Black-Scholesモデルの拡張における
ヘッジポートフォリオの表現

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
甲斐　崇

目 次

第1章　序

本修士論文では, [8],[6] で述べられている, 次の安全資産 (債券)B と危険資産 (株)S^α からなる金融市場モデル

$$\begin{cases} B_t = e^{rt}, \\ S_t^\alpha = S_0 e^{\alpha r t} \int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma) \end{cases}$$

について考察を行う．ただし, λ は $(0,\infty)$ 上の確率測度で $\int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty$ をみたすものとする．$\{W_t\}_{t\geq 0}$ はフィルター付き完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の一次元標準ブラウン運動とする．満期を正定数 T とし, $t \in [0,T]$ とする．α は実数で, r, C, S_0 は正定数とする．ここで S^α は,

$$dS_t^\alpha = (\alpha r + C\phi(t))\, S_t^\alpha dt + \phi(t) S_t^\alpha dW_t,$$

$$\phi(t) := \frac{\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

と表示される．ただし, $\phi(t)$ は危険資産の価値の変動の大きさを表す**ボラティリティ過程**と呼ばれる確率過程で, $\phi(t)S_t^\alpha dW_t$ は確率積分の表示である．$\alpha = 1$ のときは [8] で提唱されているモデルであり, λ がディラック測度のときは Black-Scholes モデルと呼ばれるものに対応する．[8] で提唱されているモデルの特徴は, Black-Scholes モデルの現実のデータに合わない次の二点を補っていることである．一つ目は, ボラティリティ過程が時間に対して一定である点である．二つ目は, ログリターンと呼ばれる収益率の指標 $\frac{1}{t}\log(\frac{S_t}{S_0})$ が正規分布に従う点である．また, [8] で提唱されているモデルのさらなる拡張である [6] で提唱されているモデルの特徴は, 金利から受ける影響を考慮するパラメーター α を入れることによって, 市場リスク価格過程と呼ばれる確率過程が $\theta_\alpha(t) := C - \frac{r(1-\alpha)}{\phi(t)}$ となり, 定数でなくなることである．また, これらのモデルの良い点は, 大きく二つある．一つ目は**裁定機会が存在しない**ことである．裁定機会が存在するとは, 「元手０から投資を始めて, 確率 1 で損をすることなく, かつ, 確率正で利益を得ることが可能な投資の方法が存在する」ということである．二つ目は**リスク中立確率の存在**である．S^α は, 市場リスク価格過程 $\theta_\alpha(t)$ を用いて,

$$dS_t^\alpha = rS_t^\alpha dt + \phi(t)S_t^\alpha d\left(W_t + \int_0^t \theta_\alpha(s)\, ds\right)$$

と表示できる．ここで, $\tilde{W}_t^\alpha := W_t + \int_0^t \theta_\alpha(s)ds$ がブラウン運動となるような確率測度 P_α が存在するとしよう．このような確率 P_α が存在するとき, P_α のもとで危険資産の成長率は安全資産の成長率と同じと解釈できるので, 金融市場はリスク中立であるとみなせる．このような確率測度をリスク中立確率と呼ぶ．本修士論文で扱う金融市場モデルがリスク中立確率 P_α を持つための λ の条件については [6] で詳しく議論されいる．

数理ファイナンスの目的の一つとして, ヨーロピアンコールオプション (満期に株などの有価証券を事前に決められた行使価格で買える権利) に代表されるようないわゆる金融派生商品 (デリバティブ) の適正な価格付けがある．本修士論文では, 特に満期にのみ行使できる権利であるヨーロッパ型条件付請求権について考える．適正な価格付けをする際に, 満期における権利の価値を表す確率変数 F を金融市場で複製できるか考える必要がある．つまり, 満期に資産価値 F を生み出すための, 初期資産と投資の仕方 (ポートフォリオ過程) を見つけることが必要である．ところで, 金融市場における投資の仕方 (ポートフォリオ過程) が**自己充足的**(資産価値の増減は, 金融市場での取引によってのみおこり, それ以外からの資産の流出入はないとする) であるという仮定のもと, 初期資産 x, ポートフォリオ過程 $\{\pi(t)\}_{0\leq t\leq T}$ に付随する資産価値過程 $\{X^{x,\pi}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ は, $X^{x,\pi}(t) = e^{rt}x + \int_0^t e^{r(t-s)}\pi(s)\phi(s)\, d\tilde{W}_s^\alpha$ となる．F を複製するとは $X^{x,\pi}(T) = F$ となる x, π を求めることである．特に, この π を F の**ヘッジポートフォリオ**と呼ぶ．$X^{x,\pi}(T)$ の表示から, F を複製するためは, 確率変数 F を確率 P_α のもとでの一次元標準ブラウン運動 $\tilde{W}^\alpha$ に関する確率積分で表現することが必要である．そのような表現の存在自体はマルチンゲール表現定理などの定理で保証される．しかしながら, それらの定理は被積分関数の具体的表現を与えるものではない．

本修士論文では, F と θ_α に適当な条件を付加することで, 被積分関数の表現を得る**クラーク・オコンの公式**の導出について述べる．また, 行使価格 q のヨーロピアンコールオプション $F = [S_T^\alpha - q]^+$ のヘッジポートフォリオ π を表現する問題を扱う．特に, Black-Scholes モデルについては, ヘッジポートフォリオ π の表現が知られている．本修士論文では, $\alpha = 1$ のとき, 拡張のモデルにおいて, $F = [S_T^1 - q]^+$ が P_1 のもとでの一次元標準ブラウン運動 $\tilde{W}^1$ と適当なボレル可測関数 f を用いて $F = f(\tilde{W}_T^1)$ となることに注目し, 二つの方法でヘッジポートフォリオの表現を与えた．一つ目はクラーク・オコンの公式の拡張を用いたものである．二つ目は, ブラウン運動のマルコフ性と伊藤の公式から導かれる表現を用いたものである．どちらの方法でも, 次の定理が得られる．

定理 1.1. $\alpha = 1$ とし, $F = [S_T^1 - q]^+$ とする．任意の $\int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty$ を満たす $(0,\infty)$ 上の確率測度 λ に対して,

$$F = E_1[F] + \int_0^T \left[e^{r(T-t)} S_t^1 \int_0^\infty \sigma\Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma) \right] d\tilde{W}_t^1$$

が成り立つ. よって, ヨーロピアンコールオプションのヘッジポートフォリオは,

$$\pi(t) = \frac{S_t^1}{\phi(t)} \int_0^\infty \sigma \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma), \quad 0 \le t < T.$$

ただし, $\tilde{W}_t^1 = W_t + Ct$ で, P_1 は $P_1(A) = E\left[\exp\left\{-CW_T - \frac{1}{2}C^2T\right\} 1_A\right]$ $(A \in \mathcal{F}_T)$ で定義される $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度で, E_1 は P_1 についての期待値とする. また,

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy, \quad \lambda_t(d\sigma) := \frac{\exp\{\sigma \tilde{W}_t^1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma \tilde{W}_t^1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

とし, $\hat{x}_t = \hat{x}_t(\tilde{W}_t^1)$ は, 次の x に関する方程式の解である.

$$S_t^1 e^{r(T-t)} \int_0^\infty \exp\left\{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\lambda_t(d\sigma) = q.$$

特に $\lambda = \delta_{\sigma_0}$ のときは, Black-Scholes の公式から得られる表現 $\pi(t) = S_t^1 \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma_0)$ と一致する.

次に本修士論文の構成について述べる. 2 章では金融市場とそこでの取引等の数学的な定式化について述べる. 3 章では確率変数の確率積分表示するとき, その被積分関数の表現を与えるクラーク・オコンの公式の導出について述べる. 4 章では, 本修士論文で扱うモデルの性質について述べ, さらに主結果であるヨーロピアンコールオプションのヘッジポートフォリオの表現の導出をする. 5 章では確率過程に関する基本的な定理等についてのまとめをする.

謝辞

本修士論文を作成するにあたり, 指導教官の竹田 雅好先生には, 三年間にわたるセミナーも含め, 多大な御指導をして頂きました. 厚く御礼を申し上げます. また, 針谷 祐先生には, いろいろな質問に熱心に答えて頂くとともに, 作成の御指導もして頂きました. 心より感謝いたします. そして, 東北確率論セミナーを通じ, 服部 哲弥先生には貴重な御意見を頂きました. 心より感謝いたします. また, 東北確率論セミナーの先輩である土田 兼治さん, 田原 喜宏さんにも有益な助言を多数頂きました. 深く感謝いたします. 同じ竹田研究室の小山田 亮太君には, セミナー等も含め, 多くの助力を頂きました. 心からお礼を申し上げます.

第2章　金融市場の定式化

この章では, 本修士論文で扱う数理ファイナンスの概念について述べる.

2.1　金融市場を通じての取引の定式化

本修士論文では, 一個の安全資産と一個の危険資産からなる金融市場を考える. まず, この二つの資産を定式化する. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間, W をこの上の一次元標準ブラウン運動とする. $T (T > 0)$ で**満期 (terminal time)** を表し, $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W_s : 0 \le s \le t\}$, $\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}\}$ とする. ただし, $\mathcal{N}$ は $\mathcal{F}_T^W$ に含まれる零集合の族とする.

安全資産 (第 0 資産)$B(t)$ を

$$dB(t) = r(t)B(t)\,dt, \quad B(0) = 1 \tag{2.1}$$

で定義し, **危険資産 (第 1 資産)**$S(t)$ を

$$dS(t) = S(t)b(t)\,dt + S(t)\sigma(t)\,dW(t), \quad S(0) = s \in (0, \infty). \tag{2.2}$$

利子率過程$\{r(t)\}_{0\le t\le T}$, **平均収益率過程**$\{b(t)\}_{0\le t\le T}$, **ボラティリティ過程**$\{\sigma(t)\}_{0\le t\le T}$ は, 発展的可測 (定義 5.17 参照) であり,

$$\int_0^T (|r(t)| + |b(t)| + |\sigma(t)|^2)\,dt < \infty \text{ a.s.}$$

を満たすとする.

定義 2.1. ポートフォリオ過程 (portfolio process)(π_0, π_1) を以下を満たす発展的可測な $\mathbf{R}^2$-値確率過程とする.

$$\int_0^T |(\pi_0(t) + \pi_1(t))\, r(t)|\,dt < \infty \quad \text{a.s.}$$

$$\int_0^T |\pi_1(t)(b(t) - r(t))|\,dt < \infty \quad \text{a.s.}$$

$$\int_0^T |\sigma(t)\pi_1(t)|^2\,dt < \infty \quad \text{a.s.}$$

ここで, $\pi_i(t)(i=0,1)$ は (時刻 $t \in [0,T]$ での第 i 資産の保有量)×(時刻 $t \in [0,T]$ での第 i 資産の価格) と解釈する.

定義 2.2. ポートフォリオ過程 (π_0, π_1) が**自己充足的 (self-financing)** とは, 付随する**資産価値過程** $X(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t)$ について,

$$dX(t) = \frac{\pi_0(t)}{B(t)}\,dB(t) + \frac{\pi_1(t)}{S(t)}\,dS(t)$$

が成り立つことをいう.

このとき,

$$\begin{aligned} dX(t) &= (\pi_0(t) + \pi_1(t))\,r(t)\,dt + \pi_1(t)\,(b(t) - r(t))\ dt + \pi_1(t)\sigma(t)\,dW(t) \\ &= r(t)X(t)\,dt + \pi_1(t)\,(b(t) - r(t))\ dt + \pi_1(t)\sigma(t)\,dW(t) \end{aligned}$$

より, $\gamma(t) := 1/B(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)$ とすると,

$$d(\gamma(t)X(t)) = \gamma(t)\pi_1(t)\,(b(t) - r(t))\ dt + \gamma(t)\pi_1(t)\sigma(t)\,dW(t)$$

となり,

$$\gamma(t)X(t) = X(0) + \int_0^t \gamma(s)\pi_1(s)[(b(s) - r(s))\ ds + \sigma(s)\,dW(s)], \quad 0 \le t \le T$$

を得る. また, 以下ではポートフォリオ過程 (π_0, π_1) は自己充足的であることを仮定する. このとき, 資産価値過程 $X(t)$ は第一資産についてのポートフォリオ過程 π_1 のみに依存するので, π_1 を π と置き換えて話を進め, ポートフォリオ過程とは, この π を指すことにする.

定義 2.3. ポートフォリオ過程 π が tame であるとは

$$M^\pi(t) := \int_0^t \gamma(s)\pi(s)[(b(s) - r(s))\ ds + \sigma(s)\,dW(s)]$$

が, ほとんど確実に下に有界であることをいう. つまり,

$$\text{ある } q = q_\pi \in \mathbf{R} \text{ が存在して}, P[M^\pi(t) \ge q_\pi : \forall 0 \le t \le T] = 1$$

が成り立つことをいう.

定義 2.4. tame なポートフォリオ過程 π が

$$P[M^\pi(T) \ge 0] = 1, \quad P[M^\pi(T) > 0] > 0$$

を満たすとき, **裁定機会**をもつという. また, これを満たすようなポートフォリオ過程が存在しないとき, 金融市場モデルは無裁定条件を満たすという.

定理 2.5 ([1] Theorem 0.2.4)**.** 金融市場モデルが無裁定条件を満たすとき, 発展的可測な確率過程 $\theta : [0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$ が存在して,

$$b(t)-r(t)=\sigma(t)\theta(t),\quad 0\le t\le T\,\text{a.s.} \tag{2.3}$$

が成り立つ. この θ を**市場リスク価格過程 (market price of risk)** と呼ぶ. 逆に確率過程 θ で, (2.3) に加えて,

$$\int_0^T |\theta(t)|^2\,dt<\infty \quad \text{a.s.} \tag{2.4}$$

$$E\left[\exp\left\{-\int_0^T \theta(t)\,dW(t)-\frac{1}{2}\int_0^T |\theta(t)|^2\,dt\right\}\right]=1 \tag{2.5}$$

を満たすものが存在するとき, 金融市場モデルは無裁定条件を満たす.

定義 2.6. 発展的可測な確率過程 $\theta : [0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$ で (2.3)-(2.5) を満たすものが存在するとき, 金融市場モデルは, **標準的**と呼ばれる.

