}{y}\right)dz = b$$

である。よって十分大きな $y > 0$ に対して

$$yf(t,-y) \ge \min\left(1, \frac{a}{b}\exp\left(-\frac{t}{2}C^2\right)\left(1-\frac{2}{e}\right)\right)$$

となるので示せた。 ▮

命題 3.5. $\lambda \in \Lambda_2$ がルベーグ測度に対する密度 ρ を持ち、定数 $d > 0$ に対して ρ が区間 $(0, d]$ で $\rho(ax) = \tilde{\rho}(a)\rho(x)$($a$ は定数) と書けるとき、(3.3) を満たす。

証明.

$$
\begin{aligned}
yf(t,-y) &= \frac{\int_0^\infty y\sigma \exp\{\sigma(-y+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \\
&= \frac{\int_0^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \quad (y\sigma = z \text{ と置換}) \\
&= \frac{\int_0^1 z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}
\end{aligned}
$$

分子第一項は、十分大きな $y > 0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz &= \tilde{\rho}\left(\frac{1}{y}\right)\int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho(z)dz \\
&\geq \tilde{\rho}\left(\frac{1}{y}\right)\exp\left(-\frac{t}{2}C^2 - 1\right)\int_0^1 z\rho(z)dz
\end{aligned}
$$

分子第二項は、

$$
\int_1^\infty z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \geq \int_1^\infty \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz
$$

分母第一項は、

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz &= \tilde{\rho}\left(\frac{1}{y}\right)\int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho(z)dz \\
&\leq \tilde{\rho}\left(\frac{1}{y}\right)
\end{aligned}
$$

である。よって十分大きな $y > 0$ に対して

$$
yf(t,-y) \geq \min\left(1, \exp\left(-\frac{t}{2}C^2 - 1\right)\int_0^1 z\rho(z)dz\right)
$$

となるので示せた。 ∎

命題 3.6. $\lambda \in \Lambda_2$ がルベーグ測度に対する密度 ρ を持ち、定数 $d > 0$ に対して ρ が区間 $(0, d]$ で $\gamma_1 x^\beta \leq \rho(x) \leq \gamma_2 x^\beta \quad (\beta > 0, \gamma_2 > \gamma_1 > 0)$ と書けるとき、(3.3) を満たす。

証明.

$$
\begin{aligned}
yf(t,-y) &= \frac{\int_0^\infty y\sigma\exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \\
&= \frac{\int_0^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \quad (y\sigma = z \text{ と置換}) \\
&= \frac{\int_0^1 z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz + \int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}
\end{aligned}
$$

分子第一項は、十分大きな $y>0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz &\geq \int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\gamma_1\left(\frac{z}{y}\right)^\beta dz \\
&\geq \frac{\gamma_1}{y^\beta}\exp\left(-\frac{t}{2}C^2-1\right)\int_0^1 z^{\beta+1}dz \\
&= \frac{\gamma_1}{y^\beta}\exp\left(-\frac{t}{2}C^2-1\right)\frac{1}{\beta+2}
\end{aligned}
$$

分子第二項は、

$$
\int_1^\infty z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \geq \int_1^\infty \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz
$$

分母第一項は、

$$
\int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \leq \int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\gamma_2\left(\frac{z}{y}\right)^\beta dz \leq \frac{\gamma_2}{y^\beta}
$$

である。よって十分大きな $y>0$ に対して

$$
yf(t,-y) \geq \min\left(1, \frac{\gamma_1}{\gamma_2(\beta+2)}\exp\left(-\frac{t}{2}C^2-1\right)\right)
$$

となるので示せた。 ∎

注意 3.7. $\beta < 0$ のときでも、λ に関する可積分条件を満たし、$\gamma_1 x^\beta \leq \rho(x) \leq \gamma_2 x^\beta$ $(\gamma_2 > \gamma_1 > 0)$ が原点近傍で成り立てば、上の命題は成り立つ。

命題 3.8. $\lambda \in \Lambda_2$ がルベーグ測度に対する密度 ρ を持ち、$\lim_{x\downarrow 0}\rho(x) = 0$ を満たし、$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma}{x\rho(x)}$ が存在するならば、(3.3) を満たす。

注意 3.9. $\lim_{x\downarrow 0}\rho(x) = 0$ を満たし、$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma}{x\rho(x)}$ が存在するなら、$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma}{x\rho(x)} \leq 1$ となる。

証明. $t>0$ のとき $\lim_{y\to\infty} yf(t,-y)>0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} yf(t,-y) &= \frac{\int_0^\infty y\sigma\exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \\ &= \frac{\int_0^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \quad (y\sigma=z \text{ と置換}) \\ &= \frac{\int_0^1 z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz+\int_1^\infty z\exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz+\int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \end{aligned}$$

分子第一項は

$$\int_0^1 z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \geq \exp\left\{-\frac{t}{2}C^2-1\right\}\int_0^1 z\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

分子第二項は

$$\int_1^\infty z\exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \geq \int_1^\infty \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

分母第一項は

$$\int_0^1 \exp(-z)\exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{z}{y}-C\right)^2\right\}\rho\left(\frac{z}{y}\right)dz \leq \int_0^1 \rho\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

となる。よって

$$yf(t,-y) \geq \frac{\exp\{-\frac{t}{2}C^2-1\}\int_0^1 z\rho(\frac{z}{y})dz+\int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \rho(\frac{z}{y})dz+\int_1^\infty \exp(-z)\exp\{-\frac{t}{2}(\frac{z}{y}-C)^2\}\rho(\frac{z}{y})dz} \tag{3.4}$$

(3.4) の右辺の分母分子を $\int_0^1 \rho(\frac{z}{y})d$ で割ると、分子第一項は

$$\frac{\exp\{-\frac{t}{2}C^2-1\}\int_0^1 z\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \rho(\frac{z}{y})dz} = \frac{\exp\{-\frac{t}{2}C^2-1\}\int_0^x \sigma\rho(\sigma)d\sigma}{x\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma}$$

となる。($\frac{z}{y}=\sigma, \frac{1}{y}=x$ と置いた) ここで仮定とロピタルの定理より、

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty}\frac{\int_0^1 z\rho(\frac{z}{y})dz}{\int_0^1 \rho(\frac{z}{y})dz} &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\int_0^x \sigma\rho(\sigma)d\sigma}{x\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma} \\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{x\rho(x)}{\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma + x\rho(x)} \\ &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{\frac{\int_0^x \rho(\sigma)d\sigma}{x\rho(x)}+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり示せた。 ∎

注意 3.10. $\lambda(d\sigma) = \exp(-\sigma)d\sigma$ や $\lambda(d\sigma) = \mathbf{1}_{(0,1)}(\sigma)d\sigma$ の場合は、$\Psi(x) := \int_x^\infty \exp(-\frac{y^2}{2})dy$, $x > 0$ に対する評価

$$\frac{x}{1+x^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \Psi(x) \leq \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{3.5}$$

を用いて、$t \geq 0$ に対して、$\lim_{y\to\infty} yf(t,-y) = 1$ が成り立つことを示せる。(3.5) の不等式は、最右辺を $\frac{1}{x}\exp(-\frac{x^2}{2})$ で置き換えても成り立つが、$\lim_{y\to\infty} yf(t,-y) = 1$ を示すには、より精密な評価が必要である。

注意 3.11. 本修士論文では、全ての $\lambda \in \Lambda_2$ に対して (3.3) の条件が成り立つことは示せなかったが、仮に (3.3) の条件を満たさない $\lambda \in \Lambda_2$ を発見したとしても、その λ に対して Z^α がマルチンゲールにならないとは限らない。（ノヴィコフの条件は Z^α がマルチンゲールになる十分条件である。）他に Z^α がマルチンゲールになる十分条件としては以下のものが知られている。（命題 1.35 に対応させた形で書く。）

定理 3.12. ([K]) $M = \{M_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $Z_t := \mathrm{E}[M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t],\ t \geq 0$ とする。このとき、

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}M_t\right\}\right] < \infty$$

