修 士 論 文

局所非退化Wiener汎関数の分布密度の滑らかさ

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
永 沼 伸 顕

平 成 21 年 3月

目次

はじめに

本修士論文では Wiener 汎関数の分布密度の存在と滑らかさを, 従来より拡張された意味での局所非退化性の下で証明する. 多重 Wiener 積分や確率微分方程式の解などの $\mathbf{R}^d$ 値 Wiener 汎関数の分布密度については, Malliavin 解析とよばれる Wiener 空間を典型例とする無限次元空間上の解析学の枠組みで様々な考察が行われている. これらは Malliavin [10] がある種の確率微分方程式の解の時刻ごとの分布密度の存在を示したことに始まり, Shigekawa [14] が抽象 Wiener 空間上の Sobolev 空間の枠組みでそれらを整理し, Wiener 汎関数が分布密度をもつための十分条件を与えた. のちに Watanabe [18] が分布密度の滑らかさに関する議論を行い, Shigekawa [15] がそれを精密化した. この一連の研究は「Wiener 汎関数が大域的に非退化, つまり全空間上で汎関数自身の高階の Malliavin 微分が存在し, さらに Malliavin 共分散行列 γ の行列式 Δ が高次の負べきのモーメントをもつならば $\mathbf{R}^d$ 上で高階微分可能な分布密度が存在する」という結果であり, 汎関数の微分可能性と分布密度の微分可能性の関係なども調べられている. これらの証明では部分積分公式が重要な役割を果たしている. 一方 Wiener 汎関数が大域的に非退化でない場合に滑らかな分布密度が存在するための十分条件を与えたのが Florit-Nualart [2] である. 彼らは「局所的に非退化な Wiener 汎関数, つまりある部分集合上では汎関数の 1 階微分と見なしうる無限階微分可能な u と Malliavin 共分散行列と見なしうる無限階微分可能な行列 γ が存在し, さらに γ の行列式 Δ がすべての負べきのモーメントをもつならば $\mathbf{R}^d$ のある開集合上で無限階微分可能な分布密度が存在する」ことを部分積分公式を拡張することで示した. しかし大域的に非退化でない場合はこれ以外の結果は知られておらず, u と γ の微分可能性と分布密度の微分可能性の関係も調べられていない. これ以外の結果としては Bouleau-Hirsch [1] の結果がある. 彼らは分布密度の存在のみを「Malliavin 共分散行列 γ が非退化」という非常に弱い条件の下で, 部分積分公式を用いずに示している. 大域的に非退化な場合の結果は Ikeda-Watanabe [6], Shigekawa [15] に詳しく, 局所的に非退化な場合の結果は Nualart [11] に詳しい. ただし [11] の該当部分の証明には誤りがあるので注意が必要である. また Bouleau-Hirsch の結果も Nualart [11] に詳しい.

先行研究を正確に述べるためにいくつか記号を用意する. (B, H, μ) を抽象 Wiener 空間, K を可分 Hilbert 空間とする. B 上で定義された p 乗可積分な K 値 Wiener 汎関数の全体を $L^p(K) = L^p(B, \mu; K)$ と表わし, H 方向への微分である Malliavin 微分 D を用いて定義される微分指数 n, 可積分指数 p の B 上の K 値 Sobolev 空間を $W^{n,p}(K) = W^{n,p}(B, \mu; K)$ と表わす. ただし $s \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $1 < p \leq \infty-$ である. この設定の下で [1] は Wiener 汎関数の Malliavin 共分散行列が非退化ならば $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度をもつという次の定理を示した.

定理 1 ([1])**.** $F \in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ とする. F の Malliavin 共分散行列 $\gamma = ((DF^j, DF^k)_H)_{1 \leq j,k \leq d}$ が確率 1 で非退化, つまり $\Delta = \det \gamma \neq 0$ μ-a.s. ならば F は分布密度をもつ.

定理 1 は次のような描像をもつ. まず γ は Jacobi 行列に対応するものであり, その行列式 Δ が 0 でないことは, $x \in B$ を固定したときに $F(x)$ と x を $h \in H$ だけ動かした $F(x+h)$ の差が “大きい” ことを意味する. つまり F は H 方向のずらしに対して “よく動く” ために $\mu(F = a) > 0$ とな

る $a \in \mathbf{R}^d$ が存在せず F が $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度をもつといえる. この描像をさらに押し進めることで [15] は大域的に非退化な Wiener 汎関数は $\mathbf{R}^d$ 上で高階微分可能な分布密度をもつという定理, [2] は局所非退化 Wiener 汎関数は $\mathbf{R}^d$ のある開集合上で無限階微分可能な分布密度をもつという定理を示した.

定理 2 ([15, Theorem 5.9])**.** $p > d$ とする. $F = (F^1, \dots, F^d) \in W^{n+1, 2dn(n+3)p}(\mathbf{R}^d)$ の Malliavin 共分散行列 $\gamma := ((DF^j, DF^k)_H)_{1 \le j,k \le d}$ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{n(n+3)p}(\mathbf{R})$ を満たすならば F は $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度 $\rho \in C^{n-1}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ をもつ.

定理 3 ([2, Theorem 2.1])**.** $F = (F^1, \dots, F^d) \in W^{1,2}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\mathbf{R}^d$ の開集合 A と $u = (u^1, \dots, u^d) \in W^{\infty, \infty-}(H^d)$, $\gamma = (\gamma^{jk})_{1 \le j,k \le d} \in W^{\infty,\infty-}(\mathbf{R}^{d^2})$ が存在し

$$1_{\{F \in A\}} \left[(DF^j, u^k)_H - \gamma^{jk} \right] = 0 \quad \mu\text{-a.s.} \tag{1}$$

を満たし, さらに γ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{\infty-}(\mathbf{R})$ を満たすならば F は A 上で分布密度 $\rho \in C^\infty(A; \mathbf{R})$ をもつ.

定理 2 は確率微分方程式の解の時刻ごとの分布密度の存在と滑らかさを示すためには有用であるが, つぎの場合には定理 2 を用いて滑らかな分布密度の存在を示すことはできない.

(i) Wiener 汎関数の分布が Lebesgue 測度に関して特異な部分をもつとき.

(ii) Wiener 汎関数が十分な微分可能性をもたないとき.

(iii) Malliavin 共分散行列の行列式の逆数がある点の周りでは高次モーメントをもたないとき.