標準的な金融市場モデルにおいて,

$$Z(t):=\exp\left\{-\int_0^T \theta(t)\,dW(t)-\frac{1}{2}\int_0^T |\theta(t)|^2\,dt\right\},\quad 0\le t\le T \tag{2.6}$$

はマルチンゲールである. よって可測空間 $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上に確率測度 Q を

$$Q(A):=E[Z(T)1_A],\quad A\in\mathcal{F}_T \tag{2.7}$$

で矛盾なく定義できる. すなわち

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t}=Z(t),\quad 0\le t\le T$$

が成り立つ. この Q を**リスク中立同値マルチンゲール測度**と呼ぶ. ギルサノフの定理 (定理 5.37 参照) より, Q の下で確率過程

$$\tilde{W}(t):=W(t)+\int_0^t \theta(s)\,ds,\quad 0\le t\le T \tag{2.8}$$

は $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動になる. このとき, 危険資産 $S(t)$ は

$$dS(t)=rS(t)+\sigma(t)S(t)d\tilde{W}(t)$$

と変形できる. さらに, 初期資産 $X(0)=x$ とポートフォリオ過程 π に付随する資産価値過程 $X(t)$ は,

$$X(t)=X^{x,\pi}(t)=B(t)x+B(t)\int_0^t \gamma(s)\pi(s)\sigma(s)d\tilde{W}(s),\quad 0\le t\le T$$

と変形できる.

2.2 金融市場の完備性

ここで, (2.1) で定義される一個の安全資産と, (2.2) で定義される一個の危険資産からなる標準的な金融市場を考える.

定義 2.7. **条件付き請求権**とは $\mathcal{F}_T$ 可測な確率変数 $Y : \Omega \to [0, \infty)$ で

$$u_0 := E_Q[\gamma(T)Y] = E[\gamma(T)Z(T)Y] < \infty$$

をみたすもののことをいう.

定義 2.8. 条件付き請求権 Y が**ヘッジ可能 (attainable)** とは, tame なポートフォリオ過程 π で

$$X^{u_0,\pi}(T) = Y \text{ a.s.}$$

つまり,

$$\gamma(T)Y = u_0 + \int_0^T \gamma(u)\pi(u)\sigma(u)\, d\tilde{W}(u)$$

を満たすものが存在することをいう. また, どんな条件付き請求権もヘッジ可能であるとき, 金融市場は**完備**であるという.

特に本修士論文で扱うような危険資産が一個で, ブラウン運動の次元が一次元である金融市場が, 標準的でかつボラティリティ過程 $\{\sigma(t)\}_{0\le t\le T}$ がほとんどすべての $t \in [0, T]$ についてほとんど確実に $\sigma(t) \neq 0$ であれば, 金融市場は完備である. 以下ではこれを示す.

補題 2.9 ([4] Lemma 1.6.7)**.** $\{M(t), \mathcal{F}_t : 0 \le t \le T\}$ は Q の下でマルチンゲールであるとする. このとき, 発展的可測な確率過程 $\varphi(\cdot)$ で

$$\int_0^T |\varphi(s)|^2\, ds < \infty \text{ a.s.} \tag{2.9}$$

かつ

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \varphi(s)\, d\tilde{W}(s), \quad 0 \le t \le T \text{ a.s.}$$

を満たすものが存在する.

証明. マルチンゲール表現定理 (定理 5.32 参照) との相違点は, $F_t^{\tilde{W}}$ が F_t^W に真に含まれる場合でも Q の下での $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールを $\tilde{W}$ についての確率積分で表現できることである.

$$N(t) := E[Z(T)M(T)|\mathcal{F}_t], \quad 0 \le t \le T$$

とする. このとき, マルチンゲール表現定理より,

$$N(t) = N(0) + \int_0^t \psi(s)\, dW(s), \quad 0 \le t \le T.$$

ただし ψ は発展的可測な確率過程で, $\int_0^T |\psi(s)|^2 \, ds < \infty$ a.s. を満たす. また, ベイズの法則 (補題 5.36 参照) より, $M(t) = E_Q[M(T)|\mathcal{F}_t] = N(t)/Z(t)$ であることと, 伊藤の公式により,

$$dM_0(t) = \frac{1}{Z(t)}[\psi(t) + N(t)\theta(t)]d\tilde{W}(t).$$

よって, $\varphi(t) = \frac{1}{Z(t)}[\psi(t) + N(t)\theta(t)]$ ととれば, この補題は示される. ((2.9) については $\psi(\cdot)$ と $\theta(\cdot)$ が同じ条件を満たすことと, $\frac{1}{Z(\cdot)}$ と $N(\cdot)$ は連続過程であることから成り立つ.) □

よって, 条件付き請求権 Y について, $M(t) := E_Q[\gamma(T)Y|\mathcal{F}_t]$, $(0 \leq t \leq T)$ とすると, 補題 2.9 より, $M(t) = M(0) + \int_0^t \varphi(s) \, d\tilde{W}(s) \, (0 \leq t \leq T)$ a.s. ここで, $\pi(t) := B(t)\varphi(t)\sigma^{-1}(t) \, (0 \leq t \leq T)$ とすれば, これは tame なポートフォリオ過程であり, $\gamma(T)Y = u_0 + \int_0^T \gamma(u)\pi(u)\sigma(u) \, d\tilde{W}(u)$ を満たす. よって金融市場は完備である.

2.3 価格付け

条件付き請求権の中で満期にのみ行使できる権利を特に**ヨーロッパ型条件付き請求権**と呼ぶ.

例.

1. $Y = [S(T) - q]^+$: 権利行使価格が q のヨーロピアンコールオプション (満期に $S(T)$ を価格 q で買う権利).
2. $Y = [\frac{1}{T}\int_0^T S(t) \, dt - q]^+$: 権利行使価格が q のアジアンオプション.

次に, このような権利を売買する際の適正価格について考える. このとき, 次の値を定義する.

$$h_{\mathrm{up}} := \inf\{x \geq 0 : \exists \text{ポートフォリオ過程}\, \pi, \text{s.t.}\, \pi : \text{tame}, X^{x,\pi}(T) \geq Y \text{ a.s.}\}$$

$$h_{\mathrm{low}} := \sup\{x \geq 0 : \exists \text{ポートフォリオ過程}\, \pi, \text{s.t.}\, X^{-x,\pi}(T) \geq -Y \text{ a.s.}\}$$

ここで, h_{up} は, 売り手 (権利の発行主体) が, 権利の販売価格を元手に市場で投資をし, 満期時刻に買い手に支払う Y 以上の資産を形成できるような販売価格の下限であり, h_{low} は, 買い手が, 購入価格の負債をもって, 市場で投資をし, さらに満期時刻に Y を得たとき, 負債がなくなるような, 購入価格の上限である.

定理 2.10 ([1] Theorem 1.2.1)**.** 金融市場は標準的で完備であるとする. このとき, 任意のヨーロッパ型条件付き請求権 Y に対して,

$$h_{\mathrm{up}} = h_{\mathrm{low}} = u_0 = E_Q[\gamma(T)Y] \in (0, \infty)$$

が成り立ち, さらに, tame なポートフォリオ $\hat{\pi}$ が存在して,

$$X^{u_0,\hat{\pi}}(t) = -X^{-u_0,\check{\pi}}(t) = \hat{X}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

が成り立つ. ただし, $\hat{X}(t) := \frac{1}{\gamma(t)}E_Q[\gamma(T)Y|\mathcal{F}_t], \check{\pi}(t) := -\hat{\pi}(t) \, (0 \leq t \leq T)$ とする.

証明. 定義から $0 \le h_{\mathrm{low}} \le u_0 \le h_{\mathrm{up}} \le \infty$ は容易に確認できる. 補題 2.9 により,

$$\gamma(t)\hat{X}(t) = E_Q[\gamma(T)Y|\mathcal{F}_t] = u_0 + \int_0^t \gamma(s)\hat{\pi}(s)\sigma(s)\, d\tilde{W}(s), \quad 0 \le t \le T \tag{2.10}$$

を満たすポートフォリオ過程 $\hat{\pi}$ が存在する. また, $M^{\hat{\pi}}(t) := \int_0^t \gamma(s)\hat{\pi}(s)\sigma(s)\, d\tilde{W}(s) = E_Q[\gamma(T)Y|\mathcal{F}_t] - u_0\ (0 \le t \le T)$ は Q-マルチンゲールであり, $-u_0$ によって下に有界である. よって $\hat{\pi}$ は tame である. また, $Y = X^{u_0,\hat{\pi}}(T) = -X^{-u_0,\check{\pi}}(T)$ により $h_{\mathrm{up}} = h_{\mathrm{low}} = u_0$ が成り立つ. また (2.10) により, $X^{u_0,\hat{\pi}}(t) = -X^{-u_0,\check{\pi}}(t) = \hat{X}(t)\ (0 \le t \le T)$ が成り立つ. よって主張は示された. □

定義 2.11. ヨーロッパ型条件付き請求権 Y に対して, $\{\hat{X}(t)\}_{0\le t\le T}$ ただし, $\hat{X}(t) := \frac{1}{\gamma(t)}E_Q[\gamma(T)Y|\mathcal{F}_t]\ (0 \le t \le T)$ を Y に対する**価格過程**と呼び, また $\{\hat{\pi}(t)\}_{0\le t\le T}$ を Y に対する**ヘッジポートフォリオ過程**と呼ぶ.

注意 2.12. 定理 2.10 により, ヨーロッパ型条件付き請求権のヘッジポートフォリオ過程が存在することは分かっている. そこで, 本修士論文の主題は, 条件付請求権のヘッジポートフォリオ過程を表現することである. 具体的に表示できることは, ヘッジ可能であることは分かっているとして, どのようにしたらヘッジできるのかが分かる点で重要である.

第3章　クラーク・オコンの公式の導出

3.1　Wiener-Ito 展開

定義 3.1. 実関数 $g : [0,T]^n \to \mathbf{R}$ が**対称 (symmetric)** とは

$$g(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) = g(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall\sigma : (1,2,\ldots,n) \text{ 上の置換}$$

が成り立つこととする. さらに, 対称な実関数 $g : [0,T]^n \to \mathbf{R}$ について

$$\|g\|^2_{L^2([0,T]^n)} := \int_{[0,T]^n} g^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n < \infty$$

が成り立つとき, $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$ と表す. すなわち $\hat{L}^2([0,T]^n)$ は $[0,T]^n$ 上の対称な二乗可積分関数全体である.

さて,

$$S_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,T]^n; 0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le T\}$$

とする. このとき $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$ に対して

$$\|g\|^2_{L^2([0,T]^n)} = n! \int_{S_n} g^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = n!\|g\|^2_{L^2(S_n)}$$

が成り立つ. また, $[0,T]^n$ 上で定義された任意の関数 g についてその対称化 $\tilde{g}$ を次で定義する.

$$\tilde{g}(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} g(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})$$

定義 3.2. g を $S_n\,(n \ge 1)$ 上で定義された決定論的な関数で次を満たすとする.

$$\|g\|^2_{L^2(S_n)} = \int_{S_n} g^2(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n < \infty$$

このとき, n **多重伊藤積分**が次で定義される.

$$J_n(f) := \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_n) dW(t_1) dW(t_2) \cdots dW(t_{n-1}) dW(t_n)$$

ここで, 仮定より $1 \le i \le n$ について, $dW(t_i)$ に対する伊藤積分 (注意 5.28 参照) の被積分関数は, $\mathcal{F}_{t_i}$ 適合で, $dP \times dt_i$ について二乗可積分であることに注意する.

命題 3.3. $g \in L^2(S_m)$, $h \in L^2(S_n)$, $m < n$ に対して,

$$E[J_n(g)J_m(h)] = \begin{cases} 0 \ \text{ if } \ n \neq m, \\ \langle g, h\rangle_{L^2(S_n)} \ \text{ if } \ n = m \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 伊藤積分の等長性 (注意 5.28 参照) を使って

$$\begin{aligned} E[J_n^2(h)] &= E\left[\left\{\int_0^T \left(\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, \ldots, t_n) dW(t_1) \cdots dW(t_{n-1})\right) dW(t_n)\right\}^2\right] \\ &= \int_0^T E\left[\left(\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, \ldots, t_n) dW(t_1) \cdots dW(t_{n-1})\right)^2\right] dt_n \\ &= \cdots = \int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h^2(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n = \|h\|^2_{L^2(S_n)}. \end{aligned}$$

また, $g \in L^2(S_m)$,$h \in L^2(S_n)$, $m < n$ に対して, 同様に

$$\begin{aligned} E[J_m(g)J_n(h)] = E\Bigg[&\left\{\int_0^T \left(\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} g(s_1, \ldots, s_m) dW(s_1) \cdots dW(s_{m-1})\right) dW(s_m)\right\} \\ &\times \left\{\int_0^T \left(\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, \ldots, t_{n-m}, s_1, \ldots, s_m) dW(t_1) \cdots \right) dW(s_m)\right\}\Bigg] \\ = &\int_0^T E\Bigg[\left\{\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} g(s_1, \ldots, s_{m-1}, s_m) dW(s_1) \cdots dW(s_{m-1})\right\} \\ &\times \left\{\int_0^{s_m} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1, \ldots, s_{m-1}, s_m) dW(t_1) \cdots dW(s_{m-1})\right\}\Bigg] ds_m \\ = &\int_0^T \int_0^{s_m} \cdots \int_0^{s_2} E\Bigg[g(s_1, s_2, \ldots, s_m) \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{t_2} \\ &h(t_1, \ldots, t_{n-m}, s_1, \cdots, s_m) dW(t_1) \cdots dW(t_{n-m})\Bigg] ds_1 \cdots ds_m \\ = &\, 0 \end{aligned}$$

より示された. □

また, $g \in \hat{L}^2([0,T]^n)$ に対して

$$I_n(g) := n! J_n(g)$$

とすると

$$E[I_n^2(g)] = E[(n!)^2 J_n^2(g)] = (n!)^2 \|g\|^2_{L^2(S_n)} = n! \|g\|^2_{L^2([0,T]^n)}$$

が成り立つ.

定理 3.4 ([5] Theorem 1.1.2, Wiener-Ito 展開)**.** φ は $\mathcal{F}_T$ 可測な確率変数で $\varphi \in L^2(\Omega)$ とする. このとき, $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$ の列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ が一意的に存在して,

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n(f_n) \quad (L^2(\Omega) \text{ における収束})$$

さらに

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^\infty n! \|f_n\|_{L^2([0,T]^n)}^2$$

が成立する.