が成り立てば、$\mathrm{E}[Z_t] = 1$ である。

この判定条件は、ノヴィコフの条件より良い判定条件である。実際、$\mathrm{E}[\exp\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t\}] < \infty$ を仮定すると、シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}M_t\right\}\right] &= \mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}M_t - \frac{1}{4}\langle M\rangle_t\right)\exp\left(\frac{1}{4}\langle M\rangle_t\right)\right] \\
&\leq \left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\}\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

となる。しかし、この判定条件を与えられた $\lambda \in \Lambda_2$ に対して直接確認するのは困難である。

以上より金融市場が標準的であることと、λ の台の下限とは密接な関係があることが分かったが、λ の台の下限は以下の意味でも金融市場に影響を与えている。

命題 3.13. m を $\lambda \in \Lambda_2$ の台の下限とし、$m > 0$ と仮定する。この時、$t > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}\left(\log\frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x\right)}{\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\right\}dy} = \begin{cases} 0 & \eta > m^2 t \\ \infty & 0 < \eta < m^2 t \end{cases}$$

が成り立つ。

証明. $t>0$ に対して、$F(x) := \log e^{\alpha r t}\int_0^\infty \exp\{\sigma(x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)$ とすると、

$$\mathrm{P}\left(\log\frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x\right) = \mathrm{P}(W_t < F^{-1}(-x)) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(-x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\}dy$$

が成り立つ。よって、求める極限の収束または発散を調べるためには、ロピタルの定理を用いて、

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{F^{-1}(-x)^2}{2t}\right\}\frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\left\{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\eta}\right\}}$$

の $x\to\infty$ とした時の極限を調べればよいが、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} = \frac{1}{m}$$

に注意すると、

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{F^{-1}(-x)^2}{2t}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\left\{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\eta}\right\}} = \exp\left\{\frac{1}{2\eta}\left(-x-\mu+\sqrt{\frac{\eta}{t}}F^{-1}(-x)\right)\left(-x-\mu-\sqrt{\frac{\eta}{t}}F^{-1}(-x)\right)\right\}$$

の極限を調べればよい。$x\to\infty$ とすると

$$-x-\mu+\sqrt{\frac{\eta}{t}}F^{-1}(-x) \to -\infty$$

であるから $x\to\infty$ とした時の $f(x) := -x-\mu-\sqrt{\frac{\eta}{t}}F^{-1}(-x)$ の符号で求める極限の収束または発散が決まる。

$$f'(x) = -1+\sqrt{\frac{\eta}{t}}\frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(-x+Ct)-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

より、$-1+\sqrt{\frac{\eta}{t}}\frac{1}{m} > 0$ つまり $\eta > m^2 t$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{P}(\log\frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x)}{\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\}dy} = 0$$

となる。また、$-1+\sqrt{\frac{\eta}{t}}\frac{1}{m} < 0$ つまり $\eta < m^2 t$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{P}(\log\frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x)}{\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\}dy} = \infty$$

となり得られた。 ▮

更に以下が成り立つ。

系 3.14. m を $\lambda \in \Lambda_2$ の台の下限とし、$m = 0$ かつ (3.3) を満たすと仮定する。この時、$t > 0,\ \eta > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}\big(\log \frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x\big)}{\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\big\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\big\} dy} = 0$$

がなりたつ。

証明. $t > 0$ に対して、$F(x) = \log e^{\alpha r t} \int_0^\infty \exp\{\sigma(x + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)$ とすると

$$\mathrm{P}\left(\log \frac{S_t^\alpha}{S_0} < -x\right) = \mathrm{P}(W_t < F^{-1}(-x)) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(-x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dy$$

となる。よって、求める極限の収束を調べるためには、ロピタルの定理を用いて、

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\big\{-\frac{F^{-1}(-x)^2}{2t}\big\} \frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\big\{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\eta}\big\}}$$

の $x \to \infty$ とした時の極限が 0 になることを示せばよいが、(3.3) より正定数 $D = D(T)$ が存在して、

$$\frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-x + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \le \frac{x}{D}$$

になる。よって、

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\big\{-\frac{F^{-1}(-x)^2}{2t}\big\} \frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-x+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\big\{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\eta}\big\}} \\ \le\ & \exp\left\{\frac{1}{2\eta}\left(-x - \mu + \sqrt{\frac{\eta}{t}} F^{-1}(-x)\right)\left(-x - \mu - \sqrt{\frac{\eta}{t}} F^{-1}(-x)\right)\right\} \frac{x}{D} \end{aligned}$$

の右辺の極限が 0 になることを示せばよい。$x \to \infty$ とすると

$$-x - \mu + \sqrt{\frac{\eta}{t}} F^{-1}(-x) \to -\infty$$

であるから $x \to \infty$ とした時の $f(x) := -x - \mu - \sqrt{\frac{\eta}{t}} F^{-1}(-x)$ の符号が正となることを示す。

$$f'(x) = -1 + \sqrt{\frac{\eta}{t}} \frac{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-x + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

より、$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ となる。これより x が十分大きなところでは $f(x)$ は増加関数であり、特に $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ である。よって示せた。 ∎

同様の議論から以下の二つが示せる。

系 3.15. m を $\lambda \in \Lambda_2$ の台の下限とし、$m > 0$ と仮定する。この時、$t > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}^1\bigl(\log \frac{S_t^1}{S_0} < -x\bigr)}{\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\bigl\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\bigr\} dy} = \begin{cases} 0 & \eta > m^2 t \\ \infty & 0 < \eta < m^2 t \end{cases}$$

が成り立つ。また、$m = 0$ かつ正定数 $x_0 = x_0(\lambda),\ D = D(T)$ が存在して、$x > x_0$ に対して

$$\frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(-x) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-x) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} \geq \frac{D}{x}$$

が成り立つなら、$t > 0,\ \eta > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}^1\bigl(\log \frac{S_t^1}{S_0} < -x\bigr)}{\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\bigl\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\bigr\} dy} = 0$$

となる。ただし、$\mathrm{P}^1(A) := \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z^1(T)],\ A \in \mathcal{F}_T$ である。

系 3.16. M を $\lambda \in \Lambda_2$ の台の上限とし、$M < \infty$ とする。この時、$t > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}\bigl(\log \frac{S_t^\alpha}{S_0} > x\bigr)}{\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\bigl\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\eta}\bigr\} dy} = \begin{cases} 0 & \eta > M^2 t \\ \infty & 0 < \eta < M^2 t \end{cases}$$

が成り立つ。

注意 3.17. $\log \frac{B_t}{B_0} = rt$ である。よって、$\log \frac{S_t^\alpha}{S_0}$ の分布を調べることは S_t^α の収益率の分布について調べていると見なせる。

3.2 ヨーロピアンコールオプションについて

次に B と S^α からなる金融市場で、ヨーロピアンコールオプションの価格について考える。この節では、

$$\lambda_t(d\sigma) := \frac{\exp(\sigma W_t^Q - \frac{\sigma^2}{2}t)\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp(\sigma W_t^Q - \frac{\sigma^2}{2}t)\lambda(d\sigma)}$$

$W_t^Q := W_t + Ct, \mathrm{P}^\alpha(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z^\alpha(t)],\ A \in \mathcal{F}_t$ とし、E^α を P^α の下での期待値を表すことにする。また、満期 T で権利行使価格が K のヨーロピアンコールオプションの価格を $V_{\alpha,K}(t,T)$ とし、$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy$ とする。

命題 3.18. ([T1] Proposition 4.2)

$$\begin{aligned} V_{1,K}(t,T) &= E^1\left[\frac{(S_T^1-K)^+}{e^{r(T-t)}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= S_t^1\int_0^\infty \Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right)\lambda_t(d\sigma)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

ただし、$\hat{x}_t=\hat{x}_t(W_t^Q)$ は、次の x に関する方程式の解である。

$$S_t^1e^{r(T-t)}\int_0^\infty \exp\left\{\sigma x-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\lambda_t(d\sigma)=K$$