しかし特異な部分が含まれないような開集合 A が存在するならば, (i) の場合でも定理 3 を用いて A 上で滑らかな分布密度の存在がいえる可能性がある. また定理 3 を用いれば (iii) の場合でも高次モーメントをもたない点を除外した部分で滑らかな分布密度の存在いえることがある. (ii),(iii) の場合に定理 2 ではなく定理 3 を用いることで滑らかな分布密度の存在を示しうることを例をあげて詳しく見ていく. (B, H, μ) を 1 次元古典 Wiener 空間すれば, $x \in B$ は μ のもとで $x(0) = 0$ なる 1 次元 Wiener 過程となる. Wiener 汎関数 F を

$$F(x) := \inf_{s \in [0,1]} x(s), \quad x \in B, \tag{2}$$

とおくと, F は C^∞ 級の分布密度 ρ をもち, さらにそれが $\rho(u) = 1_{(-\infty,0)}(u)\sqrt{2/\pi}\exp(-u^2/2)$ となることも知られている [9, Section 2.8]. まず定理 2 を用いて連続な分布密度の存在を示すためには $F \in W^{2,8p}(\mathbf{R})$ が必要であるが, 実際には $F \in W^{1,\infty-}(\mathbf{R}) \setminus W^{2,\infty-}(\mathbf{R})$ であり, F の Malliavin の意味での微分可能性が不足している. さらに DF は $s \mapsto x(s)$ が最小値を取るただ一つの時刻を $\sigma(x) \in [0,1]$ とすれば

$$DF = \int_0^{\cdot} 1_{[0,\sigma]}(u)\, du$$

と与えられるので $\Delta = \|DF\|_H^2 = \sigma$ が得られる. そして [9, Section 2.8] によれば σ は逆正弦法則に従うので

$$\int_B \left(\frac{1}{\Delta}\right)^p d\mu = \int_0^1 \left(\frac{1}{u}\right)^p \frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}\, du = \infty \tag{3}$$

となり, $1/\Delta$ は原点付近でモーメントをもたないことが分かる. このように (2) で定義された Wiener 汎関数は (ii) と (iii) に該当し, 滑らかな分布密度の存在は定理 2 の範疇にはない. ここで $a<0$ を固定し, F が開集合 $A=(-\infty,a)$ に属する事象, つまり $\{F\in A\}$ を考える. 道の連続性より Wiener 過程はある程度時間を経なければ A に達することはできず, 最小値をとる時刻 σ は $\{F\in A\}$ 上では 0 付近には存在しにくい. そして (3) は原点で発散しているので, $\{F\in A\}$ に制限することによって, Δ が大きければ F は滑らかな分布密度をもつという直感がそのまま使える可能性がある. 実際この方針は正しく, $\{F\in A\}$ という事象を考察の対象とし定理 3 を用いることで F が A 上で滑らかな分布密度をもつことを証明できる.

このように局所非退化性は有用な概念であるものの定理 3 の仮定を満たす u と γ をみつけることは易しくはない. (2) で定義された Wiener 汎関数の場合でさえ巧妙な方法で Malliavin の意味で無限階微分可能な u と γ を選んでいる. 応用上, 分布密度に高い微分可能性を要求しない場合に u や γ に高い微分可能性を要求することは有意義とはいえず, また高い微分可能性をもつ u や γ を取り得えない Wiener 汎関数も存在する. この点を鑑みて, 本論文ではより弱い "拡張された意味での局所非退化性" の下で Wiener 汎関数の分布密度の存在を示し, u と γ の微分可能性と分布密度の微分可能性の関係を考察した. それは定理 2 の部分的拡張, 定理 3 の精密化となっている. $1<p,q,r<\infty$ とし, 本論文で中心的役割を果たす "拡張された意味での局所非退化性" を次で定義する.

定義 (局所非退化). $F=(F^1,\dots,F^d)\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\mathbf{R}^d$ の開集合 A と $1/q=1/q_1+\cdots+1/q_n$ なる $1<q_1,\dots,q_n<\infty$ および, すべての $1\le m\le n$ に対して $U\in W^{m,q_m}(H^d)$ となる H^d 値 Wiener 汎関数 $U=(U^1,\dots,U^d)$ が存在し

$$1_{\{F\in A\}}[(DF^j,U^k)_H-\delta_{jk}]=0 \quad \mu\text{-a.s.} \tag{4}$$

を満たすならば, F を $\boldsymbol{(A,n,q)}$ **局所非退化**という. ただし δ_{jk} は $j=k$ のとき 1, $j\neq k$ のとき 0 をとる.

この局所非退化の仮定のもとで分布密度の存在を示すために重要な補題となる主定理 1 が得られる. さらに Malliavin の絶対連続性に関する補題の拡張と Sobolev の不等式を用いることで主定理 2 が得られる.

主定理 1 (定理 5.6). $1/p+1/q+1/r\le 1$, $1/s:=1/q+1/r$, $F\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ は (A,n,q) 局所非退化とする. すべての $1\le|\alpha|\le n$ なる多重指数 α と $G\in W^{n,r}(\mathbf{R})$ に対して $G^\alpha\in L^s(\mathbf{R})$ が存在し

$$\int_B(\partial^\alpha\varphi\circ F)G\,d\mu=\int_B(\varphi\circ F)G^\alpha\,d\mu \quad \varphi\in C^n_{0,A}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}),$$

が成り立つ. ここで $C^n_{0,A}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ は A に含まれるコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^d$ から $\mathbf{R}$ への n 階連続微分可能な関数全体である. とくに形式的に $r=\infty$, $G=1$ とすれば $s:=q$ に対してこれらは成り立つ.

主定理 2 (定理 5.7). $q>d$, $1/p+1/q\le 1$ とする. $F\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ が (A,n,q) 局所非退化ならば F は A 上で分布密度 $\rho\in C^{n-1}(A;\mathbf{R})$ をもつ.