3.2 Malliavin 微分

$H := L^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), m)$ とする. ただし m はルベーグ測度とする. $h \in H$ に対して $W(h) := \int_0^T h(t)\, dW_t$ とすると, $H \ni h \mapsto W(h) \in L^2(\Omega)$ は線形写像で, $W(h)$ は, 平均 0, 分散 $\int_0^T h^2(t)dt$ の正規分布に従う. また, $h_1, h_2 \in H$ に対して, $E[W(h_1)W(h_2)] = \langle h_1, h_2 \rangle_H$ が成立する.

$$C_p^\infty(\mathbf{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : f \text{ のどの偏導関数も多項式増大である.}\}$$

$$C_b^\infty(\mathbf{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : f \text{ のどの偏導関数も有界である.}\}$$

とし,

$$\mathcal{S} := \{F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) : f \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n), h_1, ..., h_n \in H, n \geq 1\}$$

$$\mathcal{S}_b := \{F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) : f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^n), h_1, ..., h_n \in H, n \geq 1\}$$

とする. $\mathcal{S}$ 上に作用素 $D : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega; H)$ を

$$DF := \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_i$$

で定め,

$$D_t F := \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_i(t)$$

とする.

補題 3.5 ([5] Lemma 1.2.1)**.** $F \in \mathcal{S}$ とし, $h \in H$ とする. このとき,

$$E[\langle DF, h \rangle_H] = E[FW(h)]$$

証明. $h \in H$ は $\|h\|_H = 1$ としてよい. また, $e_1, \cdots, e_n$ を H の正規直交な元とし, $h = e_1, F = f(W(e_1), \ldots, W(e_n))$ に対して成り立つことを示せば十分である. $\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2)$ とすると,

$$\begin{aligned} E[\langle DF, h\rangle_H] &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\phi(x)x_1\,dx = E[FW(e_1)] \\ &= E[FW(h)] \end{aligned}$$

□

この補題から次が従う.

補題 3.6 ([5] Lemma 1.2.2)**.** $F, G \in \mathcal{S}$ と $h \in H$ に対して,

$$E[G\langle DF, h\rangle_H] = E[-F\langle DG, h\rangle_H + FGW(h)]$$

以上より, D が $\mathcal{S}(\subset L^p(\Omega))$ から, $L^p(\Omega; H)$ への閉じた作用素であることが分かる. つまり, $\{F_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{S}$ が $\lim_{k\to\infty} F_k = 0$ in $L^p(\Omega)$ とし, $\lim_{k\to\infty} DF_k = \eta$ in $L^p(\Omega; H)$ とする. このとき, 補題 3.6 から $\eta = 0$ が導ける. 実際, $h \in H$ と $F \in \mathcal{S}_b$ を $FW(h)$ が有界となるようにとるとき,

$$\begin{aligned} E[\langle \eta, h\rangle_H F] &= \lim_{k\to\infty} E[\langle DF_k, h\rangle_H F] \\ &= \lim_{k\to\infty} E[-F_k\langle DF, h\rangle_H + F_k FW(h)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $\eta = 0$ を得る. このことから, D の定義域を次のように定義する.

定義 3.7. $L^p(\Omega)(p \geq 1)$ における D の定義域 $\mathbf{D}^{1,p}$ を $\mathcal{S}$ の次のノルムの閉包で定義する.

$$\|F\|_{1,p} = \left[E\big[|F|^p\big] + E[\|DF\|_H^p]\right]^{\frac{1}{p}}$$

命題 3.8 ([5] Proposition 1.2.1)**.** $F \in L^2(\Omega)$ が $\mathcal{F}_T$ 可測であるとする. F が

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m) \quad f_m : L^2([0,T]^m) \text{ 上の対称な関数}$$

と展開されるとき,

$$F \in \mathbf{D}^{1,2} \Longleftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} mm!\|f_m\|^2_{L^2([0,T]^m)} < \infty$$

である．このとき,

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(.,t))$$

が成り立ち, さらに

$$E\left[\int_0^T (D_t F)^2\, dt\right] = \sum_{m=1}^{\infty} m m! \|f_m\|^2_{L^2([0,T]^m)} < \infty$$

である.

3.3 The Skorohod integral

定義 3.9. 微分作用素 D は $L^2(\Omega)$ の稠密な部分空間 $\mathbf{D}^{1,2}$ から $L^2([0,T]\times\Omega)$ への作用素である．ここで D の共役作用素を δ とする．このとき δ は $L^2([0,T]\times\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への作用素で

1. $\mathrm{Dom}\,\delta$ は次を満たす $u \in L^2([0,T]\times\Omega)$ 全体の集合である.

$$\left| E\left[\int_0^T (D_t F)\, u(t) dt\right]\right| \leq \exists C \|F\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall F \in \mathbf{D}^{1,2}$$

ただし, $C\,(C>0)$ は u にのみ依存する定数である.

2. $u \in \mathrm{Dom}\,\delta$ に対して, $\delta(u)$ は $L^2(\Omega)$ の元で

$$E[F\delta(u)] = E\left[\int_0^T (D_t F)\, u(t)\, dt\right] \quad \forall F \in \mathbf{D}^{1,2}$$

が成り立つ.

注意 3.10. 微分作用素 D は閉作用素であり, よってその共役作用素 δ も閉作用素である.

命題 3.11 ([5] Proposition 1.3.1)**.** $u \in L^2([0,T]\times\Omega)$ が

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(.,t)) \quad f_m : L^2([0,T]^m) \text{ 上の対称な関数}$$

と展開されるとき,

$$u \in \mathrm{Dom}\delta \Longleftrightarrow L^2(\Omega) \text{ の意味で} \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m) \text{ が存在する}$$

である. ただし, $\tilde{f}_m$ は f_m の対称化で,

$$\tilde{f}_m(t_1,\dots,t_m,t)=\frac{1}{m+1}\left[f_m(t_1,\dots,t_m,t)+\sum_{i=1}^m f_m(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t,t_i)\right]$$

である. (f_m は最初の m 変数については対称であることに注意する) このとき,

$$\delta(u)=\sum_{m=0}^\infty I_{m+1}(\tilde{f}_m)$$

が成り立ち, さらに

$$E[\delta(u)^2]=\sum_{m=0}^\infty (m+1)!\|\tilde{f}_m\|^2_{L^2([0,T]^{m+1})}$$

である.

証明. $G=I_n(g),\quad g$ は対称であるとする.

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T u(t)(D_tG)\,dt\right]&=\sum_{m=0}^\infty\int_0^T E[I_m(f_m(\cdot,t))nI_{n-1}(g(\cdot,t))]\,dt\\
&=\int_0^T E[I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot,t))nI_{n-1}(g(\cdot,t))]\,dt\\
&=n(n-1)!\int_0^T\langle f_{n-1}(\cdot,t),g(\cdot,t)\rangle_{L^2([0,T]^{n-1})}\,dt\\
&=n!\langle f_{n-1},g\rangle_{L^2([0,T]^n)}=n!\langle\tilde{f}_{n-1},g\rangle_{L^2([0,T]^n)}\\
&=E[I_n(\tilde{f}_{n-1})I_n(g)]=E[I_n(\tilde{f}_{n-1})G]
\end{aligned}$$

ここで $u\in\mathrm{Dom}\delta$ とするとき, $E[\delta(u)G]=E[I_n(\tilde{f}_{n-1})G]$ より, $\delta(u)$ の n 番目の Wiener-Ito 展開の項が $I_n(\tilde{f}_{n-1})$ に一致することがわかる. よって $\sum_{m=0}^\infty I_{m+1}(\tilde{f}_m)$ は $L^2(\Omega)$ で収束し, その和は $\delta(u)$ に一致する. 逆に, 和が $L^2(\Omega)$ で V に収束すると仮定する. このとき上の計算と同様にして

$$E\left[\int_0^T u(t)D_t\left(\sum_{n=0}^N I_n(g_n)\right)\,dt\right]=E\left[V\sum_{n=0}^N I_n(g_n)\right]$$

よって, 極限をとることにより, $F\in\mathbf{D}^{1,2}$ に対して

$$\left|E\left[\int_0^T u(t)(D_tF)\,dt\right]\right|\le\|V\|_{L^2(\Omega)}\|F\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立ち, $u\in\mathrm{Dom}$ である. □

定義 3.12. 任意の $G \in \mathcal{B}([0,T])$ に対して, $\mathcal{F}_G$ を次の形をしたすべての確率変数によって生成される σ 加法族とする.

$$\int_A dW_t := \int_0^T 1_A \, dW_t, \quad A \subset G(\text{ボレル集合})$$

特に $\mathcal{F}_{[0,t]} = \mathcal{F}_t^W (t \geq 0)$ である.

補題 3.13 ([5] Lemma 1.2.4)**.** $F \in L^2(\Omega)$ は $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ であるとする. 任意の $G \in \mathcal{B}([0,T])$ に対して

$$E[F|\mathcal{F}_G] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n 1_G^{\otimes n})$$

が成り立つ. ただし

$$(f_n 1_G^{\otimes n})(t_1, \ldots, t_n) = f_n(t_1, \ldots, t_n) 1_G(t_1) \cdots 1_G(t_n).$$

とする.

命題 3.14 ([5] Proposition 1.2.4)**.** $F \in \mathbf{D}^{1,2}, G \in \mathcal{B}([0,T])$ とする. このとき, $E[F|\mathcal{F}_G] \in \mathbf{D}^{1,2}$ であり

$$D_t E[F|\mathcal{F}_G] = E[D_t F|\mathcal{F}_G] 1_G(t)$$

が成り立つ. 特に, F が $\mathcal{F}_G$ 可測のとき

$$D_t F(\omega) = 0 \ \big((t,\omega) \in G^c \times \Omega\big)$$

である.

証明. 補題 3.13 と命題 3.8 により,

$$\begin{aligned} D_t E[F|\mathcal{F}_G] &= \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(.,t) 1_G^{\otimes n-1}) 1_G(t) \\ &= E[D_t F|\mathcal{F}_G] 1_G(t) \end{aligned}$$

を得る. また F が $\mathcal{F}_G$ 可測のとき, 上の等式より

$$D_t F = D_t F \, 1_G(t)$$

となり, $D_t F(\omega) = 0 \ \big((t,\omega) \in G^c \times \Omega\big)$ が成り立つ. □

補題 3.15 ([5] Lemma 1.3.2)**.** $G \in \mathcal{B}([0,T])$ に対して, $F \in L^2(\Omega)$ は $\mathcal{F}_{G^c}$ 可測とする. このとき, 過程 $F 1_G$ は $\mathrm{Dom}\delta$ に属し

$$\delta(F 1_G) = F W(1_G).$$

が成り立つ.

証明. 最初に $F \in \mathcal{S}$ とする.

$$\delta(F1_G) = FW(1_G) - \int_A D_t F 1_G(t)\, dt.$$

補題 3.14 により, $\int_A D_t F 1_G(t)\, dt = 0$ である. よって $F \in \mathcal{S}$ に対しては成り立つ. $F \in L^2(\Omega)$ に対しても $\mathcal{S}$ が $L^2(\Omega)$ で稠密であることと, δ が閉作用素であることより従う. □

命題 3.16 ([5] Proposition 1.3.4)**.** $\mathcal{L} := \{X \in L^2([0,T] \times \Omega) : X$ は $\mathcal{F}_t$適合である $\}$ とする. $\mathcal{L} \subset \mathrm{Dom}\delta$ であり, $\mathcal{L}$ 上で作用素 δ は伊藤積分と一致する.

証明. $u \in \mathcal{L}$ は単過程で, 次のように書けるとする.

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} F_j 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t).$$

ここで, F_j は有界で $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測とし, $0 \le t_1 < ... < t_{m+1} \le T$ とする. 補題 3.15 により

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{m} F_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

よって単過程については主張が成り立つ. 一般の $u \in \mathcal{L}$ に対しては, 単過程の列 $\{u_n\}_{n \ge 1}$ で $L^2(\Omega \times [0,T])$ において u に収束するものが存在し

$$\begin{aligned}\int_0^T u(t)\, dW_t &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\, dW_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \delta(u_n)\end{aligned}$$

が成り立つ. δ は閉作用素なので $u \in \mathrm{Dom}\ \delta$ であり, $\delta(u) = \int_0^T u(t)\, dW_t$ である. □

3.4 クラーク・オコン (Clark-Ocone) の公式

定理 3.17 ([5] Proposition 1.3.5, クラーク・オコンの公式)**.** $\mathcal{F}_T$ 可測な $F \in \mathbf{D}^{1,2}$ に対して

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t]\, dW_t$$

が成り立つ.

証明.

命題 3.8 と補題 3.13 により,

$$
\begin{aligned}
E[D_tF|\mathcal{F}_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} nE[I_{n-1}(f_n(.,t))|\mathcal{F}_t] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(t_1,\cdots,t_{n-1},t)1_{\{\max\{t_1,\cdots,t_n\}\le t\}}).
\end{aligned}
$$

を得る. また, $u_t = E[D_tF|\mathcal{F}_t]$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\delta(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} nI_n\big((f_n(t_1,...,t_{n-1},t)1_{\{\max\{t_1,\cdots,t_{n-1}\}\le t\}})^s\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\
&= F - E[F].
\end{aligned}
$$

ただし, $(f_n(t_1,...,t_{n-1},t)1_{\{\max\{t_1,\cdots,t_{n-1}\}\le t\}})^s$ は $f_n(t_1,...,t_{n-1},t)1_{\{\max\{t_1,\cdots,t_{n-1}\}\le t\}}$ の対称化である. 一方 $\{\, u_t = E[D_tF|\mathcal{F}_t] : 0 \le t \le T\} \in \mathcal{L}$ であり, 命題 3.16 より, $\delta(u) = \int_0^T E[D_tF|\mathcal{F}_t]\, dW_t$ が成り立ち, よって主張を得る. □

さらに次のことが分かっている.