命題 3.18 を示すために次を用いる。

補題 3.19. ([MM]Appendices Lemma A0.1) ψ,η は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の可積分な確率変数で、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする。このとき、ψ が $\mathcal{G}$-可測で、η が $\mathcal{G}$ と独立ならば、$\mathrm{E}[|h(\psi,\eta)|]<\infty$ を満たす任意のボレル可測関数 $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して、

$$\mathrm{E}[h(\psi,\eta)|\mathcal{G}]=H(\psi)$$

となる。ただし、$H(x)=\mathrm{E}[h(x,\eta)]$ である。

命題 3.18 の証明. $k(\sigma):=\exp(\sigma\hat{x}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t))$ とすると、$S_T^1=S_t^1e^{r(T-t)}\int_0^\infty\exp\big\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\big\}\lambda_t(d\sigma)$ となるので

$$\begin{aligned} S_T^1-K>0 &\Leftrightarrow S_t^1e^{r(T-t)}\int_0^\infty\exp\left\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\lambda_t(d\sigma)>K \\ &\Leftrightarrow W_T^Q-W_t^Q>\hat{x}_t \\ &\Leftrightarrow \exp\left\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}-k(\sigma)>0 \end{aligned}$$

かつ $S_t^1e^{r(T-t)}\int_0^\infty k(\sigma)\lambda_t(d\sigma)=K$ より

$$(S_T^1-K)^+=S_t^1e^{r(T-t)}\int_0^\infty\left[\exp\left\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}-k(\sigma)\right]^+\lambda_t(d\sigma)$$

が成り立つ。よって、$S_t^1,\ W_t^Q,\ \int_0^\infty\exp(\sigma W_t^Q-\frac{\sigma^2}{2}t)\lambda(d\sigma)$ が $\mathcal{F}_t$-可測であることとフビニの定理より、

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}^1\left[\frac{(S_T^1-K)^+}{e^{r(T-t)}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ =\ & S_t^1\int_0^\infty \mathrm{E}^1\left[\left(\exp\left\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}-k(\sigma)\right)^+\middle|\mathcal{F}_t\right]\lambda_t(d\sigma) \\ =\ & S_t^1\int_0^\infty \mathrm{E}^1\left[\exp\left\{\sigma(W_T^Q-W_t^Q)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\mathbf{1}_{\{W_T^Q-W_t^Q>\hat{x}_t\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\lambda_t(d\sigma) \\ & -Ke^{-r(T-t)}\mathrm{P}^1(W_T^Q-W_t^Q>\hat{x}_t|\mathcal{F}_t)\ \left(\because S_t^1\int_0^\infty k(\sigma)\lambda_t(d\sigma)=Ke^{-r(T-t)}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで補題 3.19 より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^1\left[\exp\left\{\sigma(W_T^Q - W_t^Q) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\mathbf{1}_{\{W_T^Q - W_t^Q > \hat{x}_t\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\hat{x}_t}^{\infty}\exp\left\{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(T-t)}\right\}dx \\
= \;& \Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sigma\sqrt{T-t}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^1(W_T^Q - W_t^Q > \hat{x}_t|\mathcal{F}_t) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\hat{x}_t}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(T-t)}\right\}dx \\
&=\; \Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{(T-t)}}\right)
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\mathrm{E}^1\left[\frac{(S_T^1 - K)^+}{e^{r(T-t)}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = S_t^1\int_0^{\infty}\Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sigma\sqrt{T-t}\right)\lambda_t(d\sigma) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}}\right)$$

となる。 ▮

注意 3.20. 筆者は

$$V_{1,K}(t,T) = \mathrm{E}^1\left[\frac{(S_T^1 - K)^+}{e^{r(T-t)}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

は C に依らないと予想している。C をパラメータと見るために、危険資産 S^1 を $S_t^1 = S_t^{1,C}$ と表すことにする。

$$\mathrm{P}^{1,C}(A) := \mathrm{E}\left[\mathbf{1}_A\exp\left(-CW_t - \frac{1}{2}C^2t\right)\right],\ A \in \mathcal{F}_t$$

と定めれば、ギルザノフの定理より $\mathrm{P}^{1,C}$ の下で $W_t + C_1t$ はブラウン運動になる。故に $C_1 \neq C_2$ とすると

$$\mathrm{P}^{1,C_1}(W_t + C_1t \in A) = \mathrm{P}^{1,C_2}(W_t + C_2t \in A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}^{1,C_1}\left(S_0e^{rt}\int_0^{\infty}\exp\left\{\sigma(W_t + C_1t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}\lambda(d\sigma) \in A\right) \\
= \;& \mathrm{P}^{1,C_2}\left(S_0e^{rt}\int_0^{\infty}\exp\left\{\sigma(W_t + C_2t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}\lambda(d\sigma) \in A\right)
\end{aligned}$$

となるからである。違う確率測度の下で同分布という理由からだけでは、筆者の予想は正当化できないが、λ が単位分布の時の結果である Black-Scholes の公式では, 筆者の予想は正しい。λ が 2 点に $\frac{1}{2}$ ずつ重みをもつ場合は Ishimura and Sakaguchi[IS] で、偏微分方程式論の立場から詳細に述べられているが、その表示だけからは筆者の予想が正しいかは分からない。

第4章　最適投資問題

この章では、最適投資問題について述べる。ここで言う最適投資問題とは、「二つの資産に自分の資金を分散投資することにより、満期時の自分の満足度を最大にする戦略を見つける」という意味である。

4.1　最適投資問題の定式化

この節では、一般の金融市場モデルに対して最適投資問題を定式化し、その解を与える。まず2.1節と同様に金融市場を定義する。

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を完備確率空間、W を１次元標準ブラウン運動とする。$T \geq 0$ を満期、$\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W(s); 0 \leq s \leq t\}$, $\mathcal{F}(t) := \sigma\{\mathcal{F}^W(t) \cup \mathcal{N}\}$ とする。ただし、$\mathcal{N}$ は $\mathcal{F}^W(T)$ に含まれる零集合の族とする。

安全資産（第０資産）S_0 を

$$S_0(t) := e^{rt} (\Longleftrightarrow dS_0(t) = rS_0(t)dt),\ t \in [0, T] \tag{4.1}$$

と定義する。危険資産（第１資産）S_1 を連続で $S_1(t) > 0,\ t \in [0, T]$ かつ、

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= S_1(0) + \int_0^t b(s)S_1(s)ds + \int_0^t \sigma(s)S_1(t)dW_s \\ &(\Longleftrightarrow dS_1(t) = b(t)S_1(t)dt + \sigma(t)S_1(t)dW_t),\ t \in [0, T] \end{aligned} \tag{4.2}$$

という形で表される半マルチンゲールとする。

ただし、$\{b(t)\}$ は発展的可測であり $\int_0^T |b(t)|dt < \infty\ a.s$, $\{\sigma(t)\}$ は発展的可測であり $\int_0^T |\sigma(t)|^2 dt < \infty\ a.s$ を満たす確率過程である。

さらにこの節では、金融市場は標準的であることを仮定し、$\theta(t) := \frac{b(t)-r}{\sigma(t)}$, $W_0(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds,\ Z_0(t) := \exp\{-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds\}$, $H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}$ とし、$\mathrm{P}_0(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z_0(T)],\ A \in \mathcal{F}_T$ と定める。

また、$x \in \mathbb{R}$, (π_0, π_1) をポートフォリオ過程、(x, π_0, π_1) に付随する資産価値過程は x-financed であることを仮定する。このとき、資産価値過程を $X^{x,\pi_0,\pi_1}(t)$ で表すと、

$$X^{x,\pi_0,\pi_1}(t) = xS_0(t) + S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi_1(u)\sigma(u)dW_0(u)$$

となる。以後 x-financed を仮定するので、ポートフォリオ過程 (π_0, π_1) のうち π_1 **のみに注目し、π_1 を π と置き換えて話を進める。**また、ポートフォリオ過程と言ったら、この π を指すことにする。

つまり、(x, π) に付随する資産価値過程 $X^{x,\pi}$ は、

$$X^{x,\pi}(t) = xS_0(t) + S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_0(u)$$

と表される。

定義 4.1. $x \geq 0$, π をポートフォリオ過程とする。このとき、$t \in [0,T]$ に対して $X^{x,\pi}(t) \geq 0$ を満たすならば、π は x で**許容可能 (π is admissible at x)** という。