定理 2 の仮定のもとで $U^k_m:=\sum_{j=1}^d DF^j(\gamma^{-1})^{jk}$, $q_m:=2dn(n+3)p/(4d(m+1)-1)$ とおくと, $U_m\in W^{m,q_m}(H^d)$ であり, $A=\mathbf{R}^d$ に対して (4) を満たす. これより定理 2 の仮定のもとで F は $(\mathbf{R}^d,n,2d(n+3)p/(2d(n+3)-1))$ 局所非退化である. また定理 3 の仮定のもとで $U^k_m:=\sum_{j=1}^d u^j(\gamma^{-1})^{jk}$ とおくと, $U_m\in W^{\infty,\infty-}(H^d)$ であり, (1) から (4) が従う. これより定理 3

の仮定のもとで F は $(A, \infty, \infty-)$ 局所非退化である. いずれの場合でも拡張された意味における局所非退化であることが分かる. 具体的な Wiener 汎関数の局所非退化性を示すために, 然るべき性質をもつ U を見つけることは汎関数自身が高い微分可能性をもつ場合は易しいが, そうでない場合は非常に難しい. 主定理 2 がある種の Wiener 汎関数に適用できれば, 熱方程式の基本解の領域変形に関する微分可能性が得られるものの, 現時点においては本質的に (2) で定義された Wiener 汎関数以外に主定理 2 を適用できるものは見つかっていない.

本論文の当初の目的は (2) をより拡張した Wiener 汎関数に対して主定理 2 を用いて滑らかな分布密度の存在を示すことであった. つまり (B, H, μ) を N 次元古典 Wiener 空間とし, $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ に対して

$$F(x) := \inf_{s \in [0,1]} f(x(s)), \quad x \in B, \tag{5}$$

とおいたときに, F が滑らかな分布密度をもつための f の十分条件を与えることであった. しかし F の微分可能性が十分でないために主定理 2 における適切な U を見つけることができなかった. そこで定理 1 を用いて分布密度が存在するための f の十分条件を求めることにした. これによって得られた定理は次のようなものである.

主定理 3 (定理 5.23)**.** $N \geq 2$ のとき $f \in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ に対して $\Sigma_f := \{\xi \in \mathbf{R}^N \mid f(\xi) > f(0)\}$ とおく. もし

(A) $\nabla f(\xi) = 0$ となる $\xi \in \mathbf{R}^N$ が高々可算個であり,

(B) $0 \in \partial \Sigma_f$ であって, 0 が Zaremba の錐条件を満たす

ならば, F は分布密度をもつ.

ここで Zaremba の錐条件とは, 粗くいって $0 \in \partial \Sigma_f$ を頂点とする $\Sigma_f^{\complement}$ に含まれる円錐が存在することをいう. この定理において, (A) は μ-a.s. $x \in B$ に対して $s \mapsto f(x(s))$ が最小値をとる時刻が一意的に定まることを保証し, (B) はその時刻が 0 ではないことを保証している. $N \geq 2$ のときに $f(\xi) = 4|\xi|^2(|\xi|+1)(|\xi|-1)$ を考えると, $\mu(F = -1) > 0$ となることが分かる. これは正の確率で最小値をとる時刻が一意的に定まらない例である. また確率 1 で最小値をとる時刻が一意的に定まったとしても, それが正の確率で 0 であれば分布密度をもたない. たとえば $f(\xi) = |\xi|^2$ は最小値を取る時刻は確率 1 で 0 となる. このとき $\mu(F = 0) = 1$ となり, F は分布密度をもたないことが分かる.

本論文の構成を述べる. 第 1 章では抽象 Wiener 空間の定義と例を与え, さらに p 乗可積分な Wiener 汎関数の空間 $L^p(K)$ について考察する. 第 2 章では $L^p(K)$ 上で定義された Ornstein-Uhlenbeck 半群の性質と連続作用素について考察し, これを用いて第 3 章において多項式 Wiener 汎関数の空間上で定義された二つのノルムの同値性について議論する. 第 4 章では抽象 Wiener 空間上に Sobolev 空間 $W^{s,p}(K)$ を定義しその性質を調べる. 第 5 章で主定理とその証明を述べる.

謝辞

修士論文を作成するにあたり, 服部 哲弥先生と針谷 祐先生に大変お世話になった. 服部先生には学部, 大学院の 3 年間に渡るセミナー, 研究集会への参加など全面的サポートを頂いた. 針谷先生には修士論文のテーマと研究を進めるにあたり有益な助言を頂いた. お二人がいなければこの修士論文が完成することはなかった. 厚く御礼申し上げる. 京都大学大学院情報科学研究科の日野 正訓先生には示唆にあふれるセミナーの機会を頂いた. そして東北確率論セミナーを通じて竹田 雅好先生, 先輩である田原 喜宏氏にもご意見を頂いた. 同じ服部研究室の牛山 辰哉氏と竹島 佑介氏にはセミナーを含め多くの助力を頂いた. 最後に勉強する環境と温かい励ましをくれた両親に心から感謝する.

記号表

最も基本的なもの

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{R} := \{$ 実数 $\}$ とする．$\mathbf{R}^d$ の内積とノルムを次で定める:

$$\xi \cdot \eta := \sum_{j=1}^{d} \xi^j \eta^j, \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^d), \eta = (\eta^1, \dots, \eta^d) \in \mathbf{R}^d,$$
$$|\xi| := \sqrt{\xi \cdot \xi}, \qquad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \in \mathbf{R}^d.$$

多重指数と微分

$\{1, \dots, d\}^0 = \emptyset$ と約束し, $\bigcup_{m=0}^{\infty} \{1, \dots, d\}^m$ の元を多重指数という．$\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^k)$, $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^l)$ を多重指数する．k を α の長さといい $|\alpha|$ と表わし, $\alpha + \beta := (\alpha^1, \dots, \alpha^k, \beta^1, \dots, \beta^l)$ とおく．各 $1 \leq j \leq d$ に対して $\partial_j := \partial / \partial \xi_j$ と表わす．そして $\Delta := \partial_1^2 + \cdots + \partial_d^2, \partial^\alpha := \partial_{\alpha^1} \cdots \partial_{\alpha^k}$ とおく．

連続的微分可能な関数空間

$V \subset U \subset \mathbf{R}^d$ を開集合, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ とし, 次のように定める:

$$C^n(U; \mathbf{R}) := \{\varphi : U \to \mathbf{R} \mid n \text{ 階連続微分可能 } \},$$
$$C_0^n(U; \mathbf{R}) := \{\varphi \in C^n(U; \mathbf{R}) \mid \operatorname{supp} \varphi \text{ が } U \text{ に含まれるコンパクト集合 } \},$$
$$C_{0,V}^n(U; \mathbf{R}) := \{\varphi \in C_0^n(U; \mathbf{R}) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset V\},$$
$$C_{\mathrm{poly}}^n(U; \mathbf{R}) := \{\varphi \in C^n(U; \mathbf{R}) \mid \exists K > 0, \exists k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \text{ s.t. } |\partial^\alpha \varphi(\xi)| \leq K(1 + |\xi|^k)\}.$$