定理 3.18 ([2], クラーク・オコンの公式の拡張)**.** $F \in \mathbf{D}^{1,1}$ に対して,

$$
F = E[F] + \int_0^T E[D_tF|\mathcal{F}_t]\, dW_t
$$

証明. $F \in \mathbf{D}^{1,1}$ に対して, 列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ で

$$
\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_{1,1} = 0
$$

をみたすものが存在する. マルチンゲールの表現定理により, $M(t) := E[F|\mathcal{F}_t]$ と $M_n(t) := E[F_n|\mathcal{F}_t]$ は次のように表現できる.

$$
M(t) = E[F] + \int_0^t \psi(s)\, dW_s,
$$

$$
M_n(t) = E[F_n] + \int_0^t \psi_n(s)\, dW_s.
$$

ここで ψ は発展的可測な確率過程で $\int_0^T |\psi(s)|^2\, ds < \infty$ a.s. を満たす. また, クラーク・オコンの公式 (定理 3.17) により, $\psi_n(t) = E[D_tF_n|\mathcal{F}_t]$ である. 劣マルチンゲール不等式より, どの $\epsilon > 0$ に対しても,

$$
P(\max_{0\le t\le T} |M_n(t) - M(t)| > \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon}E[|M_n(T) - M(T)|] = \frac{1}{\epsilon}E[|F_n - F|] \to 0 \ \text{ as } n \to \infty
$$

が成り立つ. 連続な局所マルチンゲールに N に対して, 任意の $\lambda > 0$, $\delta \in (0,1)$ について,

$$P[\langle N\rangle_T > 4\lambda^2, \max_{0\le t\le T}|N_t| \le \delta\lambda] \le \delta^2 P[\langle N\rangle_T > \lambda^2]$$

が成り立つので, 任意の $\lambda > 0$, $\delta \in (0,1)$ について,

$$P\left[\int_0^T |\psi_n(t) - \psi(t)|^2\,dt > 4\lambda^2\right] \le \delta^2 + P[\max_{0\le t\le T}|M_n(t) - M(t)| > \delta\lambda]$$

が成り立つ. よって,

$$\int_0^T |\psi_n(t) - \psi(t)|^2\,dt \longrightarrow 0 \text{ as } n \to \infty \,(\text{確率収束}) \tag{3.1}$$

が成り立つ. 一方で, イエンセン (Jensen) の不等式とシュワルツの不等式により,

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T |\psi_n(s) - E[D_sF|\mathcal{F}_s]|\,ds\right] &\le E\left[\int_0^T |D_s(F_n - F)|\,ds\right] \\ &\le T^{1/2}E\left[\left(\int_0^T |D_s(F_n-F)|^2\,ds\right)^{1/2}\right] \\ &\le T^{1/2}\|F_n - F\|_{1,1} \to 0 \quad \text{as } n\to\infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

よって (3.1) と (3.2) により, $E[D_tF|\mathcal{F}_t] = \psi(t)$, $dt \otimes dP$-a.s. がわかる. □

定義 3.19. $\mathbf{L}^a_{1,1}$ は次を満たす実数値発展的可測な確率過程の族とする.

1. ほとんどすべての $s \in [0,T]$ に対して, $u(s,\cdot) \in \mathbf{D}^{1,1}$
2. $(s,\omega) \to Du(s,\omega) \in L^2([0,T])$ について, 発展的可測な変形が存在する.
3. $\|u\|^a_{1,1} := E\left[\left(\int_0^T |u(s)|^2\,ds\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \|Du(s)\|^2_{L^2([0,T])}\,ds\right)^{1/2}\right] < \infty$

補題 3.20 ([7] Appendix)**.** $F = (F_1,\cdots,F_k) \in (\mathbf{D}^{1,1})^k$ とし, $\phi \in C^1(\mathbf{R}^k)$ は実数値関数で

$$E\left[|\phi(F)| + \|\sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i\|_{L^2([0,T])}\right] < \infty$$

を満たすとする. このとき $\phi(F) \in \mathbf{D}^{1,1}$ で, $D\phi(F) = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i$ が成り立つ.

証明. $\phi \in C^1_b(\mathbf{R}^k)$(その 1 階偏導関数が有界であるもの) については, この補題が成り立つことは容易に確認できる. $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ は $\psi(u) = u$ $(|u| \le 1)$ $|\psi(u)| \le u$ $(u \in \mathbf{R})$ を満たすとする. 任意の自然数 n に対して, $\phi_n(x) = n\psi(\phi(x)/n)(x \in \mathbf{R}^k)$ とする. どの n に対しても $\phi_n \in C^1_b(\mathbf{R}^k)$ であり, よって $\phi_n(F) \in \mathbf{D}^{1,1}$ で, さらに $D\phi_n(F) = \psi'(\phi(F)/n)\sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i$ が成り立つ. すべての n について $|\phi_n(F)| \le |\phi(F)|$ が成

り立つことと，ほとんど確実に $\lim_{n\to\infty}\phi_n(F) = \phi(F)$ が成り立つことに注意して，また，

$$|D\phi_n(F)| \le (\sup|\psi'(x)|)|\sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i|,$$

$$\text{ほとんど確実に} \lim_{n\to\infty} D\phi_n(F) = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i$$

より，有収束定理から，

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|\phi_n(F) - \phi(F)| + \|D\phi_n(F) - \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(F)\,DF_i\|_{L^2([0,T])}\right] = 0$$

が成り立ち，D は $\mathbf{D}^{1,1}$ 上の閉作用素であることから，主張を得る． □

補題 3.21 ([7] Appendix)**.** K を可分なヒルベルト空間とし，$f : [0,T]\times\Omega \to K$ は可測で次を満たすとする．

$$E\left[\left(\int_0^T \|f(s)\|_K^2\,ds\right)^{1/2}\right] < \infty.$$

ここで，$\psi_n(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{j}{2^n} 1_{(j/2^n,(j+1)/2^n]}(t)$ とし，$f(t)$ を $f(t,\omega) = 0 (t \notin [0,T])$ として $t \in \mathbf{R}$ に拡張する．このとき部分列 $\{n_i\}$ が存在して，ほとんどすべての $s \in [0,T]$ に対して，

$$\lim_{n_i\to\infty} E\left[\left(\int_0^T \|f(s+\psi_{n_i}(t-s)) - f(t)\|_K^2\,dt\right)^{1/2}\right] = 0$$

が成り立つ．

命題 3.22 ([7] Appendix)**.** $u \in \mathbf{L}_{1,1}^a$ とする．このとき $\int_0^T u(s)\,dW_s \in \mathbf{D}^{1,1}$ であり，また，

$$D_t \int_0^T u(s)\,dW_s = \int_0^T D_t u(s)\,dW_s + u(t).$$

証明．$L^2([0,T])$ の元である確率変数について，

$$D\int_0^T u(s)\,dW_s = \int_0^T Du(s)\,dW_s + u(\cdot)$$

を示す． $u^{\tilde{s},n_i}(s) = u\left(\tilde{s} + \psi_{n_i}(s-\tilde{s})\right)$ をすべての s, n_i に対して $u^{\tilde{s},n_i}(s) \in \mathbf{D}^{1,1}$ となり，

$$\|u^{\tilde{s},n_i} - u\|_{1,1}^a \to 0 \quad as \quad n_i \to \infty$$

が成り立つものとする．ただし，$\psi_n(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{j}{2^n} 1_{(j/2^n,(j+1)/2^n]}(t)$ とする．また，このような列がとれることについては，補題 3.21 より示される．このとき，

$$\int_0^T u^{\tilde{s},n}(s)\,dW_s = \sum_j u\left(\tilde{s} + \frac{j}{2^n}\right)\left[W\left(\tilde{s} + \frac{j+1}{2^n}\right) - W\left(\tilde{s} + \frac{j}{2^n}\right)\right]$$

が成り立ち, またどの j に対しても $u(\tilde{s}+j/2^n) \in \mathbf{D}^{1,1}$ であり, $u(\tilde{s}+j/2^n)$ と $W(\tilde{s}+\frac{j+1}{2^n}) - W(\tilde{s}+\frac{j}{2^n})$ は独立なので, 補題 3.20 より,

$$
\begin{aligned}
&D\left(u\left(\tilde{s}+\frac{j}{2^n}\right)\left[W\left(\tilde{s}+\frac{j+1}{2^n}\right) - W\left(\tilde{s}+\frac{j}{2^n}\right)\right]\right) \\
&\quad = \left[Du\left(\tilde{s}+\frac{j}{2^n}\right)\right]\left[W\left(\tilde{s}+\frac{j+1}{2^n}\right) - W\left(\tilde{s}+\frac{j}{2^n}\right)\right] \\
&\qquad + u(\tilde{s}+j/2^n)1_{(\tilde{s}+j/2^n,\tilde{s}+(j+1)/2^n]}(\cdot).
\end{aligned}
$$

よって

$$
D\int_0^T u^{\tilde{s},n}(s)\,dW_s = \int_0^T Du^{\tilde{s},n}(s)\,dW_s + u^{\tilde{s},n}(\cdot)
$$

が成り立つ. Burkholder-Davis-Gundy の不等式 (定理 5.33 参照) より,

$$
\begin{aligned}
E\left|\int_0^T u^{\tilde{s},n_i}(s)\,dW_s - \int_0^T u(s)\,dW_s\right| &\le cE\left(\int_0^T |u^{\tilde{s},n_i}(s)-u(s)|^2\,ds\right)^{1/2} \\
&\le c\|u^{\tilde{s},n_i}-u\|_{1,1}^a \to 0, \quad \text{as} \quad n_i\to\infty.
\end{aligned}
$$

また, Burkholder-Davis-Gundy の不等式と注意 5.34 より,

$$
\begin{aligned}
&E\|\int_0^T Du(s)\,dW_s + u(\cdot) - \int_0^T Du^{\tilde{s},n_i}(s)\,dW_s - u^{\tilde{s},n_i}(\cdot)\|_{L^2([0,T])} \\
&\le cE\left[\left(\int_0^T |u^{\tilde{s},n_i}(s)-u(s)|^2\,ds\right)^{1/2}\right] + cE\left[\left(\int_0^T \|Du(s)-Du^{\tilde{s},n_i}(s)\|^2\,ds\right)^{1/2}\right] \\
&= c\|u^{\tilde{s},n_i}-u\|_{1,1}^a \to 0 \quad \text{as} \quad n_i\to\infty.
\end{aligned}
$$

□

補題 3.23 ([7] Appendix)**.** ほとんどすべての $t\in[0,T]$ に対して,

$$
\int_0^T D_t u(s)\,dW_t = \int_t^T D_t u(s)\,dW_t
$$

が成り立つ. 実際, $t>s$ に対して, $D_t u(s,\omega)=0$ が $ds\times dP$ に関して, ほとんどすべての (s,ω) に対して成り立つ.

定理 3.24 ([7], 一般化されたクラーク・オコンの公式)**.** $\{\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ を有界な確率過程で, $\theta\in\mathbf{L}_{1,1}^a$ であるとする, このとき $\mathcal{F}_T$ 可測な確率変数 F が $F\in\mathbf{D}^{1,1}$ であるとし,

$$
E[|F|Z(T)] < \infty, \tag{3.3}
$$

$$
E[Z(T)\|DF\|_{L^2([0,T])}] < \infty, \tag{3.4}
$$

$$E\left[|F|\,Z(T)\left\|\int_0^T D\theta(s)\,dW_s+\int_0^T D\theta(s)\cdot\theta(s)\,ds\right\|_{L^2([0,T])}\right]<\infty \tag{3.5}$$

が成り立つとき, $FZ(T)\in\mathbf{D}^{1,1}$ であり,

$$F=E_Q[F]+\int_0^T E_Q\left[\left(D_tF-F\int_t^T D_t\theta(u)\,d\tilde{W}_u\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]\,d\tilde{W}_t$$

という確率積分による表現ができる. ただし, $\{\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ に対して, $\{Z(t)\}_{0\le t\le T}$, 確率測度 Q, $\{\tilde{W}_t\}_{0\le t\le T}$ をそれぞれ (2.6), (2.7), (2.8) とする.

証明. まず, 仮定より, $FZ(T)\in\mathbf{D}^{1,1}$ で

$$D_t\left(FZ(T)\right)=Z(T)\left[D_tF-F\left\{\theta(t)+\int_t^T D_t\theta(u)\,d\tilde{W}_u\right\}\right] \tag{3.6}$$

が成り立つことを示す. $Z(T)=e^G, G=-\int_0^T\theta(s)\,dW_s-(1/2)\int_0^T\theta^2(s)\,ds$ とする. このとき, 命題 3.22 により, $\int_0^T\theta(s)\,dW_s\in\mathbf{D}^{1,1}$ であった. 一方, $\int_0^T\theta^2(s)\,ds$ についても, $\{\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ が有界な確率過程で, $\theta\in\mathbf{L}^a_{1,1}$ であることと, 補題 3.21 と, 補題 3.20 により, 近似をすることで, $\int_0^T\theta^2(s)\,ds\in\mathbf{D}^{1,1}$ で, $D\int_0^T\theta^2\,ds=2\int_0^T D\theta(s)\theta(s)\,ds$ を得る. よって $G\in\mathbf{D}^{1,1}$ は示された. さらに, $E[|Fe^G|], E[e^G\|DF\|], E[|F|e^G\|DG\|]$ が有限値をとれば, 補題 3.20 を適用して, 補題 3.22 と補題 3.23 により, (3.6) を得るが, これは, θ の有界性と (3.3),(3.4),(3.5) より従う.

次に

$$F=E_Q[F]+\int_0^T E_Q\left[\left(D_tF-F\int_t^T D_t\theta(u)\,d\tilde{W}_u\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]\,d\tilde{W}_t$$

を示す. $Y(t)=E_Q[F|\mathcal{F}_t]$ とする. F は $\mathcal{F}_T$-可測なので, $Y(T)=F$ となる. また, $\Lambda(t)=Z^{-1}(t)$ とする. このとき,

$$\Lambda(t)=\exp(\int_0^t\theta(s)\,d\tilde{W}_s-\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(s)\,ds).$$

と書ける. ベイズの法則 (補題 5.36) と定理 3.18 より,

$$\begin{aligned}
Y(t)&=\Lambda(t)E[Z(T)F|\mathcal{F}_t]\\
&=\Lambda(t)\Bigg(E[E[Z(T)F|\mathcal{F}_t]]\\
&\quad+\int_0^T E\left[D_s\left(E[Z(T)F|\mathcal{F}_t]\right)|\mathcal{F}_s\right]\,dW_s\Bigg)\\
&=\Lambda(t)\left(E[Z(T)F]+\int_0^t E[D_s(Z(T)F)|\mathcal{F}_s]dW_s\right)\\
&=\Lambda(t)U(t).
\end{aligned}$$

ここで

$$U(t) := E[Z(T)F] + \int_0^t E[D_s(Z(T)F)|\mathcal{F}_s]dW_s$$

とする. 伊藤の公式により,

$$\begin{aligned}
dY(t) &= U(t)d\Lambda(t) + \Lambda(t)dU(t) + d\langle U, \Lambda\rangle_t \\
&= Y(t)\theta(t)d\tilde{W}_t + \Lambda(t)E[D_t(Z(T)F)|\mathcal{F}_t]dW_t \\
&\quad + E[D_t(Z(T)F)|\mathcal{F}_t]\Lambda(t)\theta(t)dt \\
&= Y(t)\theta(t)d\tilde{W}_t + \Lambda(t)E[D_t(Z(T)F)|\mathcal{F}_t]d\tilde{W}_t.
\end{aligned}$$

(3.6) より,

$$\begin{aligned}
dY(t) &= Y(t)\theta(t)d\tilde{W}_t \\
&\quad + \Bigg[\Lambda(t)\Bigg(E[Z(T)D_tF|\mathcal{F}_t] - E[Z(T)F\theta(t)|\mathcal{F}_t] \\
&\qquad - E[Z(T)F\int_t^T D_t\theta(s)\, d\tilde{W}_s|\mathcal{F}_t]\Bigg)\Bigg]d\tilde{W}_t \\
&= \Lambda(t)E\left[Z(T)\left(D_tF - F\int_t^T D_t\theta(s)\, d\tilde{W}_s\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]\, d\tilde{W}_t.
\end{aligned}$$

よって,

$$dY(t) = E_Q\left[\left(D_tF - F\int_t^T D_t\theta(s)\, d\tilde{W}_s\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]\, d\tilde{W}_t$$

を得る. $Y(0) = E_Q[F|\mathcal{F}_0] = E_Q[F]$ より定理の主張を得る. □

注意 3.25. この定理の重要な点は, F が $\mathcal{F}_T$ 可測であり, 必ずしも $\tilde{\mathcal{F}}_T$ 可測でない場合についても, $\tilde{W}$ に関する確率積分の表示を与えているという点である.