注意 4.2. π が x で許容可能ならば、$xS_0(t) + S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_0(u) \geq 0$ 、つまり、

$$\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_0(u) \geq -x,\ t \in [0,T]$$

となるので、$N(t) := \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_0(u)$ は P_0 のもとで、下に有界な局所マルチンゲールになる。よって命題 1.8 より N は P_0 のもとで優マルチンゲールになり、$\mathrm{E}_0[N(T)] \leq \mathrm{E}_0[N(0)] = 0$ である。一方、

$$\mathrm{E}_0[N(T)] = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)} - x\right)Z_0(T)\right] = \mathrm{E}[X^{x,\pi}(T)H_0(T)] - x$$

だから、$\mathrm{E}[X^{x,\pi}(T)H_0(T)] \leq x$ が成り立つ。これを**予算制約条件 (budget constraint)** という。

注意 4.3. ([KS2] 3.3.4 Remark) $\tau_0 = T \wedge \inf\{t \in [0,T]\ ; X^{x,\pi}(t) = 0\}$ とすると、$\omega \in \{\tau_0 < T\}$ に対して、ほとんど確実に

$$X^{x.\pi}(t, \omega) = 0, \quad t \in [\tau_0(\omega), T]$$

となる。

証明.

$$\begin{aligned}
H_0(t)X^{x,\pi}(t) &= Z_0(t)\frac{X^{x,\pi}(t)}{S_0(t)} \\
&= \exp\left\{-\int_0^t \theta(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds\right\} \\
&\quad \times\left\{\int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_u + x + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)\theta(u)du\right\}
\end{aligned}$$

$N_t^1 := -\int_0^t \theta(s)dW_s,\ A_t^1 := -\frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds,\ N_t^2 := \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)dW_u,$
$A_t^2 := x + \int_0^t \frac{1}{S_0(u)}\pi(u)\sigma(u)\theta(u)du$ とすると、伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
d(H_0(t)X^{x,\pi}(t)) &= H_0(t)X^{x,\pi}(t)d(N_t^1 + A_t^1) + Z_0(t)d(N_t^2 + A_t^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}H_0(t)X^{x,\pi}d\left\langle N^1\right\rangle_t + Z_0(t)d\left\langle N^1, N^2\right\rangle_t \\
&= H_0(t)X^{x,\pi}(t)\{-\theta(t)\}dW_t + H_0(t)X^{x,\pi}(t)\left\{-\frac{1}{2}\theta(t)^2\right\}dt \\
&\quad + Z_0(t)\left\{\frac{1}{S_0(t)}\pi(t)\sigma(t)\right\}dW_t + Z_0(t)\left\{\frac{1}{S_0(t)}\pi(t)\sigma(t)\theta(t)\right\}dt \\
&\quad + \frac{1}{2}H_0(t)X^{x,\pi}(t)\{\theta(t)^2\}dt + Z_0(t)\left\{-\frac{1}{S_0(t)}\pi(t)\sigma(t)\theta(t)\right\}dt \\
&= H_0(t)\{\pi(t)\sigma(t) - X^{x,\pi}(t)\theta(t)\}dW_t
\end{aligned}
$$

よって、$H_0(t)X^{x,\pi}(t) \geq 0$ かつ $H_0X^{x,\pi}$ は P の下で局所マルチンゲールであるから、命題 1.8 より $H_0X^{x,\pi}$ は P の下で優マルチンゲールである。故に、$H_0X^{x,\pi}$ は非負優マルチンゲールであるから、命題 1.5 より示せた。 ▮

予算制約条件は、π が x で許容可能であることの必要条件であるだけではなく、次の意味で十分条件にもなっている。

定理 4.4. ([KS2] 3.3.5 Theorem) $x \geq 0$ とし、ξ を非負 $\mathcal{F}_t$-可測な確率変数で $\mathrm{E}[H_0(T)\xi] = x$ を満たすとする。このとき、x で許容可能かつ $\xi = X^{x,\pi}(T)$ を満たすポートフォリオ π が存在する。

証明. $t \in [0, T]$ に対して $M(t) := \mathrm{E}[H_0(T)\xi|\mathcal{F}_t]$ とすると、$M(t)$ はマルチンゲールであり、$M(0) = x$ である。よって、マルチンゲール表現定理より、発展的可測で $\int_0^T |\psi(u)|^2 du < \infty$ a.s を満たす確率変数 $\{\psi(t)\}_{0\leq t\leq T}$ が存在して、$M(t) = x + \int_0^t \psi(u)dW_u$ と表現できる。特に、$M(t)$ はほとんど確実に連続であり、$\|M\|_\infty := \max_{0\leq t\leq T}|M(t)| < \infty$ a.s となる。同様に、$\kappa := \max_{0\leq t\leq T}\frac{1}{Z_0(t)} < \infty$ a.s となる。$X(t) := \frac{M(t)}{H_0(t)}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{X(t)}{S_0(t)} &= \frac{M(t)}{Z_0(t)} \\
&= \frac{x + \int_0^t \psi(u)dW_u}{\exp\{-\int_0^t \theta(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds\}}
\end{aligned}
$$

となるので、$N_t^1 := \int_0^t \psi(u)dW_u,\ N_t^2 := -\int_0^t \theta(s)dW_s,\ A_t^2 := -\frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds$ として

伊藤の公式を用いると、

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{X(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{1}{Z_0(t)}dN_t^1 - \frac{M(t)}{Z_0(t)}dN_t^2 - \frac{M(t)}{Z_0(t)}dA_t^2 \\
&\quad -\frac{1}{Z_0(t)}d\left\langle N^1, N^2\right\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{M(t)}{Z_0(t)}d\left\langle N^2\right\rangle_t \\
&= \frac{\psi(t)}{Z_0(t)}dW_t + \frac{M(t)}{Z_0(t)}\theta(t)dW_t \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{M_t}{Z_0(t)}\theta(t)^2dt + \frac{1}{Z_0(t)}\psi(t)\theta(t)dt + \frac{1}{2}\frac{M(t)}{Z_0(t)}\theta(t)^2dt \\
&= \frac{1}{S_0(t)}\left[\frac{1}{H_0(t)\sigma(t)}\{\psi(t)+M(t)\theta(t)\}\right]\sigma(t)dW_0(t)
\end{aligned}
$$

となる。よって、$\pi(t) := \frac{1}{H_0(t)\sigma(t)}\{\psi(t)+M(t)\theta(t)\}$ とおけば、

$$
X(t) = xS_0(t) + S_0(t)\int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi(s)\sigma(s)dW_0(s) \tag{4.3}
$$

と表示できる。次に、この π が (2.4), (2.5) を満たすことを確認する。

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |\pi(t)(b(t)-r)|dt &= \int_0^T \left|\frac{\theta(t)}{H_0(t)}\{\psi(t)+M(t)\theta(t)\}\right|dt \quad (\because b(t)-r=\theta(t)\sigma(t)) \\
&\leq e^{rT}\kappa\{\|\psi\|_2\|\theta\|_2 + \|\theta\|_2^2\|M\|_\infty\} < \infty \\
\int_0^T |\sigma(t)\pi(t)|^2dt &= \int_0^T \left|\frac{1}{H_0(t)}\{\psi(t)+M(t)\theta(t)\}\right|^2dt \\
&\leq e^{2rT}\kappa^2\int_0^T(\psi(t)+M(t)\theta(t))^2dt \\
&\leq e^{2rT}\kappa^2[\|\psi\|_2^2 + 2\|M\|_\infty\|\psi\|_2\|\theta\|_2 + \|M\|_\infty^2\|\theta\|_2^2] < \infty
\end{aligned}
$$

となり、確かに満たす。また、

$$
X(t) = \frac{M(t)}{H_0(t)} \geq 0 \tag{4.4}
$$

$$
X(T) = \frac{M(T)}{H_0(T)} = \frac{1}{H_0(T)}\mathrm{E}[H_0(T)\xi|\mathcal{F}_T] = \xi \quad \text{a.s} \tag{4.5}
$$