可積分性をもつ関数空間

$U \subset \mathbf{R}^d$ を開集合, $1 \leq p < \infty$ とし, 次のように定める:

$$L^p(U, d\xi; \mathbf{R}) := \{\varphi : U \to \mathbf{R} \mid \varphi \text{ は } U \text{ 上で Lebesgue 測度 } d\xi \text{ に関して } p \text{ 乗可積分 } \},$$
$$L_{\mathrm{loc}}^p(U, d\xi; \mathbf{R}) := \{\varphi : U \to \mathbf{R} \mid \bar{V} \subset U \text{ なる有界開集合 } V \text{ に対して } \varphi \in L^p(V, d\xi; \mathbf{R})\}.$$

その他

定義 1.13 で Fourier-Hermite 多項式を定義するために次の記号をおく:

$$\Lambda := \{a = (a_j)_{j \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{N}^\infty \mid \text{各成分が有限個を除いて } 0\},$$
$$a! := \prod_{j=1}^{\infty} (a_j!), \qquad a = (a_j)_{j \in \mathbf{N}} \in \Lambda,$$
$$|a| := \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad a = (a_j)_{j \in \mathbf{N}} \in \Lambda.$$

第1章　抽象Wiener空間

以下では次の記号を用いる. B を実可分 Banach 空間, B のノルムを $\|\cdot\|_B$ で表わす. そして B^* を B の共役空間, B^* と B の自然な双一次形式を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表わす. さらに H, K を実可分 Hilbert 空間とし, ノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|_H$ と $(\cdot,\cdot)_H$, $\|\cdot\|_K$ と $(\cdot,\cdot)_K$ で表わす.

1.1　抽象 Wiener 空間の定義

定義 1.1 (抽象 Wiener 空間)**.** 1 対 1 の連続線形作用素 $\iota : H \to B$ で像 $\iota(H)$ が B の中で稠密なものが存在し, B 上の Borel 測度 μ が

$$\int_B \exp(\sqrt{-1}\langle \ell, x\rangle)\,\mu(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\iota^*\ell\|_{H^*}^2\right), \quad \ell \in B^* \subset H^*,$$

を満たすとき, 三つ組 (B, H, μ) を**抽象 Wiener 空間**という. また H を **Cameron-Martin 空間**または**再生核 Hilbert 空間**という. ここで $\iota^* : B^* \to H^*$ は ι の双対作用素である.

注意 1.2. $\{\langle \ell, \cdot\rangle \mid \ell \in B^*\}$ の任意の一次結合は正規分布に従う. とくに $\langle \ell, \cdot\rangle$ は平均 0, 分散 $\|\iota^*\ell\|_{H^*}^2$ の正規分布に従う.

定義 1.3. (i) Borel 可測関数 $F : B \to K$ を K **値 Wiener 汎関数**という.

(ii) μ に関して殆ど至る所で一致する K 値 Wiener 汎関数を同一視し, $1 \le p < \infty$ に対して

$$\|F\|_{L^p(K)} := \left(\int_B \|F(x)\|_K^p\,\mu(dx)\right)^{1/p} < \infty$$

を満たす実数値 Wiener 汎関数の全体を $L^p(K) = L^p(B, \mathscr{B}(B), \mu; K)$ とかく.

定義 1.4 (1 次 Wiener 積分の空間)**.** 任意の $h \in \iota^*(B^*)$ に対して $\iota^*\ell = h$ となる $\ell \in B^*$ がただ一つ存在するので線形写像 $I_1 : H^* \to L^2(\mathbf{R})$ を

$$I_1(h)(\cdot) := \langle \ell, \cdot\rangle$$

として定義する. このとき $\|I_1(h)\|_{L^2(\mathbf{R})} = (\int_B \langle \ell, x\rangle^2\,\mu(dx))^{1/2} = \|\iota^*\ell\|_{H^*} = \|h\|_{H^*}$ となるので, I_1 は等距離写像である. そして $\iota^*(B^*)$ は H^* の中で稠密であるから, 任意の $h \in H^*$ に対して H^* の位相で h に収束する $\{h_j\}_{j=1}^\infty \subset \iota^*(B^*)$ が存在する. 線形性より $\|I_1(h_j) - I_1(h_k)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|I_1(h_j - h_k)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|h_j - h_k\|_{H^*}$ となり, $\{I_1(h_j)\}_{j=1}^\infty$ は $L^2(\mathbf{R})$ の収束列であることが分かる. 一般の $h \in H^*$ に対して $I_1 : H^* \to L^2(\mathbf{R})$ を

$$I_1(h) := \lim_{j\to\infty} I_1(h_j)$$

と定義する. I_1 を **1 次 Wiener 積分**といい, $\tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ を

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbf{R}) := \{I_1(h) \in L^2(\mathbf{R}) \mid h \in H^*\}$$

定義し, **1 次 Wiener 積分の空間**という.

注意 1.5. $I_1(h) \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbf{R})$ は平均 0, 分散 $\|h\|_{H^*}^2$ の正規分布に従う.

定理 1.6 (Cameron-Martin の定理 [15, Theorem 1.3])**.** $h \in H$ に対して $\mu(\cdot) := \mu(\cdot - h)$ とおく. μ と μ_h は互いに絶対連続であり, Radon-Nikodým 微分は

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|h\|_H^2 + I_1(\hat{h})(x)\right), \quad x \in B,$$

で与えられる. ここで $\hat{h} \in H^*$ は H と H^* を Riesz の表現定理で同一視したときに h に対応する H^* の元である.

命題 1.7 ([11, Lemma 1.1.2])**.** $F \in L^p(K)$ が

$$\int_B F(x)e^{I_1(h)(x)}\,\mu(dx) = 0, \quad h \in H^*,$$

を満たせば $F = 0$ μ-a.s. である.

定理 1.8 (Fernique の定理 [15, Theorem 1.6.])**.** すべての B 上の連続なセミノルム p に対して $\alpha_p > 0$ が存在し, $0 < \alpha < \alpha_p$ のとき

$$\int_B \exp(\alpha p(x)^2)\,\mu(dx) < \infty$$

が成立する.