第4章　Black-Scholesモデルの拡張

この章では, Takaoka[8] で提唱されている Black-Scholes モデルを拡張したモデルと, 沼澤 [6] で述べられているさらなる拡張のモデルを導入し, その性質について述べる.

4.1　Black-Scholesモデルの拡張

この節では, 本修士論文で扱う金融市場モデルについて述べる. 本修士論文では, 次の安全資産 B と危険資産 S^α からなる金融市場モデル

$$\begin{cases} B_t = e^{rt}, \\ S_t^\alpha = S_0 e^{\alpha r t} \int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma) \end{cases}$$

について考察を行う. ただし, $\lambda \in \Lambda := \{(0,\infty)\text{ 上の確率測度} \mid \int_0^\infty \sigma\lambda(d\sigma) < \infty\}$ とし, W は完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の一次元標準ブラウン運動とする. 満期を正定数 T とし, $t \in [0,T]$ とする. α は実数とし, r, C, S_0 は正定数とする. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ は, $\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}\}$ とする. ただし, $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W_s : 0 \le s \le t\}$ とし, $\mathcal{N}$ は $\mathcal{F}_T^W$ 上の零集合の族とする. 特に, λ がディラック測度のときは Black-Scholes モデルに対応し, $\alpha = 1$ のときは Takaoka[8] で提唱されているモデルに対応する. 2 章で考察したように, 危険資産 S^α は (2.2) のような表示の方が扱い易い. そのために次を用いる.

補題 4.1 ([8] Appendix)**.** η は $\mathbf{R}_+$ 上の有限測度で, $\int_0^\infty \sigma\eta(d\sigma) < \infty$ を満たすとする. このとき, ほとんど確実に

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp\left\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\eta(d\sigma) \\ &\qquad = \eta(\mathbf{R}_+) + \int_0^t \left[\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma(W_u + Cu) - \frac{1}{2}\sigma^2 u\right\}\eta(d\sigma)\right] d(W_u + Cu) \end{aligned}$$

が $t \ge 0$ に対して成り立つ.

ここで, 補題 4.1 より, $Y_t := \int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t + Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)$ とすると, $dY_t = [\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(W_t+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)]d(W_t+Ct)$ となり, また, $S_t^\alpha = S_0 e^{\alpha r t} Y_t$ となるので,

$$
\begin{aligned}
dS_t^\alpha &= \alpha r S_t^\alpha dt + S_0 e^{\alpha r t}\left[\int_0^\infty \sigma\exp\left\{\sigma(W_t+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\lambda(d\sigma)\right] d(W_t+Ct) \\
&= \alpha r S_t^\alpha dt + S_t^\alpha \frac{1}{Y_t}\left[\int_0^\infty \sigma\exp\left\{\sigma(W_t+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\lambda(d\sigma)\right] d(W_t+Ct) \\
&= S_t^\alpha\left(\alpha r + C\phi(t)\right) dt + S_t^\alpha \phi(t)\, dW_t.
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\phi(t) := \frac{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(W_t+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_t+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}
$$

とする. このとき, 市場リスク価格過程 $\theta_\alpha(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
\theta_\alpha(t) &= \frac{(\alpha r + C\phi(t)) - r}{\phi(t)} \\
&= C - \frac{r(1-\alpha)}{\phi(t)}
\end{aligned}
$$

となる. 第 1 章で見たように, 金融市場が標準的であるためには,

$$
Z^\alpha(t) := \exp\left\{-\int_0^t \theta_\alpha(s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_\alpha^2(s)\, ds\right\}
$$

について, $\{Z^\alpha(t)\}_{0\le t\le T}$ がマルチンゲールでなければならない. そこで, $\lambda \in \Lambda$ の台の下限を m として, 以下の場合を考える.

1. $\alpha = 1$ のとき
   $\theta_1(t) = C$ により任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, Z^1 はマルチンゲールである.

2. $\alpha \neq 1$ かつ $m > 0$ のとき
   θ_α は有界であるから, ノビコフ条件により, Z^α はマルチンゲールである.

3. $\alpha \neq 1$ かつ $m = 0$ のとき
   θ_α は非有界であるから, Z^α がマルチンゲールであるかどうかは自明ではない.

そこで, Z^α がマルチンゲールになる十分条件を次で与える.

定理 4.2 ([6])**.** $m = 0$ とする. 正定数 $y_0 = y_0(\lambda), D = D(T)$ が存在して $y > y_0$ に対して

$$
\frac{\int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma(-y+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma(-y+Ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)} > \frac{D}{y}
$$

が成り立つ $\lambda \in \Lambda$ に対して, $Z^\alpha(t)$ はマルチンゲールになる. 特に λ がルベーグ測度に関する密度 ρ を持ち, ρ が原点近傍で多項式程度の増大度を持つならばこの条件が成り立つ.

4.2 拡張のモデルにおけるヘッジポートフォリオの表現

4.2.1 λ がディラック測度のとき

次に本修士論文の主題である, ヨーロッパ型条件付請求権のヘッジポートフォリオの表現について考察する. この小節では特に $\lambda = \delta_{\sigma_0}$ のとき, つまり危険資産モデルが Black-Scholes モデルの場合を扱う. このとき,

$$\begin{aligned} dS_t^\alpha &= S_t^\alpha \left(\alpha r + C\sigma_0\right) dt + S_t^\alpha \sigma_0 \, dW_t \\ &= S_t^\alpha r \, dt + S_t^\alpha \sigma_0 \, d\tilde{W}_t^\alpha \end{aligned}$$

となることにまず注意する. ただし,

$$\tilde{W}_t^\alpha := W_t + \left(C - \frac{r(1-\alpha)}{\sigma_0}\right) t$$

とする. このとき, $H : [0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbf{R} \to (0,\infty)$ を

$$H(u,x,y) := x\exp\big[u(r - \frac{1}{2}\sigma_0^2) + y\big]$$

とするとき,

$$S_t^\alpha = H\big(t-s, S_s^\alpha, \sigma_0(\tilde{W}_t^\alpha - \tilde{W}_s^\alpha)\big), \quad 0 \le s \le t \le T$$

と書ける. 今, $\varphi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ を連続で, $|x|$ と $1/|x|$ について多項式増大条件を満たす関数とする. このとき, $F = \varphi(S_T^1)$ のヘッジポートフォリオを考える. ここで,

$$\hat{X}(t) := E_\alpha[e^{-r(T-t)}\varphi(S_T^\alpha)|\mathcal{F}_t]$$

とすると,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= e^{-r(T-t)} E_\alpha \left[(\varphi \circ H) \left(T-t, S_t^\alpha, \sigma_0(\tilde{W}_T^\alpha - \tilde{W}_t^\alpha)\right) \big| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbf{R}} (\varphi \circ H)\big(T-t, S_t^\alpha, \sigma_0\xi\big) G_{T-t}(\xi) \, d\xi, \quad 0 \le t < T. \end{aligned}$$

ただし, P_α を θ_α から決まるリスク中立同値マルチンゲール測度 ((2.6),(2.7) 参照) とし, E_α は P_α による期待値とする. また,

$$G_s(\xi) := (2\pi s)^{-1/2}\exp\big(-\frac{\xi^2}{2s}\big), \quad s > 0, \xi \in \mathbf{R}$$

とする. このとき, $\hat{X}(T) = \varphi(S_T^\alpha)$ に注意する. また,

$$U(s,x) := \begin{cases} e^{-rs} \int_{\mathbf{R}} (\varphi \circ H)(s,x,\sigma\xi) G_s(\xi) \, d\xi, & s > 0, \, x \in (0,\infty) \\ \varphi(x) \quad s = 0, \, x \in (0,\infty) \end{cases} \tag{4.1}$$

とするとき,

$$\hat{X}(t) = U(T-t, S_t^\alpha), \quad 0 \le t \le T.$$

が成り立つ. また, ファインマン-カッツ表現 (定理 5.42 参照) により, (4.1) は次のコーシー問題の一意解である.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{1}{2}x^2\sigma_0^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + rx\frac{\partial U}{\partial x} - rU, & s>0,\ x\in(0,\infty) \\ U(0,x) = \varphi(x), & x\in(0,\infty). \end{cases} \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) より, 伊藤の公式から,

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) &= \left(-\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2}x^2\sigma_0^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + rx\frac{\partial U}{\partial x}\right)(T-t, S_t^\alpha)\,dt + \frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha)S_t^\alpha\sigma_0\,d\tilde{W}_t^\alpha \\ &= r\hat{X}(t)\,dt + \frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha)S_t^\alpha\sigma_0\,d\tilde{W}_t^\alpha. \end{aligned}$$

よって,

$$\varphi(S_T^\alpha) = E_\alpha[e^{rT}\varphi(S_T^\alpha)] + \int_0^T e^{-r(T-t)}\frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha)S_t^\alpha\sigma_0\,d\tilde{W}_t^\alpha$$

が成り立つ. よって, $F = \varphi(S_T^\alpha)$ のヘッジポートフォリオは,

$$\pi(t) = S_t^\alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha) \quad (0 \le t < T)$$

で得られる. よって, 上の φ として, $\varphi(x) = [x-q]^+ (0 < x < \infty)$ をとることにより, 次の **Black-Scholes の公式**を得る.

定理 4.3 ([1] Example 1.3, Black-Scholes の公式, $\lambda \in \Lambda$ が単位分布の場合)**.** 行使価格 q のヨーロッパコールオプション $F = [S_t^\alpha - q]^+$ の価格過程は,

$$\hat{X}(t) = U(T-t, S_t^\alpha; q), \quad (0 \le t \le T)$$

ただし,

$$U(s,x;q) = \begin{cases} x\Phi(\mu_+(s,x;q)) - qe^{-rs}\Phi(\mu_-(s,x;q)), & s>0,\ 0<x<\infty \\ [x-q]^+, & s=0,\ 0<x<\infty \end{cases}$$

であり,

$$\mu_\pm(s,x;q) := \frac{1}{\sigma_0\sqrt{s}}\left[\log\left(\frac{x}{q}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma_0^2}{2}\right)s\right],$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-y^2/2}\,dy$$

とする. また, ヘッジポートフォリオは,

$$\pi(t) = S_t^\alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha; q), \quad 0 \le t < T$$

となる.

特に, 前定理のヘッジポートフォリオを計算すると次のようになる.

補題 4.4 ($\lambda \in \Lambda$ が単位分布の場合)**.** 行使価格 q のヨーロッパコールオプション $F = [S_T^\alpha - q]^+$ のヘッジポートフォリオは,

$$\pi(t) = S_t^\alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(T-t, S_t^\alpha; q) = S_t^\alpha \Phi(\mu_+(T-t, S_t^\alpha; q)) \quad 0 \le t < T.$$

証明.

$$U(s,x;q) = x\Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right) - qe^{-rs}\Phi\left(\mu_-(s,x;q)\right), \quad s>0,\, 0<x<\infty$$

より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}(s,x;q) &= \Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right) + x\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(\mu_+(s,x;q)\right)\mu_+'(s,x;q) \\
&\quad - qe^{-rs}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(\mu_-(s,x;q)\right)\mu_-'(s,x;q) \\
&= \Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right) + x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_+^2(s,x;q)\right\} \times \frac{1}{x\sigma\sqrt{s}} \\
&\quad - qe^{-rs}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_-^2(s,x;q)\right\} \times \frac{1}{x\sigma\sqrt{s}} \\
&= \Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_+^2(s,x;q)\right\} \\
&\quad - \frac{q}{x}e^{-rs}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_-^2(s,x;q)\right\} \\
&= \Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_+^2(s,x;q)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_-^2(s,x;q) - \log\frac{x}{q} - rs\right\} \\
&= \Phi\left(\mu_+(s,x;q)\right), \quad s>0,\, 0<x<\infty.
\end{aligned}$$

よって主張を得る. □

4.2.2 一般の $\lambda \in \Lambda$ について ($\alpha = 1$ の場合)

次に $\alpha = 1$ とし, 一般の $\lambda \in \Lambda$ について述べる.

命題 4.5. $\lambda \in \Lambda$ が

$$\int_0^\infty \sigma \exp\{\sigma C T\}\lambda(d\sigma) < \infty \tag{4.3}$$

を満たすとき, $S_T^1 = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \exp\{\sigma(W_T + CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}\lambda(d\sigma) \in \mathbf{D}^{1,1}$ であり,

$$D_t(S_T^1) = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma(W_T + CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma)1_{[0,T]}(t)$$

が成り立つ.