よって、(4.3), (4.4), (4.5) より示せた。 ▮

次に**効用関数 (Utility function)** について述べる。効用関数は、満足度、もしくはリスク選好を表す関数と解釈できる。本修士論文では、一般的な効用関数については述べず、次の二つのみ扱う。$p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ に対して、

$$
U_{(p)}(x) = \begin{cases} \frac{x^p}{p} & x > 0 \\ \lim_{\xi\downarrow 0}\frac{\xi^p}{p} & x = 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}
$$

また、

$$U_{(0)}(x) = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ -\infty & x \leq 0 \end{cases}$$

とする。$U_{(p)}(p \in (-\infty,1)\backslash\{0\})$ を**ベキ効用関数**、$U_{(0)}$ を**対数効用関数**という。
$U_{(p)}(p \in (-\infty,1))$ は次のような性質を持つ。([KS2] 3.4 Section)

(i) $\inf\{x \in \mathbb{R}; U_{(p)}(x) > -\infty\} = 0$

(ii) $U'_{(p)}(0+) := \lim_{x\downarrow 0} U'_{(p)}(x)$ とすると、$U'_{(p)}(0+) = \infty$

(iii) $U'_{(p)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ は全射で単調減少な連続関数であるから、$U'_{(p)}$ の逆関数 $I_{(p)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在する。

(iv) $\tilde{U}_{(p)}(y) := \sup\{U_{(p)}(x) - xy\},\ y > 0$ とすると、$\tilde{U}_{(p)}(y) = U_{(p)}(I_{(p)}(y)) - yI_{(p)}(y)$ となる。

(v) $\mathcal{X}(y) := \mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(yH_0(T))],\ y > 0$ とすると、$\mathcal{X} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ は全射で単調減少な連続関数であるから、$\mathcal{X}$ の逆関数 $\mathcal{Y} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在する。

次に最適投資問題 ([KS2] 3.3.5 Problem) を定義する。

- $\mathcal{A}(x) := \{\pi;$ ポートフォリオで $X^{x,\pi}(t) \geq 0,\ t \in [0,T]$ a.s$\}$
- $\mathcal{A}'(x) := \{\pi \in \mathcal{A}(x); \mathrm{E}\min[0, U_{(p)}(X^{x,\pi}(T))] > -\infty\}$

$$V(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}'(x)} EU_{(p)}(X^{x,\pi}(T)) \tag{4.6}$$

(4.6) の右辺の上限を達成するポートフォリオ $\pi \in \mathcal{A}'(x)$ を探すことを**最適投資問題**という。

最適投資問題の解を与える前に予算制約条件と定理 4.4 を考慮して、「$\mathrm{E}[U_{(p)}(\xi)]$ を $\mathrm{E}[H_0(T)\xi] \leq x$ の下で最大にする非負 $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数 ξ を求める」という問題を考える。この問題に対しては、ラグランジュの未定係数法の考えを用いることで解ける。まず $y > 0$ とし、

$$\mathrm{E}[U_{(p)}(\xi)]] + y(x - \mathrm{E}[H_0(T)\xi]) \tag{4.7}$$

を最大にする非負 $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数 ξ を求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U_{(p)}(\xi)] + y(x - \mathrm{E}[H_0(T)\xi]) &= xy + \mathrm{E}[U_{(p)}(\xi) - yH_0(T)\xi] \\ &\leq xy + \mathrm{E}[\tilde{U}_{(p)}(yH_0(T))] \quad (\because U \text{ の性質}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) で等号を満たすのは、$\xi = I_{(p)}(yH_0(T))$ のときである。この ξ を $\mathrm{E}[H_0(T)\xi] \leq x$ に代入すると、

$$\mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(yH_0(T))] \leq x \Leftrightarrow \mathcal{X}(y) \leq x \tag{4.9}$$

となり、(4.9) で等号を満たすのは、$y = \mathcal{Y}(x)$ である。よって $\xi = I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))$ とすれば、(4.7) は最大になり、かつ (4.7) の第二項は 0 になる。さらに $\xi = I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))$ は $\mathrm{E}[H_0(T)\xi] = x$ を満たす非負 $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数なので、定理 4.4 より $X^{x,\pi}(T) = \xi$ となるようなポートフォリオ $\pi \in \mathcal{A}(x)$ が存在する。故に、$X^{x,\pi}(T) = I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))$ を満たすポートフォリオ π が最適投資問題の解の候補である。

定理 4.5. ([KS2] 3.6.3 Theorem) $X^{x,\pi}(T) = I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))$ を満たす $\pi \in \mathcal{A}'(x)$ が存在して、その π が最適投資問題の解である。

証明. 定理 4.4 より $X^{x,\pi}(T) = I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))$ を満たす $\pi \in \mathcal{A}(x)$ が存在することが分かるので、この π が $\pi \in \mathcal{A}'(x)$ であることを示す。U の性質より

$$\begin{aligned}
U_{(p)}(X^{x,\pi}(T)) &= U_{(p)}(I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))) \\
&= \tilde{U}_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) + \mathcal{Y}(x)H_0(T)I_{(P)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \\
&\geq U_{(p)}(I(c)) - cI(c) + \mathcal{Y}(x)H_0(T)I_{(P)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \quad (c > 0) \\
&\geq U_{(p)}(I(c)) - cI(c) \quad (c > 0)
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\min[0, U_{(p)}(X^{x,\pi}(T))] &\geq \min[0, U_{(p)}(I(c)) - cI(c)] \quad (c > 0) \\
&> -\infty
\end{aligned}$$

より、$\pi \in \mathcal{A}'(x)$ となる。次に最適投資問題の解であることを示す。U の性質より、

$$\begin{aligned}
& U_{(p)}(I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))) - \mathcal{Y}(x)H_0(T)I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \\
=\ & \tilde{U}_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)) \\
\geq\ & U_{(p)}(X^{x,\bar{\pi}}(T)) - \mathcal{Y}(x)H_0(T)X^{x,\bar{\pi}}(T) \quad (\bar{\pi} \in \mathcal{A}'(x))
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}U_{(p)}(X^{x,\pi}(T)) &= \mathrm{E}U_{(p)}(I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))) \\
&\geq \mathrm{E}U_{(p)}(X^{x.\bar{\pi}}(T)) - \mathcal{Y}(x)\{\mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))] - \mathrm{E}[H_0(T)X^{x,\bar{\pi}}(T)]\} \\
&\quad (\bar{\pi} \in \mathcal{A}'(x)) \\
&= \mathrm{E}U_{(p)}(X^{x,\bar{\pi}}(T)) - \mathcal{Y}(x)\{x - \mathrm{E}[H_0(T)X^{x.\bar{\pi}}(T)]\} \\
&\quad (\because \mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T))] = x) \\
&\geq \mathrm{E}U_{(p)}(X^{x,\bar{\pi}}(T))(\because \text{予算制約条件})
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって示された。 ∎

定理 4.5 と定理 4.4 より最適投資問題の解の表示が得られる。

系 4.6. 最適投資問題の解 π は次のように表示される。

$$\pi(t) = \frac{1}{H_0(t)\sigma(t)}\{\psi(t) + M(t)\theta(t)\}$$

ただし、$M(t) = \mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)|\mathcal{F}_t]$、$\psi(t)$ は M のマルチンゲール表現 $M(t) = x + \int_0^t \psi(u)dW_u$ を満たすものである。

また、この最適投資問題の解 π に対して、資産価値過程 $X^{x,\pi}$ は

$$X^{x,\pi}(t) = \frac{1}{H_0(t)}M(t) = \frac{1}{H_0(t)}\mathrm{E}[H_0(T)I_{(p)}(\mathcal{Y}(x)H_0(T)|\mathcal{F}_t]$$

と表される。

4.2 具体例

以上の議論を第 3 章で定義した市場モデル

$$\begin{cases} B_t = e^{rt} \\ S_t^\alpha = S_0 e^{\alpha rt}\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma) \end{cases}$$

で考える。ただし,W は完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の 1 次元標準ブラウン運動、$\lambda \in \Lambda := \{((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)))$ 上の確率測度 $| \int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty\}$ とする。また、満期は $T > 0$ で、$t \in [0,T],\ r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ とする。フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ は $\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}^W(t) \cup \mathcal{N}\},\ t \in [0,T]$ ($\mathcal{F}^W(t) := \sigma\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$, $\mathcal{N}$ は $\mathcal{F}^W(T)$ 上の零集合の族) である。その他の記号は 4.1 節に従う。