証明. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の B 値確率変数 X, Y は互いに独立で分布 μ をもつとする. 命題 6.3, 6.6 より $(X+Y)/\sqrt{2}$ と $(X-Y)/\sqrt{2}$ もまた互いに独立で分布 μ をもつので, すべての $t > s > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
P\left[p(X) \le s\right] P\left[p(X) > t\right] &= P\left[p\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right) \le s\right] P\left[p\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) > t\right] \\
&= P\left[p\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right) \le s, p\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) > t\right] \le P\left[|p(X) - p(Y)| \le \sqrt{2}s, p(X) + p(Y) > \sqrt{2}t\right]
\end{aligned}$$

となることが分かる. そして

$$\begin{aligned}
&\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \mid |\xi - \eta| \le \sqrt{2}s, \xi + \eta > \sqrt{2}t\} \\
&\qquad \subset \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \mid \xi > (t-s)/\sqrt{2}, \eta > (t-s)/\sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

に注意し, X と Y の独立性を用いることで

$$P\left[p(X) \le s\right] P\left[p(X) > t\right] \le P\left[p(X) > \frac{t-s}{\sqrt{2}}, p(Y) > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right] \le P\left[p(X) > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right]^2 \tag{1.1}$$

が得られる．ここで $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して $t_n := s(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2^{n+1}}-1)$, $u_n := s\sqrt{2^{n+4}}$, $a_n := P[p(X) > t_n]/P[p(X) \le s]$ とおけば, (1.1) より $a_n \le a_{n-1}^2$ となり, $a_n \le a_0^{2^n}$ が従う．そして $u_n > t_n$ なので

$$\begin{aligned} P[p(X) > u_n] &\le P[p(X) > t_n] = P[p(X) \le s] a_n \le P[p(X) \le s] a_0^{2^n} \\ &= P[p(X) \le s] \exp(2^n \log a_0) \le P[p(X) \le s] \exp\left(\frac{u_n^2}{16s^2} \log a_0\right) \end{aligned}$$

が得られる．

次に $a_0 < 1$ となるように $s > 0$ を十分大きく取る．すると $k \ge u_0$ ならば $u_n \le k \le u_{n+1}$ なる $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ が存在し

$$\begin{aligned} P[p(X) > k] &\le P[p(X) > u_n] \le P[p(X) \le s] \exp\left(\frac{u_n^2}{16s^2} \log a_0\right) \\ &\le P[p(X) \le s] \exp\left(\frac{u_{n+1}^2}{32s^2} \log a_0\right) \le P[p(X) \le s] \exp\left(\frac{k^2}{32s^2} \log a_0\right) \end{aligned}$$

となる. $\alpha_p := -(\log \alpha_0)/32s^2 > 0$, $\beta_p := P[p(X) \le s]$ とおき $N > u_0$ なる $N \in \mathbf{N}$ を取れば

$$P[p(X) > k] \le \beta_p e^{-\alpha_p k^2}, \quad k \ge N,$$

となる. これより $0 < \alpha < \alpha_p$ ならば

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in B | p(x) > N\}} e^{\alpha p(x)^2} \mu(dx) &= \sum_{k=N}^{\infty} \int_{\{x \in B | k < p(x) \le k+1\}} e^{\alpha p(x)^2} \mu(dx) \\ &\le \sum_{k=N}^{\infty} e^{\alpha(k+1)^2} P[p(X) > k] \le \beta_p \sum_{k=N}^{\infty} e^{\alpha(k+1)^2} e^{-\alpha_p k^2} < \infty \end{aligned}$$

となり結論が従う. □

系 1.9. すべての $0 < p < \infty$ に対して

$$\int_B \|x\|_B^p \, \mu(dx) < \infty$$

が成り立つ.

証明. すべての $\xi > 0$ に対して $\xi^p \le p^p e^{-p} e^{\xi} \le p^p e^{\xi}$ となることに注意すれば, すべての $\alpha > 0$ と $x \in B$ に対して $(\alpha \|x\|_B^2)^{p/2} \le (p/2)^{p/2} e^{\alpha \|x\|_B^2}$ が成り立つことが分かる. したがって

$$\int_B \|x\|_B^p \, \mu(dx) \le \left(\frac{p}{2\alpha}\right)^{p/2} \int_B e^{\alpha \|x\|_B^2} \mu(dx)$$

が得られる. 定理 1.8 より α が十分小さければ右辺は有限であるから, 主張の成立が分かる. □

1.2　抽象 Wiener 空間の例

例 1.10. $B := \mathbf{R}^d$, $H := \mathbf{R}^d$, $\mu(dx) := (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(2t)) dx$ とし, B のノルム $\|\cdot\|_B$ と H の内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を

$$\begin{aligned} \|x\|_B &:= |x|, & x \in B, \\ (h,k)_H &:= t^{-1} h \cdot k, & h,k \in H, \end{aligned}$$

と定める. このとき (B, H, μ) は抽象 Wiener 空間の枠組みに入る.

例 1.11 (古典 Wiener 空間). $B := \{x \in C([0,1];\mathbf{R}^d) \mid x(0) = 0\}$, H を $h = (h^1, \ldots, h^d) \in B$ で各成分が絶対連続かつ Radon-Nikodým 微分 $\dot{h}$ が $L^2([0,1], ds; \mathbf{R}^d)$ に属するものの全体, μ を Wiener 測度とする. B のノルム $\|\cdot\|_B$ と H の内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を

$$\|x\|_B := \sup_{0\le s\le 1} |x(s)|, \qquad x \in B,$$
$$(h,k)_H := \int_0^1 \dot{h}(s)\cdot\dot{k}(s)\,ds, \quad h,k \in H,$$

と定める. このとき (B, H, μ) は抽象 Wiener 空間の枠組みに入り, これを**古典 Wiener 空間**という

証明. 自然な埋め込み $\iota : H \to B$ を考える. つまり $\iota h = h, h \in H$, とする. $h(s) = \int_0^s \dot{h}(u)\,du, s \in [0,1]$, なので Hölder の不等式を用いて

$$|h(s)|^2 \le s\int_0^s |\dot{h}(u)|^2\,du \le \int_0^1 |\dot{h}(u)|^2\,du = \|h\|_H^2$$

となることから ι の連続性が従う. 稠密性は B の元を折れ線で近似することで分かる.