証明.

$$f(x) = S_0 e^{rT} \int_0^\infty \exp\left\{\sigma(x+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma) \quad (x \in \mathbf{R})$$

とすると, $f \in C^1(\mathbf{R})$ であり,

$$f'(x) = S_0 e^{rT} \int_0^\infty \sigma\exp\left\{\sigma(x+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ. $S_T^1 = f(W_T)$ であるから, 補題 3.20 により,

$$E\left[|f(W_T)| + \|f'(W_T)1_{[0,T]}\|_{L^2([0,T])}\right] < \infty$$

が成り立てばよい.

$$\begin{aligned} E[\|f'(W_T)1_{[0,T]}\|] &= E\left[T^{1/2} S_0 e^{rT} \int_0^\infty \sigma\exp\left\{\sigma(W_T+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma)\right] \\ &= T^{1/2} S_0 e^{rT} E\left[\int_0^\infty \sigma\exp\left\{\sigma(W_T+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma)\right]. \end{aligned}$$

フビニの定理より,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= T^{1/2} S_0 e^{rT} \left(\int_0^\infty \sigma E\left[\exp\left\{\sigma(W_T+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\right] \lambda(d\sigma)\right) \\ &= T^{1/2} S_0 e^{rT} \int_0^\infty \sigma\exp\{\sigma CT\}\lambda(d\sigma). \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} E[|f(W_T)|] &= E\left[S_0 e^{rT} \int_0^\infty \exp\left\{\sigma(W_T+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma)\right] \\ &= S_0 e^{rT} \int_0^\infty E\left[\exp\left\{\sigma(W_T+CT) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\right] \lambda(d\sigma) \\ &= S_0 e^{rT} \int_0^\infty \exp\{\sigma CT\}\lambda(d\sigma). \end{aligned}$$

より主張は示される. □

3 章において完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上の一次元標準ブラウン運動 $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t \le T\}$ に関して, 微分作用素 D を導入し, その定義域 $\mathbf{D}^{1,1}$ を決めた (定義 3.7 参照) ここで, P_1 を

$$P_1(A) = E\left[\exp\left\{-CW_T - \frac{1}{2}C^2 T\right\} 1_A\right] \ (A \in \mathcal{F}_T)$$

とし, 完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_1)$ 上の一次元標準ブラウン運動 $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t \le T\}$(ただし, $\tilde{W}_t = W_t + Ct$) に関しても同様にして, 微分作用素 $\tilde{D}$ を導入し, その定義域を $\tilde{\mathbf{D}}^{1,1}$ とする.

命題 4.6. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $S^1_T = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \exp\{\sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}\lambda(d\sigma) \in \tilde{\mathbf{D}}^{1,1}$ であり,

$$\tilde{D}_t S^1_T = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma) 1_{[0,T]}(t)$$

が成り立つ.

証明. $\tilde{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$\tilde{f}(x) := S_0 e^{rT}\int_0^\infty \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma)$$

とすると, $\tilde{f} \in C^1(\mathbf{R})$ であり,

$$f'(x) = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ. $S^1_T = \tilde{f}(\tilde{W}_T)$ であるから, 命題 4.5 における $C = 0$ の場合とみなせるので, 主張を得る. $\square$

定理 4.7 (クラーク・オコンの拡張による方法)**.** $\alpha = 1$ とし, $F = [S^1_T - q]^+$ とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$F = E_1[F] + \int_0^T \left[e^{r(T-t)}S^1_t\left(\int_0^\infty \sigma\Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma)\right)\right]d\tilde{W}_t$$

が成り立つ. よって, $F = [S^1_T - q]^+$ のヘッジポートフォリオは,

$$\pi(t) = \frac{S^1_t}{\phi(t)}\int_0^\infty \sigma\Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma), \quad 0 \le t < T.$$

ただし, $\tilde{W}_t = W_t + Ct$ で, E_1 は P_1 についての期待値とする. また,

$$\lambda_t(d\sigma) := \frac{\exp\{\sigma\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}{\int_0^\infty \exp\{\sigma\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}\lambda(d\sigma)}$$

とし, $\hat{x}_t = \hat{x}_t(\tilde{W}_t)$ は, 次の x に関する方程式の解である.

$$S^1_t e^{r(T-t)}\int_0^\infty \exp\left\{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\lambda_t(d\sigma) = q$$

証明. クラーク・オコンの公式の拡張 (定理 3.18 参照) により, $E_1[\tilde{D}_t F|\mathcal{F}_t]$ を計算すればよい. ここで, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$g(x) = [x-q]^+$$

とすると,

$$F = g(S_T^1)$$

である. ここで, g は, $x = q$ で微分不可能であり, 補題 3.20 を直接適用できないので, 次のような近似を考える. g_n は $g_n \in C^1(\mathbf{R})$ で,

$$g_n(x) = g(x) \quad (|x - q| \geq \frac{1}{n})$$

と

$$0 \leq g_n'(x) \leq 1 \quad (x \in \mathbf{R})$$

を満たすものとする. このとき,

$$F_n = g_n(S_T^1)$$

とすると, $\tilde{D}$ が閉作用素であることから,

$$\tilde{D}_t F = \lim_{n\to\infty} \tilde{D}_t F_n = \lim_{n\to\infty} g_n'(S_T^1)\, \tilde{D}_t S_T^1 = 1_{[q,\infty]}(S_T^1)\, \tilde{D}_t S_T^1.$$

よって, 命題 4.6 に注意して,

$$\begin{aligned}
E_1[\tilde{D}_t F|\mathcal{F}_t] &= E_1\left[1_{[q,\infty]}(S_T^1) S_0 e^{rT} \int_0^\infty \sigma \mathrm{exp}\left\{\sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= E_1\Bigg[1_{[q,\infty]}(S_T^1) S_0 e^{rT} \int_0^\infty \mathrm{exp}\left\{\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \lambda(d\sigma) \\
&\qquad \times \int_0^\infty \sigma \mathrm{exp}\left\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right\} \lambda_t(d\sigma) \Bigg| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&= E_1\Bigg[1_{[q,\infty]}(S_T^1) S_t^1 e^{r(T-t)} \\
&\qquad \times \int_0^\infty \sigma \mathrm{exp}\left\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right\} \lambda_t(d\sigma) \Bigg| \mathcal{F}_t\Bigg].
\end{aligned}$$

S_t^1 は $\mathcal{F}_t$ 可測であるから,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= e^{r(T-t)} S_t^1 \\
&\qquad \times E_1\left[1_{[q,\infty]}(S_T^1) \int_0^\infty \sigma \mathrm{exp}\left\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right\} \lambda_t(d\sigma) \middle| \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

フビニの定理より,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= e^{r(T-t)} S_t^1 \\
&\qquad \times \int_0^\infty \sigma E_1\left[1_{[q,\infty]}(S_T^1) \mathrm{exp}\left\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \lambda_t(d\sigma) \\
&= e^{r(T-t)} S_t^1 \\
&\qquad \times \int_0^\infty \sigma E_1\left[1_{\{\tilde{W}_T - \tilde{W}_t \geq \hat{x}_t\}} \mathrm{exp}\left\{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \lambda_t(d\sigma).
\end{aligned}$$

$\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ の確率密度関数に注目して,

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= e^{r(T-t)} S_t^1 \times \int_0^\infty \sigma \biggl[\int_{\hat{x}_t}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
&\qquad \times \exp\Bigl\{ \sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \Bigr\} \exp\Bigl\{ -\frac{x^2}{2(T-t)} \Bigr\}\, dx \biggr] \lambda_t(d\sigma) \\
&= e^{r(T-t)} S_t^1 \int_0^\infty \sigma \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma) \lambda_t(d\sigma).
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
S_T^1 = S_t^1 e^{r(T-t)} \int_0^\infty \exp\left\{ \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right\} \lambda_t(d\sigma)
$$

より,

$$
\begin{aligned}
S_T^1 - q \geq 0 &\Longleftrightarrow S_t^1 e^{r(T-t)} \int_0^\infty \exp\left\{ \sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \right\} \lambda_t(d\sigma) \geq q \\
&\Longleftrightarrow \tilde{W}_T - \tilde{W}_t \geq \hat{x}_t
\end{aligned}
$$

に注意する. □

注意 4.8. 定理 4.7 において得られた, ヘッジポートフォリオの表現において, $\lambda = \delta_{\sigma_0}$ とすると, $\pi(t) = S_t^1 \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma_0)$ となる. この表現は, 補題 4.4 で $\alpha = 1$ として得られる表現と一致することが分かる. 実際

$$
\hat{x}_t = \frac{1}{\sigma_0} \left[-\log\left(\frac{S_t^1}{q} \right) + \left(-r + \frac{\sigma_0^2}{2} \right)(T-t) \right]
$$

より,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma_0 &= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{T-t}} \left[\log\left(\frac{S_t^1}{q} \right) + \left(r + \frac{\sigma_0^2}{2} \right)(T-t) \right] \\
&= \mu_+(T-t, S_t^1; q)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって定理 4.7 の表現は, Black-Scholes のモデルで知られている表現の拡張になっている.

次に定理 4.7 の別証を与える. そのために次の命題を用いる.

命題 4.9. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ はボレル可測で,

$$
\int_{\mathbf{R}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\} |f(x)|\, dx < \infty
$$

を満たすとする. このとき $t < T$ に対して,

$$
E[f(W_T)|\mathcal{F}_t] = E[f(W_T)] + \int_0^t \frac{\partial V_T}{\partial x}(s, W_s)\, dW_s.
$$

ただし,

$$V_T(t,x) := \int_{\mathbf{R}} p(T-t;x,y)f(y)\,dy,$$

$$p(t;x,y) := G_t\,(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{exp}\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}$$

とする.

証明. ブラウン運動のマルコフ性 (定理 5.16 参照) より,

$$E[f(W_T)|\mathcal{F}_t] = E^{W_t}[f(W_{T-t})] = \int_{\mathbf{R}} P(T-t;W_t,y)f(y)\,dy = V_T(t,W_t)$$

が成り立つ. ここで, $V_T(t,x)$ は,

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x^2} = 0$$

を満たすことに注意して, 伊藤の公式より,

$$\begin{aligned} V_T(t,W_t) &= V_T(0,0) + \int_0^t (\frac{\partial V_T}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_T}{\partial x})(s,W_s)\,dt + \int_0^t \frac{\partial V_T}{\partial x}(s,W_s)\,dW_s \\ &= V_T(0,0) + \int_0^t \frac{\partial V_T}{\partial x}(s,W_s)\,dW_s \end{aligned}$$

となり示せた. □

ここで, $F = [S_T^1 - q]^+$ は, $\tilde{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ と $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$\tilde{f}(x) = S_0 e^{rT}\int_0^\infty \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma)$$

$$g(x) = [x-q]^+$$

とすると,

$$F = (g\circ\tilde{f})(\tilde{W}_T)$$

であり, $\lambda\in\Lambda$ に対して,

$$\int_{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}|(g\circ\tilde{f})(x)|\,dx < \infty$$

が成り立つ. 実際,

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &\leq \int_{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\} \tilde{f}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\} \left(S_0 e^{rT} \int_0^\infty \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \lambda(d\sigma)\right) dx
\end{aligned}
$$

フビニの定理より,

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right\} \left(\int_{\mathbf{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T} + \sigma x\right\} dx\right) \lambda(d\sigma) \\
&= \sqrt{2\pi T} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

より従う. よって命題 4.9 より次が成り立つ.

定理 4.10 (ブラウン運動のマルコフ性と伊藤の公式による方法)**.** $\alpha = 1$ とし, $F = [S_T^1 - q]^+$ とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$
F = E_1[F] + \int_0^T \left[e^{r(T-t)} S_t^1 \left(\int_0^\infty \sigma \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma)\right)\right] d\tilde{W}_t
$$

が成り立つ. よって, $F = [S_T^1 - q]^+$ のヘッジポートフォリオは,

$$
\pi(t) = \frac{S_t^1}{\phi(t)} \int_0^\infty \sigma \Phi(-\frac{\hat{x}_t}{\sqrt{T-t}} + \sqrt{T-t}\,\sigma)\lambda_t(d\sigma), \quad 0 \leq t < T.
$$

証明. $V_T(t,x) := \int_{\mathbf{R}} p(T-t;x,y)(g \circ \tilde{f})(y)\,dy$ について, $\frac{\partial V_T}{\partial x}(t, \tilde{W}_t)$ を計算すればよい.

$$
\frac{\partial V_T}{\partial x}(t,x) = -\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}(x-y)\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)}\right\}(g \circ \tilde{f})(y)\,dy
$$

$\lambda \in \Lambda$ より部分積分ができて,

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)}\right\} 1_{\{\tilde{f}(y) \geq q\}} \tilde{f}'(y)\,dy \\
&= E_1^x[1_{\{\tilde{f}(\tilde{W}_{T-t}) \geq q\}} \tilde{f}'(\tilde{W}_{T-t})].
\end{aligned}
$$

ブラウン運動のマルコフ性より,

$$
\frac{\partial V_T}{\partial x}(t, \tilde{W}_t) = E_1^{\tilde{W}_t}[1_{\{\tilde{f}(\tilde{W}_{T-t}) \geq q\}} \tilde{f}'(\tilde{W}_{T-t})] = E_1[1_{\{\tilde{f}(\tilde{W}_T) \geq q\}} \tilde{f}'(\tilde{W}_T)|\mathcal{F}_t]
$$

を得る. また,

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= E_1\left[1_{[q,\infty]}(S_T^1) S_0 e^{rT} \int_0^\infty \sigma \exp\left\{\sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\lambda(d\sigma) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= E_1[\tilde{D}_t F | \mathcal{F}_t]
\end{aligned}
$$

より, 定理 4.7 の証明の計算と同様にして, 主張を得る. □

注意 4.11. $\alpha \neq 1$ の場合は一般化されたクラーク・オコンの公式 (定理 3.24 参照) を用いたヨーロピアンコールオプションのヘッジポートフォリオの表現が考えられるが, それは今後の課題である.

第5章　補遺

この章では, 確率過程に関する基本事項のまとめをする.

5.1　マルチンゲール

定義 5.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程 $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ が次を満たすとき $\{X_t\}_{t \geq 0}$ は**マルチンゲール (martingale)** であるという.

1. X は $\mathcal{F}_t$ 適合である. すなわち, すべての t に対して X_t は $\mathcal{F}_t$ 可測である.
2. $E[|X_t|] < \infty \quad (t \geq 0)$ が成り立つ.
3. $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad (t \geq s)$ が成り立つ.

また, 3. の等号の代わりに $\geq$ のときは, **劣マルチンゲール (submartingale)**, $\leq$ のときは, **優マルチンゲール (supermartingale)** という.

定義 5.2. $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程 $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ について停止時刻の増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

1. $P[\lim_{n \to \infty} T_n = \infty] = 1$
2. 各 $n \geq 1$ に対して, $\{X_t^n\}_{t \geq 0}$ がマルチンゲールである. ただし, $X_t^n = X_{t \wedge T_n}$ とする.

を満たすものが存在するとき $\{X_t\}_{t \geq 0}$ は**局所マルチンゲール (local martingale)** という.

注意 5.3. マルチンゲールならば, 局所マルチンゲールである ($T_n = n$ とすればよい). しかし, 逆は必ずしも成り立たない.

命題 5.4. 確率過程 $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ を下に有界な局所マルチンゲールであるとする. このとき, X は優マルチンゲールである.