4.2.1 $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\},\ \alpha = 1$ の時

$$\begin{aligned} I_{(p)}(y) &= y^{\frac{1}{p-1}} \\ \mathcal{X}(y) &= E[H_0(T)I_{(p)}(yH_0(T))] = y^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{E}[(H_0(T))^{\frac{p}{p-1}}] = y^{\frac{1}{p-1}}\mathcal{X}(1) \\ \mathcal{Y}(x) &= \left(\frac{x}{\mathcal{X}(1)}\right)^{p-1}, \quad M(t) = \frac{x}{\mathcal{X}(1)}\mathrm{E}[H_0(T)^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta(t) = C$ より、

$$H_0(T)^{\frac{p}{p-1}} = \exp\left(-\frac{p}{p-1}rT\right)\exp\left\{-\frac{p}{p-1}CW_T - \frac{1}{2}\frac{p}{p-1}C^2T\right\} = D(T)m(T)$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned} D(T) &= \exp\left\{\frac{p}{1-p}rT+\frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2}C^2T\right\} \\ m(T) &= \exp\left\{-\frac{p}{p-1}CW_T-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2C^2T\right\} \end{aligned}$$

ここで $D(T)$ は $\omega\in\Omega$ に関して定数で、M はマルチンゲールになるので、

$$\mathrm{E}[H_0(T)^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{F}_t]=D(T)m(t)$$

であり、さらに

$$\mathcal{X}(1)=\mathrm{E}[H_0(T)^{\frac{p}{p-1}}]=\mathrm{E}[D(T)m(T)]=D(T)$$

となる。よって、

$$M(t)=xm(t),\quad X^{x,\pi}(t)=\frac{xm(t)}{H_0(t)}$$

となるが、伊藤の公式より $m(t)=1-\frac{p}{p-1}C\int_0^t m(s)dW_s$ であるから、

$$M(t)=x+\int_0^t\left(-\frac{xp}{p-1}Cm(s)\right)dW_s$$

となるので $\psi(t)=-\frac{xp}{p-1}Cm(t)$ である。故に、

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \frac{1}{H_0(t)\sigma(t)}\left(-\frac{xp}{p-1}Cm(t)+xCm(t)\right) \\ &= \frac{1}{H_0(t)\sigma(t)}\frac{xCm(t)}{1-p} && (4.10) \\ X^{x,\pi}(t) &= \frac{1}{H_0(t)}xm(t) && (4.11) \\ X^{x,\pi}(t)-\pi(t) &= \frac{xm(t)}{H_0(t)}\left(1-\frac{C}{\sigma(t)(1-p)}\right) && (4.12) \end{aligned}$$

となる。以上は任意の $\lambda\in\Lambda$ について成り立つ。

(4.10) は、危険資産 S^1 については、常に正の保有量を持つということを意味している。(4.12) は、安全資産 B は λ の台の下限が $\frac{C}{1-p}$ より大きい時は常に正の保有量を持つことを意味する。

「$\alpha=1$ のときは、危険資産は金利から受ける影響があるので、成長率は安全資産に比べて小さくない」ということと、「λ の台の下限が正の定数で下から抑えられる時は、危険資産の変動がある程度大きい」ということから、この例は直感にある程度一致する。時刻 t での資産過程価値 $X^{x,\pi}(t)$ の密度関数 $f(a)$ $(a>0)$ は,

$$f(a)=\frac{1-p}{\sqrt{2\pi t}Ca}\exp\left\{-\frac{(1-p)^2(\log a)^2}{2tC^2}\right\}$$

平均、分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^{x,\pi}(t)] &= x\exp\left\{\left(r+\frac{1}{1-p}C^2\right)t\right\} \\
\mathrm{V}[X^{x,\pi}(t)] &= x^2\exp\left\{2\left(r+\frac{C^2}{1-p}\right)t\right\}\left\{\exp\left(\frac{C^2}{(1-p)^2}t\right)-1\right\}
\end{aligned}$$

4.2.2　$p=0,\ \alpha=1$ の時

$$\begin{aligned}
I_{(0)}(y) &= \frac{1}{y} \\
\mathcal{X}(y) &= E[H_0(T)I_{(0)}(yH_0(T))] = \frac{1}{y} \\
\mathcal{Y}(x) &= \frac{1}{x},\quad M(t)=x
\end{aligned}$$

となる。特に $\psi(t)=0$ である。$\theta(t)=C$ より

$$\pi(t) = \frac{xC}{H_0(t)\sigma(t)} \tag{4.13}$$

$$X^{x,\pi}(t) = \frac{x}{H_0(t)} = x\exp\left\{CW_t+\left(r+\frac{1}{2}C^2\right)t\right\} \tag{4.14}$$

$$X^{x,\pi}(t)-\pi(t) = \frac{x}{H_0(t)}\left(1-\frac{C}{\sigma(t)}\right) \tag{4.15}$$

(4.13) は、危険資産 S^1 については、常に正の保有量を持つということを意味している。(4.15) は、安全資産 B は λ の台の下限が C より大きい時は常に正の保有量を持つことを意味する。これは例 4.2.1 と同様である。時刻 t での資産過程価値 $X^{x,\pi}(t)$ の密度関数 $f(a)$ $(a>0)$ は

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}Ca}\exp\left\{-\frac{(\log a)^2}{2tC^2}\right\}$$

平均、分散はそれぞれ

$$\mathrm{E}[X^{x,\pi}(t)] = x\exp\{(r+C^2)t\}, \mathrm{V}[X^{x,\pi}(t)] = x^2\exp\{2(r+C^2)t\}(\exp(C^2t)-1)$$

となる。例 4.2.1 を合わせると、以上の量は p に関して連続であることが分かる。また、対数効用関数の場合、ベキ効用関数よりも $M(t)$ や $\psi(t)$ の表示が明快であるため、一般の金融市場モデルに対しても分析が簡単である可能性がある。

4.2.3 $p \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$, $\alpha < 1$, λ が単位分布の時

$\alpha < 1$ の場合、一般の $\lambda \in \Lambda$ に対しては、上のような具体的な表示が難しいので、λ が $\bar{\sigma}$ に集中した単位分布の場合のみを扱う。この時 $\theta(t) = \bar{C} := C - \frac{r(1-\alpha)}{\bar{\sigma}}$ となるので、4.2.1 と同様にして

$$
\begin{aligned}
M(t) &= x\exp\left\{-\frac{p}{p-1}\bar{C}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2\bar{C}^2 t\right\} \\
&:= x\bar{m}(t) \\
&= x + \int_0^t \left(-\frac{xp}{p-1}\bar{C}\bar{m}(s)\right)dW_s
\end{aligned}
$$

となる。よって、$\psi(t) = -\frac{xp}{p-1}\bar{C}\bar{m}(t)$ となるので

$$
\pi(t) = \frac{1}{H_0(t)\bar{\sigma}}\frac{x\bar{C}\bar{m}(t)}{1-p} \tag{4.16}
$$

$$
X^{x,\pi}(t) = \frac{1}{H_0(t)}x\bar{m}(t) \tag{4.17}
$$

$$
X^{x,\pi}(t) - \pi(t) = \frac{x\bar{m}(t)}{H_0(t)}\left(1 - \frac{\bar{C}}{\bar{\sigma}(1-p)}\right) \tag{4.18}
$$

(4.16) は $\bar{C} > 0$ のとき、つまり $C > \frac{r(1-\alpha)}{\bar{\sigma}}$ のときは、危険資産 S^α を正の保有量を持つことを示している。これを $\bar{\sigma}$ について解くと、$\bar{\sigma} > \frac{r(1-\alpha)}{C}$ になり、α に対して、$\bar{\sigma}$ を十分大きく取れば成り立つ。逆に $\bar{C} < 0$ のとき、つまり $C < \frac{r(1-\alpha)}{\bar{\sigma}}$ のときは、危険資産 S^α を負の保有量を持つことを示している。これを $\bar{\sigma}$ について解くと、$\bar{\sigma} < \frac{r(1-\alpha)}{C}$ になり、α に対して、$\bar{\sigma}$ を十分小さく取れば成り立つ。これは $\alpha < 1$ で λ が原点近傍に重み 1 を持つ場合は、平均的な成長率が小さく、大もうけする機会も少ないことから、安全資産に比べて危険資産が魅力的でないことを表している。