次は $\langle \ell, \cdot\rangle, \ell \in B^*$, が平均 0, 分散 $\|\iota^*\ell\|_H^2$ の正規分布に従うことを示す. Riesz-Markov の定理 [19, p.119 Example 6] より任意の $\ell \in B^*$ に対して

$$\langle \ell, x\rangle = \int_0^1 x(s)\cdot d\lambda_\ell(s), \quad x \in B,$$

となる各成分が有界変動な $\lambda_\ell = (\lambda_\ell^j)_{1\le j\le d} : [0,1] \to \mathbf{R}^d$ が一意的に決まる. そして $f_\ell(s) := \int_0^s d\lambda_\ell(u)$ とおくと, 任意の $h \in H$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \ell, \iota h\rangle &= \int_0^1 h(s)\cdot d\lambda_\ell(s) = h(1)\cdot f_\ell(1) - h(0)\cdot f_\ell(0) - \int_0^1 \dot{h}(s)\cdot f_\ell(s)\,ds \\ &= \int_0^1 \dot{h}(s)\cdot(f_\ell(1) - f_\ell(s))\,ds = \Big(h, \int_0^\cdot (f_\ell(1) - f_\ell(s))\,ds\Big)_H\end{aligned}$$

が成り立のので

$$\iota^*\ell = \int_0^\cdot (f_\ell(1) - f_\ell(s))\,ds$$

が分かる. 一方で Itô の公式より

$$f_\ell(1)\cdot x(1) = \int_0^1 x(s)\cdot d\lambda_\ell(s) + \int_0^1 f_\ell(s)\cdot dx(s)$$

となるから

$$\langle \ell, x\rangle = f_\ell(1)\cdot x(1) - \int_0^1 f_\ell(s)\cdot dx(s) = \int_0^1 (f_\ell(1) - f_\ell(s))\cdot dx(s) = \int_0^1 \frac{d}{ds}(\iota^*\ell)(s)\cdot dx(s)$$

が得られる. これより

$$\int_B \langle \ell, x\rangle\,\mu(dx) = 0,$$
$$\int_B \langle \ell, x\rangle^2\,\mu(dx) = \int_0^1 \left|\frac{d}{ds}(\iota^*\ell)(s)\right|^2 ds = \|\iota^*\ell\|_H^2$$

となり $\langle \ell, \cdot\rangle$ が平均 0, 分散 $\|\iota^*\ell\|_H^2$ の正規分布に従うことが分かる. □

1.3 L^2 空間の Itô-Wiener 展開

この節では $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^\infty$ が H^* の完全正規直交系である $\{\ell_j\}_{j=1}^\infty \subset B^*$ と K の完全正規直交系 $\{\kappa_j\}_{j=1}^\infty$ を一つ固定し, $L^2(K)$ が直和分解可能であることを示す.

命題 1.12. $\{\ell_j\}_{j=1}^\infty \subset B^*$ で $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^\infty$ が H^* の完全正規直交系となるものが存在する.

証明. H^* の中で稠密な可算部分集合 $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ が存在する. $\iota^*(B^*)$ は H^* の中で稠密なので各 j に対して $\|h_j - \iota^*\ell'_{jk}\|_{H^*} < 1/k$ を満たす $\{\ell'_{jk}\}_{j,k=1}^\infty \subset B^*$ が存在する. $h \in H^*$ がすべての j,k に対して $(h, \iota^*\ell'_{jk})_{H^*} = 0$ を満たすならば

$$|(h,h_j)_{H^*}| \le |(h,\iota^*\ell'_{jk})_{H^*}| + |(h, h_k - \iota^*\ell'_{jk})_{H^*}| \le 0 + \|h\|_{H^*}\|h_k - \iota^*\ell'_{jk}\|_{H^*} < \|h\|_{H^*}/k$$

となり, $k \to \infty$ とすれば $(h,h_j)_{H^*} = 0$ が分かる. これと $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ の H^* での稠密性より $h = 0$ が得られる. よって $\{\ell'_{jk}\}_{j,k=1}^\infty$ から作った正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^\infty$ は完全性をもつ. □

定義 1.13 (Fourier-Hermite 多項式)**.** $a \in \Lambda$ に対して

$$H_a(x) := \prod_{j=1}^\infty H_{a_j}(\langle \ell_j, x\rangle), \quad x \in B,$$

とおき **Fourier-Hermite 多項式**という. ただし H_n は n 次 Hermite 多項式で

$$H_n(\xi) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

で与えられるものであり, 次の性質が知られている.

命題 1.14. 次の等式が成立する:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(\xi)}{\sqrt{n!}} t^n = e^{t\xi - t^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{d\xi} H_n(\xi) = \sqrt{n} H_{n-1}(\xi), \tag{1.3}$$

$$\sqrt{n+1} H_{n+1}(\xi) - \xi H_n(\xi) + \sqrt{n} H_{n-1}(\xi) = 0. \tag{1.4}$$

命題 1.15. 以下の等式が成立する:

$$\int_{\mathbf{R}} H_m(\xi) H_n(\xi) p(\xi)\, d\xi = \delta_{mn}, \tag{1.5}$$

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}\eta\xi} H_n(\xi) p(\xi)\, d\xi = e^{-\eta^2/2} \frac{\sqrt{-1}^n}{\sqrt{n!}} \eta^n. \tag{1.6}$$

ここで $p(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-\xi^2/2)$ であり, δ_{mn} は $m = n$ のとき 1, $m \ne n$ のとき 0 をとるとする.

命題 1.16. $\{H_a\kappa_j \mid a \in \Lambda, j \in \mathbf{N}\}$ の線形結合の全体は $L^p(K)$ の中で稠密である.

証明. はじめに $K = \mathbf{R}$ のときを示す. $\kappa_j = 1$ とし, 有界連続実数値 Wiener 汎関数 F を $\{H_a \mid a \in \Lambda\}$ の線形結合で近似することを考える.