証明. X は局所マルチンゲールであるから, 定義 5.2 の 1 と 2 を満たす停止時刻の増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. ファトゥ(Fatou) の補題より, $t \geq s$ に対して

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = E[\liminf_{n\to\infty} X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] = \liminf_{n\to\infty} X_{s\wedge T_n} = X_s$$

より主張が従う. □

次に, 二次変分について述べる. 特に断らない限り, $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の確率過程について考える.

$$\mathcal{M}_2^c := \{X = \{X_t\}_{t\geq 0} \ : \text{連続かつ二乗可積分なマルチンゲールで}, X_0 = 0\,\text{a.s.}\}$$

とする. $X \in \mathcal{M}_2^c$ とすると, イエンセン (Jensen) の不等式より, X^2 は非負劣マルチンゲールになる. よって, ドゥーブ-メイエ (Doob-Meyer) 分解により,

$$X_t^2 = M_t + A_t, \quad 0 \leq t < \infty$$

と表せる. ただし, $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ は連続なマルチンゲール, $A = \{A_t\}_{t\geq 0}$ は自然な増加過程である. この分解の一意性から, X の二次変分 $\langle X \rangle$ を一意的に決めることができる.

定義 5.5. $X \in \mathcal{M}_2^c$ とする. このとき X に対する**二次変分 (quadratic variation)**$\langle X \rangle$ とは, 自然な増加過程で $\langle X \rangle_0 = 0$ を満たし, かつ $X^2 - \langle X \rangle$ がマルチンゲールとなるものである.

$X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ とすると, 二次変分の定義より, $(X+Y)^2 - \langle X+Y \rangle$, $(X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ はそれぞれマルチンゲールになる. よって, その差 $4XY - [\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle]$ もマルチンゲールになる. ここで, 二つの確率過程 X, Y に対する相互変動を次のように定める.

定義 5.6. $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ とする. このとき X, Y に対する**相互変動過程**$\langle X, Y \rangle$ を

$$\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t], \quad 0 \leq t \leq \infty$$

とする.

また, $X, Y \in \mathcal{M}^{c,loc} := \{X = \{X\}_{t\geq 0} : \text{連続な局所マルチンゲールで}, X_0 = 0\ \text{a.s.}\}$ に対しても, 以下の命題から相互変動 $\langle X, Y \rangle$ と二次変分 $\langle X \rangle$ が定義できる.

命題 5.7 ([3] Problem 1.5.17)**.** $X, Y \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とする. このとき, 以下の条件を満たす適合した連続な有界変動過程 $\langle X, Y \rangle$ が一意的に存在する.

1. $\langle X, Y \rangle_0 = 0$

2. $XY - \langle X, Y\rangle \in \mathcal{M}^{c,loc}$

また, $X = Y$ であるとき, $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$ と書く.

定義 5.8. 命題 5.7 の過程 $\langle X, Y\rangle$ を X, Y の**相互変動**と呼び, $\langle X\rangle$ を X の**二次変分**と呼ぶ.

注意 5.9 ([3] Problem 1.5.17, Problem 1.5.21)**.** $X, Y, Z \in \mathcal{M}^{c,loc}$ かつ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle, \langle \alpha X + \beta Y, Z\rangle = \alpha\langle X, Z\rangle + \beta\langle Y, Z\rangle$$

が成り立つ. さらに, X, Y の少なくとも一方がほとんど確実に有界変動ならば, ほとんど確実に $\langle X, Y\rangle = 0$ である.

5.2 ブラウン運動と確率積分

5.2.1 ブラウン運動について

定義 5.10. 一次元標準ブラウン運動とは, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された適合した連続過程 $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t \le \infty\}$ で以下を満たすものをいう.

1. ほとんど確実に $W_0 = 0$,

2. $0 \le s \le t$ に対して, 増分 $W_t - W_s$ は $\mathcal{F}_s$ に対して独立で, 平均 0, 分散 $t - s$ の正規分布に従う.

注意 5.11. W がブラウン運動で $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ であるとき, 増分 $\{W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\}_{j=1}^{n}$ は独立で, $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ の分布は $t_j - t_{j-1}$ のみに依存している. このとき, 過程 W は**定常**で, **独立増分**をもつという. また, この性質により, ブラウン運動はマルチンゲールである.

注意 5.12. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ はブラウン運動の定義の一部である. しかしながら, フィルトレーションが与えられず W が定常で独立増分をもち, W_t が平均 0 分散 t の正規分布に従うとき, $\{W_t, \mathcal{F}_t^W : 0 \le t < \infty\}$ はブラウン運動である. ただし, $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W_t : 0 \le s \le t\}$ とする.

注意 5.13. 一次元ブラウン運動 W は $W \in \mathcal{M}_2^c$ であり, 二次変分の定義より, $\langle W\rangle_t = t$ が分かる.

定義 5.14. d を正の整数とし, μ を $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ 上の確率測度とする. $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t \le \infty\}$ をある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された $\mathbf{R}^d$ に値をもつ適合した連続過程とする. この過程が次の条件をみたすとき, **初期分布 μ をもつ d 次元ブラウン運動**とよぶ.

1. $P[W_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(R^d)$,

2. $0 \leq s < t$ に対して, 増分 $W_t - W_s$ は $\mathcal{F}_s$ に対して独立で, 平均 0, 共分散行列が $(t-s)I_d$ の正規分布に従う. ここで, I_d は $(d \times d)$ 単位行列である.

定義 5.15. d **次元ブラウン族**とは可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の適合した d 次元過程 $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ と確率測度族 $\{P^x\}_{x \in \mathbf{R}^d}$ との組で, 次の条件をみたすものである.

1. 各 $F \in \mathcal{F}$ に対して, 写像 $x \mapsto P^x(F)$ はボレル可測である.

2. 各 $x \in \mathbf{R}^d$ に対して, $P^x[W_0 = x] = 1$.

3. 各 P^x のもとで, 過程 W は x を出発する d 次元ブラウン運動である.

定理 5.16 ([3] Theorem 2.5.12)**.** d 次元ブラウン族はマルコフ性をもつ. つまり $x \in \mathbf{R}^d, s, t \geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して,

$$P^x[X_{s+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_s] = E^{X_s}[1_\Gamma(X_t)]$$

が P^x に関してほとんど確実に成り立つ. ただし E^x は P^x のもとでの期待値である.

5.2.2 確率積分について

この節では, 確率積分という概念について述べる. 目標は $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ に対して, 発展的可測 (定義 5.17 参照) な確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ で, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\int_0^T X_t^2 \, d\langle M \rangle_t < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{5.1}$$

を満たすもの全体を $\rho^*(M)$ とするとき, $X \in \rho^*(M)$ に対して, 確率積分 $\int_0^t X_s \, dM_s$ を定義することである.

定義 5.17 ([3] Definition 1.1.11)**.** 確率過程 X がフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して**発展的可測**であるとは, 写像 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t] \otimes \mathcal{F}_t) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ が各 $t \geq 0$ で可測であることをいう.

注意 5.18. 任意の発展的可測過程は可測であり, 適合している.

定義 5.19. X が次の条件を満たすとき**単過程**であるという. 狭義単調増加実数列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(t_0 = 0, \lim_{n \to \infty} t_n = \infty)$ と, 確率変数列 $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ と, 定数 $C < \infty$ が存在して, $\omega \in \Omega$ に対して, $\sup_{n \geq 1} |\xi_n(\omega)| \leq C$, また, $n \geq 0$ について ξ_n は $\mathcal{F}_{t_n}$-可測で,

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) 1_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad 0 \leq t \leq \infty, \omega \in \Omega$$

が成り立つ. また, すべての単過程の集合を $\mathcal{L}_0$ で表す.

定義 5.20. ここで, $M \in \mathcal{M}_2^c$ と $X \in \mathcal{L}_0$ に対して確率積分 $(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s\,dM_s$ をマルチンゲール変換

$$(X \cdot M)_t := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}), \quad 0 \le t < \infty$$

で定義する.

次に $\mathcal{L}_0$ より広い集合に対して確率積分を定義する.

定義 5.21. $M \in \mathcal{M}_2^c$ に対して, 発展的可測な確率過程 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ で, 任意の $T > 0$ に対して,

$$[X]_T := \left(E \int_0^T X_t^2 \, d\langle M\rangle_t \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

を満たすもの全体を $\mathcal{L}^*(M)$ とする. また, $\mathcal{L}^*(M)$ 上の距離を

$$[X - Y] := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (1 \wedge [X - Y]_n) \tag{5.2}$$

と定める.

命題 5.22 ([3] Proposition 3.2.8)**.** 単過程の集合 $\mathcal{L}_0$ は定義 5.21 の (5.2) の距離に関して $\mathcal{L}^*$ で稠密である.

命題 5.23 ([3] Propsition 1.5.23)**.** $M \in \mathcal{M}_2^c$ とする. $t \ge 0$ に対して, $\|M\|_t := (E[M_t^2])^{\frac{1}{2}}$ とし, $\|M\| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \|M\|_n)$ とする. このとき, $\|\cdot\|$ について $\mathcal{M}_2^c$ は, 完備距離空間である.

命題 5.24 ([3] 3.2 section B)**.** $X, Y \in \mathcal{L}_0$, $M \in \mathcal{M}_2^c$, に対して,

$$\|X \cdot M\| = [X], \tag{5.3}$$

$$\big((\alpha X + \beta Y)\cdot M\big) = \alpha (X \cdot M) + \beta (Y \cdot M) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \tag{5.4}$$

が成り立つ.

ここで, $X \in \mathcal{L}^*$ に対して, 命題 5.22 により, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_0$ で, $\lim_{n\to\infty} [X_n - X] = 0$ を満たすものが存在する. よって (5.4) と (5.3) より,

$$\|(X_n \cdot M) - (X_m \cdot M)\| = \|((X_n - X_m)\cdot M)\| = [X_n - X_m] \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

が成り立つ. よって $\{(X_n \cdot M)\}_{n=1}$ は $\mathcal{M}_2^c$ でコーシー列となり, 命題 5.23 より, その完備性から, $\lim_{n\to\infty} \|(X \cdot M) - (X_n \cdot M)\| = 0$ を満たすような $(X \cdot M) \in \mathcal{M}_2^c$ が存在する.

定義 5.25. $X \in \mathcal{L}^*$ に対して, $M \in \mathcal{M}_2^c$ に関する確率積分は, 唯一に定まる二乗可積分マルチンゲール $(X \cdot M) = \{(X \cdot M)_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ で, $\lim_{n\to\infty}[X_n - X] = 0$ が成り立つあらゆる列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_0$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \|(X_n \cdot M) - (X \cdot M)\| = 0$ が成り立つものとする.

ここで, 確率積分の性質について述べる.

命題 5.26 ([3] 3.2 section C)**.** $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, $X \in \mathcal{L}^*(M)$, $Y \in \mathcal{L}^*(N)$ に対して,

$$E\left[\left(\int_s^t X_u\, dM_u\right)\left(\int_s^t Y_u\, dN_u\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X_u Y_u\, d\langle M, N\rangle_u \middle|\mathcal{F}_s\right], 0 \le s < t < \infty \tag{5.5}$$

よって,

$$E\left[\left(\int_0^t X_s\, dM_s\right)\left(\int_0^t Y_s\, dN_s\right)\right] = E\left[\int_0^t X_s Y_s\, d\langle M, N\rangle_s\right], \quad 0 \le t < \infty \tag{5.6}$$

$$\big\langle (X \cdot M), (Y \cdot N)\big\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u, \quad t \ge 0 \tag{5.7}$$

最後に $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ に関する $X \in \rho(M)$ に対しての確率積分 $(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s\, dM_s$ については, 局所化によって, $M \in \mathcal{M}_2^c$ に関する $X \in \mathcal{L}^*(M)$ に対しての確率積分に帰着して定義される. このとき, 確率積分 $(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s\, dM_s$ は局所マルチンゲールである.

命題 5.27 ([3] 3.2 section D)**.** $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, $X \in \rho(M)$ に対して, (5.7) が成り立つ.

注意 5.28. 一次元標準ブラウン運動 $W \in \mathcal{M}_2^c$ に関する確率積分は, 二次変分過程 $\langle W\rangle$ の標本軌道 $t \mapsto \langle W\rangle_t(\omega)(= t)$ が, P に関してほとんど確実に t の絶対連続関数であることにより, X が発展的可測でなく, 可測かつ $\{\mathcal{F}_t\}$-適合であれば, 確率積分を定義できる. また, 本修士論文では, ブラウン運動に関する確率積分を**伊藤積分**と呼び, 確率積分の性質 (5.6) を**伊藤積分の等長性**と呼ぶ.

定義 5.29. **連続半マルチンゲール**$X = \{X_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ とは, 適合した過程で, P に関してほとんど確実に分解

$$X_t = X_0 + M_t + B_t, \quad 0 \le t < \infty \tag{5.8}$$

をもつものである. ここで, $M = \{M_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ であり, $B = \{B_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ は連続かつ非減少な適合過程 $A^\pm = \{A_t^\pm, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ の差である. つまり,

$$B_t = A_t^+ - A_t^-, \quad 0 \le t < \infty \tag{5.9}$$

がほとんど確実に成り立つ. ここで $A_0^\pm = 0$. また, (5.9) は最小の分解であると常に仮定しよう. つまり, A_t^+ は $[0, T]$ 上の B の正の変動で, A_t^- は負の変動である. すると $[0, t]$ 上の B の全変動は $\check{B}_t := A_t^+ + A_t^-$ である.

次に, 伊藤の公式について述べる. これは, 連続半マルチンゲールの適当な関数は, また連続半マルチンゲールであることを示し, その分解を与える.

定理 5.30 ([3] Theorem 3.3.3, 伊藤の公式)**.** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数とする. $X = \{X_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ は, 分解 (5.8) をもつ連続な半マルチンゲールとする. このとき, P に関してほとんど確実に,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dM_s + \int_0^t f'(X_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle M\rangle_s, \quad 0 \le t < \infty$$

また, 伊藤の公式は多次元版に拡張できる.

定理 5.31 ([3] Theorem 3.3.6, 伊藤の公式多次元版)**.** $\{M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^d), \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ を $\mathcal{M}^{c,\mathrm{loc}}$ に属する局所マルチンゲールベクトルとする. $\{B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d), \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ を $B_0 = 0$ なる適合した有界変動過程ベクトルとする. $X_t = X_0 + M_t + B_t, 0 \le t < \infty$ とおく. ここで X_0 は $\mathbf{R}^d$ に値をもつ $\mathcal{F}_0$ 可測確率ベクトルである. $f : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ を $C^{1,2}$ 級とする. このとき, P に関してほとんど確実に

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s)\,ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s)\,dB_s^{(i)} \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s)\,dM_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s) d\langle M^i, M^j\rangle_s, \quad 0 \le t < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 5.32 ([3] Problem 3.4.16, マルチンゲール表現定理)**.** $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の一次元ブラウン運動とし, $\{\mathcal{F}_t\}$ を W により生成されたフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t^W\}$ の P のもとでの拡張とする. 任意の $M = \{M_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ に対して, 発展的可測過程 $Y = \{Y_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ が存在して, あらゆる $0 < T < \infty$ に対して,

$$\int_0^T Y_t^2\,dt < \infty \text{ a.s.} \tag{5.10}$$

かつ

$$M_t = \int_0^t Y_s\,dW_s, \quad 0 \le t < \infty \tag{5.11}$$

が成り立つ. また, 一意性については, $\tilde{Y}$ が (5.10),(5.11) を満たす任意の他の発展的可測過程とするとき, ほとんど確実に

$$\int_0^\infty |Y_t - \tilde{Y}_t|^2\,dt = 0$$

である.