注意 4.7. $\alpha \neq 1$ かつ任意の $\lambda \in \Lambda$ に対しては、例のような具体的な結果は得られない。特に $p \neq 0$ の場合, 系 4.6 の $M(t)$ やそのマルチンゲール表現 $M(t) = x + \int_0^t \psi(u)dW_u$ に現れる $\psi(t)$ を条件付き期待値や確率積分を用いずに、ブラウン運動汎関数として表示するのは困難である。Ocone and Karatzas[OK] では、マリアヴァン解析における**クラーク (Clark) の公式**を用いて、$M(t)$ や $\psi(t)$ が確率積分による表示が可能であることが示されている。ここでは、ブラウン運動のマルコフ性を用いて、同様の結果を示す。

命題 4.8. ([KOL] pp. 127) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をボレル可測で

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)|f(x)|dx < \infty
$$

を満たすと仮定する。このとき、$t < T$ に対して、

$$\mathrm{E}[f(W_T)|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[f(W_t)] + \int_0^t \frac{\partial V_T}{\partial x}(s, W_s)dW_s$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} V_T(t,x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} p(T-t;x,y)f(y)dy \\ p(t;x,y) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\} \end{aligned}$$

とする。

証明. ブラウン運動のマルコフ性 (定理 5.22) より、

$$\mathrm{E}[f(W_T)|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_{W_t}[f(W_{T-t})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(T-t;W_t,y)f(y)dy = V_T(t,W_t)$$

となる。また $V_T(t,x)$ は

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x^2} = 0$$

を満たす。よって、伊藤の公式より

$$V_T(t,W_t) = V_T(0,0) + \int_0^t \frac{\partial V_T}{\partial x}(s,W_s)dW_s$$

となり示せた。特に

$$\frac{\partial V_T}{\partial x}(t,x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}(x-y)\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)}\right\}f(y)dy$$

となる。 ∎

注意 4.9. Karatzas and Shreve [KS2] Section 3.8 では、$\phi(t)$ が決定論的 ($\omega \in \Omega$ に依らない) 関数ならば、最適投資問題は Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式と関係があることが述べられている。しかし、$\phi(t)$ が決定論的になる $\lambda \in \Lambda$ は限られている。

命題 4.10. $\lambda \in \Lambda_2$ とする。このとき、$t > 0$ で $\phi(t)$ が決定論的になる必要十分条件は、λ が単位分布ということである。

証明. λ が単位分布のとき、$\phi(t)$ が決定論的になることは明らか。$\phi(t)$ が決定論的であることを仮定する。$x \in \mathbb{R}$ に対して、$((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)))$ 上の確率測度 μ_x を

$$\mu_x(A) = \frac{\int_A \exp\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)},\ A \in \mathcal{B}((0,\infty))$$

で定義し、μ_x による期待値を $\|f(\sigma)\|_x := \int_0^\infty f(\sigma)\mu_x(d\sigma)$ と書くと、$\phi(t) = \|\sigma\|_{W_t+Ct}$ であり、さらに

$$\frac{d\|\sigma\|_x}{dx} = \|(\sigma - \|\sigma\|_x)^2\|_x \tag{4.19}$$

より、$\|\sigma\|_x$ は x に関して、非減少である。ここで、任意の $a < b$ に対して、$W_t \geq b - Ct$ ならば、$\|\sigma\|_{W_t+Ct} \geq \|\sigma\|_b$ であり、$W_t \leq a - Ct$ ならば、$\|\sigma\|_{W_t+Ct} \leq \|\sigma\|_a$ だが、$W_t \geq b - Ct$ も $W_t \leq a - Ct$ も P の下で確率正で起きて、仮定より $\phi(t) = \|\sigma\|_{W_t+Ct}$ は $\omega \in \Omega$ に依らないので、特に $\|\sigma\|_a = \|\sigma\|_b,\ b > a$ となる。よって、(4.19) から

$$0 = \|\sigma\|_b - \|\sigma\|_a = \int_a^b \frac{d}{dx}\|\sigma\|_x dx = \int_a^b \|(\sigma - \|\sigma\|_x)^2\|_x dx$$

となる。$\|(\sigma - \|\sigma\|_x)^2\|_x$ は非負かつ x について連続であるから、$\|(\sigma - \|\sigma\|_x)^2\|_x = 0$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ必要がある。$\|\cdot\|_x$ は μ_x についての期待値で、$(\sigma - \|\sigma\|_x)^2$ は非負より、

$$\sigma - \|\sigma\|_x = 0$$

が a.e - μ_x で成り立つ。$\|\sigma\|_x$ は σ に依らない定数だから、μ_x の重みは１点に集中している。よって、λ の重みも１点に集中している。 ∎

第5章　補遺

この章では、本文の中で扱えなかった確率論に関する基本事項を述べる。

定義 5.1. $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実数値確率過程とする。

(i)　任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{P}[X_t = Y_t] = 1$ であるとき、X は Y の**修正 (modification)** という。

(ii)　$\mathrm{P}[$任意の $t \geq 0$ に対して、$X_t = Y_t] = 1$ であるとき、X と Y は**区別できない (indistinguishable)** という。

定義 5.2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間とし、$\mathcal{F}$ の部分集合の族 $\{\mathcal{F}_t\}$ が次を満たすとする。

(i)　$t \geq s \geq 0$ に対して $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$

(ii)　$t \geq$ に対して $\mathcal{F}_t$ は σ-加法族

このとき、$\{\mathcal{F}_t\}$ を**フィルトレーション (filtration)** または**フィルター**といい、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ を**フィルター付き確率空間**という。

定義 5.3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間とする。フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続 $(\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t)$ であり、$\mathcal{F}_0$ が $\mathcal{F}$ に含まれる零集合を全て含むならば、フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ は**通常の条件 (usual conditions)** を満たすという。

定理 5.4. ドゥーブの最大値不等式 (Doob's maximal inequality)([KS1] 1.3.8 Theorem) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間、フィルターは通常の条件を満たすと仮定する。ここで、$X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲールで、任意の $t \geq 0$ に対して、ほとんど確実に $X_t \geq 0$ ならば、$\beta > \alpha > 0,\ p > 1$ に対して、

$$\mathrm{E}\left(\sup_{\alpha\leq t\leq\beta} X_t\right)^p \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathrm{E}(X_\beta^p)$$

が成り立つ。

定義 5.5. $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程とする。

(i) 写像

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が可測であるとき、確率過程 X は**可測 (measurable)** であるという。

(ii) 写像

$$(s,\omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t] \otimes \mathcal{F}_t) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が各 $t \geq 0$ で可測のとき、確率過程 X は $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して、**発展的可測 (progressively measurable)** であるという。

(iii) 各 $t \geq 0$ で、X_t が $\mathcal{F}_t$ -可測確率変数であるとき、X は $\{\mathcal{F}_t\}$ に**適合している (adapted)** という。

定義 5.6. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の関数 $\sigma : \Omega \to [0,\infty]$ が**停止時刻 (stopping time)** であるとは、任意の $t \geq 0$ に対して $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が成り立つことである。

また、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の関数 $\sigma : \Omega \to [0,\infty]$ が**任意選択時刻 (optional time)** であるとは、任意の $t \geq 0$ に対して $\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t$ が成り立つことである。

命題 5.7. ([KS1] 1.2.3 Proposition) フィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ が右連続のとき、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の関数 $\sigma : \Omega \to [0,\infty]$ が停止時刻であることと、任意選択時刻であることは同値である。

命題 5.8. (**イエンセン (Jensen) の不等式**) ([KS1] 1.3.7 Problem)$X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程、$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{E}|\varphi(X_t)| < \infty$ を満たす凸関数とする。このとき、$t \geq s \geq 0$ ならば、

$$\mathrm{E}[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq \varphi(\mathrm{E}[X_t|\mathcal{F}_s])$$