$S_n, S : B \to B$ を

$$S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \langle \ell_j, x \rangle \iota(\iota^* \ell_j), \quad x \in B,$$
$$S(x) := x, \qquad\qquad x \in B,$$

とおくと, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S に概収束する. これは次のようにして示される. $\{\langle \ell_j, \cdot \rangle\}_{j=1}^{\infty}$ は独立で標準正規分布に従うので

$$\begin{aligned}\|\langle \ell, S_n(\cdot)\rangle - \langle \ell, S(\cdot)\rangle\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 &= \int_B |\langle \ell, S_n(x)\rangle - \langle \ell, S(x)\rangle|^2 \,\mu(dx) \\ &= \int_B \left| \sum_{j=1}^{n} \langle \ell_j, x\rangle (\iota^*\ell, \iota^*\ell_j)_{H^*} - \langle \ell, x\rangle \right|^2 \mu(dx) = \|\iota^*\ell\|_{H^*}^2 - \sum_{j=1}^{n} (\iota^*\ell, \iota^*\ell_j)_{H^*}^2\end{aligned}$$

となる. Parseval の等式より $\{\langle \ell, S_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ は $\langle \ell, S\rangle$ に L^2 収束する. これより確率収束することが分かり, 命題 6.7 より, 確率収束と $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ の概収束は同値である.

$F_n : B \to \mathbf{R}$ と $f_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を

$$F_n(x) := F\left(\sum_{j=1}^{n} \langle \ell_j, x\rangle \iota(\iota^*\ell_j) \right), \quad x \in B,$$
$$f_n(\xi) := F\left(\sum_{j=1}^{n} \xi^j \iota(\iota^*\ell_j) \right), \qquad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbf{R}^n,$$

とおく. F は有界連続なので $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ も有界連続である. よって $F_n(\cdot) = F(S_n(\cdot))$ は $F(\cdot)$ に概収束し, 有界収束定理より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな n を選べば

$$\|F - F_n\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} < \varepsilon \tag{1.7}$$

とできる. また $\mathbf{R}^n$ 上の確率測度 $\mu_n(d\xi) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-|\xi|^2/2)\, d\xi$ に対して, n 変数多項式の全体は $L^p(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R})$ の中で稠密なので, $\|f_n - g_n\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} < \varepsilon$ となる n 変数多項式 g_n が存在する. 実数値 Wiener 汎関数 G_n を

$$G_n(x) := g_n(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_n, x\rangle), \quad x \in B,$$

とおくと, G_n は $\{H_a \mid a \in \Lambda\}$ の線形結合で表わせる. そして $F_n(\cdot) = f_n(\langle \ell_1, \cdot\rangle, \ldots, \langle \ell_n, \cdot\rangle)$ と $(\langle \ell_1, \cdot\rangle, \ldots, \langle \ell_n, \cdot\rangle)$ が μ の下で正規分布に従うので

$$\begin{aligned}\|F_n - G_n\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})}^p &= \int_B |f_n(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_n, x\rangle) - g_n(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_n, x\rangle)|^p \,\mu(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |f_n(\xi) - g_n(\xi)|^p \,\mu_n(d\xi) = \|f_n - g_n\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}^p < \varepsilon^p\end{aligned} \tag{1.8}$$

となる. (1.7) と (1.8) より

$$\|F - G_n\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} \le \|F - F_n\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} + \|F_n - G_n\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} < 2\varepsilon$$

が得られ, $K = \mathbf{R}$ での結論が従う.

一般の K のときは, 各 $x \in B$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| F(x) - \sum_{j=1}^{n} (F(x), \kappa_j)_K \kappa_j \Big\|_K = 0,$$

$$\Big\| F(x) - \sum_{j=1}^{n} (F(x), \kappa_j)_K \kappa_j \Big\|_K \le \|F(x)\|_K$$

が成り立つので, Lebesgue の収束定理より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな n をとれば $\|F(\cdot) - \sum_{j=1}^{n} (F(\cdot), \kappa_j)_K \kappa_j \|_{L^p(K)} < \varepsilon$ となる. そして j について $(F(\cdot), \kappa_j)_K \in L^p(\mathbf{R})$ なので $\{H_a \mid a \in \Lambda\}$ の線形結合で表わされる実数値 Wiener 汎関数 F_j が存在し, $\|(F(\cdot), \kappa_j)_K - F_j(\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R})} < 2^{-j}\varepsilon$ となる. よって

$$\begin{aligned}
&\Big\| F - \sum_{j=1}^{n} F_j \kappa_j \Big\|_{L^p(K)} \\
&\qquad \le \Big\| F(\cdot) - \sum_{j=1}^{n} (F(\cdot), \kappa_j)_K \kappa_j \Big\|_{L^p(K)} + \Big\| \sum_{j=1}^{n} (F(\cdot), \kappa_j)_K \kappa_j - \sum_{j=1}^{n} F_j(\cdot) \kappa_j \Big\|_{L^p(K)} \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \|(F(\cdot), \kappa_j)_K - F_j(\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R})} \\
&\qquad < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

が得られる. これより一般の K での結論が従う. □

定義 1.17 (n 次 Wiener 積分の空間)**.** $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して, $\{H_a \kappa_j \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ をノルム $\|\cdot\|_{L^2(K)}$ で完備化したものを **n 次 Wiener 積分の空間**といい $\mathcal{H}_n(K)$ で表わす. $\mathcal{H}_n(K)$ は $L^2(K)$ の閉部分空間なので正射影を定義出来る. それを J_n で表わす.

注意 1.18. 定義 1.4 の $\tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbf{R})$ と定義 1.17 の $\mathcal{H}_1(\mathbf{R})$ は一致する.

定理 1.19 (Itô-Wiener 展開 [15, Proposition 1.9])**.** 次が成り立つ.

(i) $\{H_a \kappa_j \mid a \in \Lambda, j \in \mathbf{N}\}$ は $L^2(K)$ の完全正規直交系である.

(ii) $\{H_a \kappa_j \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ は $\mathcal{H}_n(K)$ の完全正規直交系である.

(iii) $L^2(K)$ は

$$L^2(K) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(K)$$

と直和分解できる. つまり, $F \in L^2(K)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| F - \sum_{n=0}^{N} J_n F \Big\|_{L^2(K)} = 0$$

が成り立つ. これを **Itô-Wiener 展開**という.

証明. (i) 正規性と直交性は命題 1.15 と $\{\langle \ell_j, \cdot \rangle\}_{j=1}^{\infty}$ は互いに独立で正規分布に従うことから分かる. $\{H_a \kappa_j \mid a \in \Lambda, j \in \mathbf{N}\}$ の完全性は命題 1.16 から分かる.
(ii) は $\mathcal{H}_n(K)$ の定義より明らか.
(iii) は (i),(ii) より従う. □

1.4 L^p 空間で稠密な関数空間

この節では $1 < p < \infty$ のときに $L^p(K)$ の中で稠密な関数空間について議論する.