定理 5.33 ([3] Theorem 3.3.26, Burkholder-Davis-Gundy の不等式)**.** $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ とし, $M_t^* := \max_{0\le s\le t} |M_s|$ とする．あらゆる $m > 0$ に対して, 正定数 k_m,K_m が存在して,

$$k_m E[\langle M\rangle_T^m] \le E[(M_T^*)^{2m}] \le K_m E[\langle M\rangle_T^m]$$

があらゆる停止時刻 T に対して成り立つ.

注意 5.34. K を可分なヒルベルト空間とする．このとき, K 値連続局所マルチンゲール M に対して, 定理 5.33 と同様の主張が成り立つ.

$X = \{X_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ は発展的可測過程で, ほとんど確実に

$$\int_0^T X_t^2\,dt < \infty, \quad 0 \le T < \infty$$

を満たすとする．このとき, 伊藤積分が定義され, $\mathcal{M}^{c,\mathrm{loc}}$ の要素であった.

$$Z_t(X) := \exp\left[\int_0^t X_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\,ds\right].$$

とする．このとき, 伊藤の公式より,

$$Z_t(X) = 1 + \int_0^t Z_s(X) X_s\,dW_s$$

これから, $Z(X)$ は $Z_0(X) = 1$ なる連続な局所マルチンゲールであることがわかる. 特に非負であり, 補題 5.4 から, 連続な優マルチンゲールである. 次に, $Z(X)$ がマルチンゲールになる十分条件について述べる.

補題 5.35 ([3] Corollary 3.5.13, ノビコフ (Novikov) 条件)**.**

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2\,ds\right)\right] < \infty, \quad 0 \le T < \infty$$

であるとき, $Z(X)$ はマルチンゲールになる.

$Z(X)$ がマルチンゲールであるとき, $E[Z_t(X)] = 1 (0 \le t < \infty)$ である. この場合, 各 $0 \le T < \infty$ に対して F_T 上の確率測度 $\tilde{P}_T$ を

$$\tilde{P}_T(A) = E[1_A Z_T(X)], \quad A \in \mathcal{F}_T$$

により定義することができる. またマルチンゲール性により, 確率測度の族 $\{\tilde{P}_t\}_{t\ge 0}$ は整合性条件

$$\tilde{P}_T(A) = \tilde{P}_t(A), \quad A \in \mathcal{F}_t$$

を満たす.

補題 5.36 ([3] Lemma 3.5.3, ベイズ (Bayes) の法則)**.** $0 \le T < \infty$ を固定し, $Z(X)$ がマルチンゲールであると仮定する. $0 \le s \le t \le T$ とし, Y が $\tilde{E}_T[|Y|] < \infty$ を満たす $\mathcal{F}_t$ 可測確率変数であるとき,

$$\tilde{E}_T[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s(X)} E[Y Z_t(X)|\mathcal{F}_s]$$

が $P, \tilde{P}$ に関してほとんど確実に成り立つ. ただし, $\tilde{E}_T$ は $\tilde{P}_T$ のもとでの期待値である.

定理 5.37 ([3] Theorem 3.5.1, ギルサノフ (Girsanov) の定理)**.** $Z(X)$ はマルチンゲールであると仮定し, 過程 $\tilde{W}$ を

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t X_s\,ds \quad 0 \le t < \infty$$

により定義する. このとき, 各固定した $T \in [0,\infty)$ に対して, 過程 $\{\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < T\}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{P}_T)$ 上の一次元標準ブラウン運動となる.

5.3 コーシー問題とファインマン・カッツ表現

5.3.1 確率微分方程式

$b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x) : 1 \le i \le d, 1 \le j \le r$ を $[0,\infty) \times \mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}$ へのボレル可測関数とし, **ずれベクトル** $b(t,x) = \{b_i(t,x)\}_{1\le i\le d}$ および**分散行列** $\sigma(t,x) = \{\sigma_{ij}(t.x)\}_{1\le i\le d, 1\le j\le r}$ を定義する. このとき, 次の確率微分方程式の意味づけをする.

$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t \tag{5.12}$$

ここで $W = \{W_t : 0 \le t < \infty\}$ は r 次元ブラウン運動である.

まず, 確率微分方程式 (5.12) の強い解を定義する. そのために, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上の r 次元ブラウン運動 $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W : 0 \le t < \infty\}$ をとる. また, この空間は十分大きく, $\mathcal{F}_\infty^W$ に独立で, 与えられた分布 μ をもつ確率ベクトル ξ を定義できるとする.

$$\mu(\Gamma) = P[\xi \in \Gamma] \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d).$$

$\mathcal{G}_t := \sigma(\xi, W_s : 0 \le s \le t)$ $(0 \le t < \infty)$, $\mathcal{G}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\ge 0} \mathcal{G}_t\right)$ とし, 零集合の全体 $\mathcal{N} := \{N \in \Omega : \exists G \in \mathcal{G}_\infty, N \subseteq G, P(G) = 0\}$ を考え,

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}) \ (0 \le t < \infty), \quad \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\ge 0} \mathcal{F}_t\right) \tag{5.13}$$

とする.

定義 5.38. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で, 固定したブラウン運動の, 初期条件 ξ に関する, 確率微分方程式 (5.12) の**強い解**とは, 連続標本軌道をもち, 次の性質をもつ過程 $X = \{X_t : 0 \le t < \infty\}$ である.

1. X は (5.13) のフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合している.
2. $P[X_0 = \xi] = 1$.
3. $P[\int_0^t \{|b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\}\, ds < \infty] = 1 \quad (1 \le i \le d, 1 \le j \le r, 0 \le t < \infty)$.
4. (5.12) の積分表現

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \quad 0 \le t < \infty$$

がほとんど確実に成り立つ.

定義 5.39. (5.12) の**弱い解**は三つ組 $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$ で次をみたすものである.

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間で $\{\mathcal{F}_t\}$ は通常の条件をみたす $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族の情報系である.
2. $X = \{X_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ は連続な適合した $\mathbf{R}^d$ 値過程である. $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ は r 次元ブラウン運動である.

さらに定義 5.38 の 3 と 4 が満たされる.

定義 5.40. $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$, および $(\tilde{X}, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ が共通の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の共通のブラウン運動と共通の初期条件, つまり $P[X_0 = \tilde{X}_0] = 1$, に対する (5.12) の弱い解であるとき, 二個の過程 X と $\tilde{X}$ は区別できないという. すなわち $P[X_t = \tilde{X}_t, 0 \le t < \infty] = 1$ である. そのとき, **道ごとの一意性が方程式 (5.12) に対して成り立つ**という.

定義 5.41. 方程式 (5.12) に対する**確率法則の意味で一意性**が成り立つとは, 同一の初期条件をもつ, つまり

$$P[X_0 \in \Gamma] = \tilde{P}[\tilde{X}_0 \in \Gamma], \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$$

である任意の二個の弱い解 $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$, および $(\tilde{X}, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ に対して, 二個の過程 $X, \tilde{X}$ が同一法則に従うことである.

5.3.2 コーシー問題とファインマン・カッツ表現

本節を通じて次の確率積分方程式を考える.

$$X_s^{(t,x)} = x + \int_t^s b(\theta, X_\theta^{(t,x)})\, d\theta + \int_t^s \sigma(\theta, X_\theta^{(t,x)})\, dW_\theta, \quad t \le s < \infty \tag{5.14}$$

また, 次の (5.15)-(5.17) を常に仮定する.

$$\begin{cases} \text{係数}\, b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x) : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}\ \text{は}\textbf{連続}\text{で},\ \textbf{一次増大条件} \\ |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \le K^2(1+|x|^2) \quad \text{を満たす} \end{cases} \tag{5.15}$$

方程式 (5.14) は弱い解 $(X^{(t,x)}, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}$をあらゆる組 (t,x) に対してもつ. (5.16)

この解は確率法則の意味で一意的である. (5.17)

また, 2階微分差用素 $\mathcal{A}_t$ を (5.14) に付随するものとする. つまり,

$$(\mathcal{A}_t f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^d b_i(t,x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad f \in C^2(\mathbf{R}^d).$$

ただし, $a_{ik}(t,x) := \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)$ とし, $a_{ik}(t,x)$ は**拡散行列**と呼ばれるものの成分である.

次に, 任意ではあるが固定した $T > 0$ と, 適当な定数 $L > 0, \lambda \ge 1$ に対して, 関数 $f(x) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $g(t,x) : [0,T] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ および $k(t,x) : [0,T] \times \mathbf{R}^d \to [0,\infty)$ を考える. これらは**連続**で次の (5.18),(5.19) を満たすとする.

$$(i)\, |f(x)| \le L(1+|x|^{2\lambda}) \quad \text{または} \quad (ii)\, f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}^d. \tag{5.18}$$

$$(i)\ |g(t,x)| \le L(1+|x|^{2\lambda}) \quad \text{または} \quad (ii)\ g(t,x) \ge 0, \forall 0 \le t \le T, x \in \mathbf{R}^d. \tag{5.19}$$

定理 5.42 ([3] Theorem 5.7.6, コーシー問題とファインマン・カッツ表現)**.** 仮定 (5.15) ∼ (5.19) のもとで, $v(t,x) : [0,T] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ が連続で $C^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}^d)$ 級であり, コーシー問題

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + kv = A_t v + g, \quad [0,T) \times \mathbf{R}^d$$

$$v(T,x) \ = \ f(x), \quad x \in \mathbf{R}^d$$

を満たすとする. また, ある $M > 0, \mu \ge 1$ に対して多項式増加条件

$$\max_{0 \le t \le T} |v(t,x)| \le M(1+|x|^{2\mu}), \quad x \in \mathbf{R}^d$$

をみたすとする．このとき, $v(t,x)$ は $[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 上の確率表現

$$v(t,x) = E^{t,x}\Bigg[f(X_T)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^T k(\theta,X_\theta)\,d\theta\right\} \\ + \int_t^T g(s,X_s)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^s k(\theta,X_\theta)\,d\theta\right\}ds\Bigg]$$

をゆるす．特に, そのような解は一意的である．

証明．伊藤の公式を過程 $v(s,X_s)\mathrm{exp}\{-\int_t^s k(\theta,X_\theta)\,d\theta\}$, $s\in[t,T]$ に適用する．$\tau_n := \inf\{s\geq t : |X_s|\geq n\}$ とすると,

$$\begin{aligned} v(t,x) &= E^{t,x}\left[\int_t^{T\wedge\tau_n} g(s,X_s)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^s k(\theta,X_\theta)\,d\theta\right\}ds\right] \\ &\quad + E^{t,x}\left[v(\tau_n,X_{\tau_n})\mathrm{exp}\left\{-\int_t^{\tau_n} k(\theta,X_\theta)d\theta\right\}1_{\{\tau_n\leq T\}}\right] \\ &\quad + E^{t,x}\left[f(X_T)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^T k(\theta,X_\theta)d\theta\right\}1_{\{\tau_n>T\}}\right] \end{aligned}$$

を得る．また,

$$E^{t,x}[\max_{t\leq\theta\leq s}|X_\theta|^{2m}] \leq C(1+|x|^{2m})e^{C(s-t)};\quad t\leq s\leq T \tag{5.20}$$

があらゆる $m\geq 1$ とある $C=C(m,K,T,d)>0$ に対して成り立つので, 右辺の初項は, $n\to\infty$ とすると, ルベーグの収束定理 ((5.19)(i) と (5.20) より）または単調収束定理（もし (5.19)(ii) が成り立つとき）より

$$E^{t,x}\left[\int_t^T g(s,X_s)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^s k(\theta,X_\theta)\,d\theta\right\}ds\right]$$

に収束する．第 2 項は絶対値が次式を超えない．

$$E^{t,x}[|v(\tau_n,X_{\tau_n})|1_{\{\tau_n\leq T\}}] \leq M(1+n^{2\mu})P^{t,x}[\tau_n\leq T] \tag{5.21}$$

しかしながら, この最後の確率は (5.20) とチェビシェフの不等式とより,

$$\begin{aligned} P^{t,x}[\tau_n\leq T] &= P^{t,x}[\max_{t\leq\theta\leq T}|X_\theta|\geq n] \leq n^{-2m}E^{t,x}[\max_{t\leq\theta\leq T}|X_\theta|^{2m}] \\ &\leq Cn^{-2m}(1+|x|^{2m})e^{CT} \end{aligned}$$

と評価できる．よって, $m>\mu$ と選ぶと, (5.21) の右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．最後の項はルベーグの収束定理または単調収束定理のいずれかにより

$$E^{t,x}\left[f(X_T)\mathrm{exp}\left\{-\int_t^T k(\theta,X_\theta)\,d\theta\right\}\right]$$

に収束する． □

補題 5.43 ([3] Problem 5.7.7)**.** 有界係数の場合, つまり,

$$|b_i(t,x)| + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}^2(t,x) \leq \rho, \quad 0 \leq t < \infty,\ \ x \in \mathbf{R}^d,\ \ 1 \leq i \leq d$$

であるとき, 定理 (5.42) の多項式増加条件は, ある $M > 0, 0 < \mu < (\frac{1}{18\rho T d})$ に対して, 次式で置き換えることができる.

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t,x)| \leq M e^{\mu |x|^2}, \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

参考文献

[1] I. Karatzas, *Lectures on the Mathematics of Finance*, CRM Monographs **8**, American Mathematical Society (1997).

[2] I. Karatzas, D. Ocone, and J. Li, *An extension of Clark's formula*, Stochastics and Stochastics Reports, **37** (1991) 127-131.

[3] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer-Verlag (1991).

[4] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag (1998).

[5] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag (1995).

[6] 沼澤 洋平, Black-Scholes モデルの１つの拡張と無裁定条件, 2006 年度東北大学修士論文.

[7] D. Ocone, I. Karatzas, *A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios*, Stochastics and Stochastics Reports, **34** (1991) 187-220.

[8] K. Takaoka, *A complete-market generalization of the Black-Scholes model*, Asia-Pacific Financial Markets, **11** (2004) 431-444.