が成り立つ。特に、X がマルチンゲールならば $\{\varphi(X_t)\}$ は劣マルチンゲールになる。

定義 5.9. τ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の停止時刻とする。このとき、$\mathcal{F}_\tau$ を

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}; \text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して、} A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

と定める。

命題 5.10. ([KS1] 1.2.13 Problem) τ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の停止時刻とする。このとき、$\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族で、τ は $\mathcal{F}_\tau$- 可測である。

定義 5.11. $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率過程とする。このとき、X が

$$\lim_{N\uparrow\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{\{|X_t > N|\}} |X_t(\omega)| \mathrm{P}(d\omega)$$

を満たすとき、X は**一様可積分 (uniformly integrable)** であるという。

定義 5.12. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間、フィルターは通常の条件を満たし、$X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ を右連続確率過程とする。$\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$ を満たす停止時刻 τ の全体を $\mathcal{T}$ とし、$a > 0$ に対して $\mathrm{P}(\tau \leq a) = 1$ を満たす停止時刻 τ の全体を $\mathcal{T}_a$ とする。

(i) $\{X_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ が一様可積分のとき、X は**クラス D に属する**という。

(ii) $\{X_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}_a}$ が任意の $a > 0$ に対して一様可積分のとき、X は**クラス DL に属する**という。

定義 5.13. $A = \{A_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程で $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合しているとする。このとき、以下の条件を満たすならば、A は**増加 (increasing) 過程**という。

(i) ほとんど確実に $A_0 = 0$ となる。

(ii) ほとんど確実に $t \mapsto A_t$ が非減少で右連続な関数になる。

(iii) 任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{E}(A_t) < \infty$

さらに、$A_\infty := \lim_{t\to\infty} A_t$ とし $\mathrm{E}(A_\infty) < \infty$ ならば、増加過程 A は**可積分 (integrable)** であるという。

定義 5.14. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の増加過程 $A = \{A_t\}_{t\geq 0}$ が以下の条件を満たすとき、**自然 (natural)** であるという。

任意の有界で右連続なマルチンゲール $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ と任意の $t \geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}\int_{(0,t]} M_s dA_s = \mathrm{E}\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s$$

が成り立つ。

注意 5.15. ([KS1] 1.4.6 Remarks) 任意の連続な増加過程は自然である。

定理 5.16. (**ドゥーブ-メイヤー分解 (Doob-Meyer Decomposition)**) ([KS1] 1.4.9 Probrem, 1.4.10 Theorem) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間、$\{\mathcal{F}_t\}$ は通常の条件を満たすとする。このとき、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲール $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ がクラス DL に属するならば、X は以下のように分解できる。

$$X_t = M_t + A_t$$

ただし、$M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ は右連続なマルチンゲール、$A = \{A_t\}_{t\geq 0}$ は増加過程である。また、増加過程 A は自然なものをとることができる。この付加条件の下で分解は（区別できないという意味で）一意である。

命題 5.17. ([KS1] 1.3.25 Problem) $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲールとする。このとき、$X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ がマルチンゲールになる必要十分条件は、任意の $t \geq 0$ に対して、$\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[X_0]$ が成り立つことである。

命題 5.18. ([KS1] 1.3.24 Problem) $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の右連続な劣マルチンゲールとする。このとき、τ を停止時刻とすると、$\{X_{\tau\wedge t}\}_{t\geq 0}$ は劣マルチンゲールになる。

定理 5.19. ([KS1] 3.4.6 Theorem) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間とし、$M = \{M_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ は、ほとんど確実に $\lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t = \infty$ が成り立つとする。このとき、$s \geq 0$ に対して、

$$T(s) := \inf\{t \geq 0; \langle M\rangle_t > s\},\ B_s := M_{T(s)},\ \mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T(s)}$$

とすると、$\{B_s\}_{s\geq 0}$ は１次元標準ブラウン運動であり、$\{\mathcal{G}_s\}$ は通常の条件を満たす。また、ほとんど確実に

$$M_t = B_{\langle M\rangle_t},\ t \geq 0$$

が成り立ち、$t \geq 0$ を固定すると $\langle M\rangle_t$ は $\{\mathcal{G}_s\}$ に関する停止時刻となる。

命題 5.20. ([KS1] 2.3.8 Remark 3.5 Section C) $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の１次元標準ブラウン運動とし、$T_b := \inf\{t \geq 0; W_t = b\}$ とする。このとき、$b > 0,\ \alpha > 0, t > 0$ に対して

$$\mathrm{P}(T_b \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,\ \mathrm{E}e^{-\alpha T_b} = e^{-b\sqrt{2\alpha}}$$

が成り立つ。また、

$$Z_t := \exp\left(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right),\ \mathrm{P}^{\mu}(A) := \mathrm{E}[\mathbf{1}_A Z_t],\ A \in \mathcal{F}_t$$

とすると

$$\mathrm{P}^{\mu}[T_b < \infty] = e^{\mu b}\mathrm{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\mu^2 T_b\right)\right]$$

が成り立つ。

命題 5.21. ([KS1] 3.5.7 Problem) $\mu \in \mathbb{R}$, $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の１次元標準ブラウン運動とする。$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; \mathcal{F}_t)$ 上の停止時刻 τ に対して、

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\mu W_\tau - \frac{1}{2}\mu^2 \tau\right)\right] = 1$$

が成り立つための必要十分条件は $\mathrm{P}^\mu[\tau < \infty] = 1$ である。ただし、P^μ は命題 5.20 で定義されるものである。特に、$b \in \mathbb{R},\ \mu b < 0$ のとき

$$S_b := \inf\{t \geq 0; W_t - \mu t = b\}$$

とすれば、$\mathrm{P}^\mu[S_b < \infty] = 1$ を満たす。

定理 5.22. ([KS1] 2.5.12 Theorem) $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の実数値関数列、$\{\mathrm{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}}$ を以下の性質を満たす確率測度の族とする。

(i) $F \in \mathcal{F}$ に対して、$x \mapsto \mathrm{P}^x(F)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}([0,1])$-可測になる。

(ii) $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathrm{P}^x[W_0 = x] = 1$ を満たす。

(iii) P^x の下で W は x 出発の 1 次元ブラウン運動になる。

この時、$t \geq s \geq 0$, ボレル可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathrm{E}_x[f(W_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}_{W_s}[f(W_t)]$$

が P^x-a.s で成り立つ。ただし、E_x は P^x の下での期待値である。

参考文献

[D] Richard Durrett, *Stochastic Calculus*, CRC Press (1996)

[IS] Naoyuki Ishimura and Toshi-hiko Sakaguchi, Exact solutions of a model for asset prices by K.Takaoka, *Asia-Pacific Financial Markets* **11** (2004) 445-451

[J] John C Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives Fifth Edition*, Prentice-Hall (2002)（三菱証券商品開発部訳「フィナンシャルエンジニアリング　第5版」金融財政事情研究会）

[K] Norihiko Kazamaki, On a problem of Girsanov, *Tôhoku Math. Journ* **29** (1977) 597-600

[KOL] Ioannis Karatzas, Daniel L. Ocone and Jinlu Li, An extension of Clark's formula, *Stochastics and Stochastics Reports*, Vol.**37** (1991) 127-131

[KS1] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus Second Edition*, Springer (1991)

[KS2] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer (1998)

[KT] 国友直人, 高橋明彦, 数理ファイナンスの基礎, 東洋経済新聞社 (2003)

[M] 宮原孝夫, 株価モデルとレヴィ過程, 朝倉書店 (2003)

[MM] Marek Musiela and Marek Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer (1997)

[N] 長井英生, 確率微分方程式, 共立出版 (1999)

[OK] Daniel L. Ocone and Ioannis Karatzas, A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios, *Stochastics and Stochastics Reports*, Vol.**34** (1991) 187-220

[P] Philip Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer (1992)

[T1] Koichiro Takaoka, A complete-market generalization of the Black-Scholes model, *Asia-Pacific Financial Markets* **11** (2004) 431-444

[T2] Koichiro Takaoka, An equilibrium model of of the short-term stock price behavior 「経済の数理解析」京都大学数理解析研究所講究録 **1125.**(2001) 143-157

[W] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書 (1975)