定義 1.20. (i) 実数値 Wiener 汎関数 F で, n 変数多項式 f と $\{\ell_j\}_{j=1}^n \subset B^*$ を用いて

$$F(x) = f(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_n, x\rangle), \quad x \in B, \tag{1.9}$$

と表わせるものを実数値多項式という. その全体を $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ とかく.

(ii) 実数値 Wiener 汎関数 F で, $f \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ と $\{\ell_j\}_{j=1}^n \subset B^*$ を用いて, (1.9) の形に表せるものの全体を $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ とかく.

さらに $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ と取れるものの全体を $\mathcal{S}_0(\mathbf{R})$ とかく.

注意 1.21. (1.9) の表現における $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ は Schmidt の直交化により $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^n$ が H^* の正規直交系となるように選ぶことができる. 以下では $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^n$ が H^* の正規直交系となるように $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ を選ぶこととする.

定義 1.22. (i) K 値 Wiener 汎関数 F で, $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$ と $\{\kappa_j\}_{j=1}^m \subset K$ を用いて

$$F(x) = \sum_{j=1}^m F_j(x)\kappa_j, \quad x \in B, \tag{1.10}$$

と表わせるものを K 値多項式汎関数という. その全体を $\mathcal{P}(K)$ とかく.

(ii) K 値 Wiener 汎関数 F で, $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ と $\{\kappa_j\}_{j=1}^m \subset K$ を用いて (1.10) の形に表わせるものの全体を $\mathcal{S}(K)$ とかく.

さらに $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{S}_0(\mathbf{R})$ と取れるものの全体を $\mathcal{S}_0(K)$ とかく.

注意 1.23. (1.10) における $\{\kappa_j\}_{j=1}^m$ は Schmidt の直交化により K の正規直交系とできる. 以下では $\{\kappa_j\}_{j=1}^m$ を K の正規直交系となるように選ぶこととする.

定理 1.24. $\mathcal{P}(K), \mathcal{S}(K), \mathcal{S}_0(K)$ は $L^p(K)$ の中で稠密である.

証明. $\mathcal{P}(K)$ の稠密性は命題 1.16 から直ちに従う. $\mathcal{S}(K), \mathcal{S}_0(K)$ の稠密性も命題 1.16 の証明を繰り返せば良い. □

第 2 章　L^p 空間上の作用素

この章を通して, (B, H, μ) を抽象 Wiener 空間, K を可分 Hilbert 空間とし, $1 < p < \infty$ に対して $L^p(K) = L^p(B, \mu; K)$ で Borel 可測関数 $F : B \to K$ で p 乗可積分なものの全体を表わす. また $\mathscr{B}(B)$ で B の Borel 集合族を表わす.

2.1　Ornstein-Uhlenbeck 半群

この節では $L^p(K)$ 上に Ornstein-Uhlenbeck 半群を定義し, その性質を調べる.

定義 2.1.　(i) $t \geq 0$ に対して, 確率変数 $B \ni x \mapsto \sqrt{t}x \in B$ の μ による像測度を μ_t で表わす. つまり

$$\mu_t(\Gamma) := \int_B 1_\Gamma(\sqrt{t}w)\,\mu(dw), \quad \Gamma \in \mathscr{B}(B),$$

である. ここで 1_Γ は Γ の定義関数を表わす.

(ii) $t \geq 0$ に対して, 推移確率 $P_t : [0, \infty) \times \mathscr{B}(B) \to [0, 1]$ を

$$P_t(x, \Gamma) := \int_B 1_\Gamma(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}w)\,\mu(dw), \quad (x, \Gamma) \in B \times \mathscr{B}(B),$$

と定義する.

命題 2.2. $s, t \geq 0$ に対して $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ が成り立つ. ここで $*$ は畳み込みを表わす (定義 6.4).

証明. μ_s の特性関数を $\hat{\mu}_s$ と表わす (定義 6.2). $\ell \in B^*$ を任意に取ると

$$\hat{\mu}_t(\ell) = \int_B \exp(\sqrt{-1}\langle\sqrt{t}\ell, w\rangle)\,\mu(dw) = \exp\left(-\frac{t\|\iota^*\ell\|_{H^*}^2}{2}\right)$$

が成り立つ. ここで $\langle\sqrt{t}\ell, \cdot\rangle$ が平均 0, 分散 $t\|\ell\|_{H^*}^2$ の正規分布に従うことを用いた. 命題 6.5 を用いることで

$$\widehat{\mu_s * \mu_t}(\ell) = \hat{\mu}_s(\ell)\hat{\mu}_t(\ell) = \exp\left(-\frac{(s+t)\|\iota^*\ell\|_{H^*}^2}{2}\right) = \hat{\mu}_{s+t}(\ell)$$

が得られる. これと命題 6.3 より結論が従う. □

命題 2.3 (Chapman-Kolmogorov の方程式)**.** $s, t \geq 0$ に対して

$$\int_B P_s(x, dw)P_t(w, \Gamma) = P_{s+t}(x, \Gamma), \quad (x, \Gamma) \in B \times \mathscr{B}(B),$$

が成り立つ. これを **Chapman-Kolmogorov の方程式**という.

証明. 定義より

$$\begin{aligned}\int_B P_s(x,dw)P_t(w,\Gamma) &= \int_B\int_B 1_\Gamma(e^{-(s+t)}x+\sqrt{e^{-2t}(1-e^{-2s})}u+\sqrt{1-e^{-2s}}v)\,\mu(du)\mu(dv)\\ &= \int_B\int_B 1_\Gamma(e^{-(s+t)}x+u+v)\,\mu_{e^{-2t}(1-e^{-2s})}(du)\mu_{1-e^{-2s}}(dv)\end{aligned}$$

となる. そして命題 2.2 より

$$\begin{aligned}\int_B P_s(x,dw)P_t(w,\Gamma) &= \int_B 1_\Gamma(e^{-(s+t)}x+u)\,\mu_{1-e^{-2t}}*\mu_{e^{-2t}(1-e^{-2s})}(du)\\ &= \int_B 1_\Gamma(e^{-(s+t)}x+u)\,\mu_{1-e^{-2(s+t)}}(du)=P_{s+t}(x,\Gamma)\end{aligned}$$

となる. □

命題 2.4 ([15, Proposition 2.3])**.** $t\geq 0$ に対して

$$\int_B P_t(w,\Gamma)\,\mu(dw)=\mu(\Gamma),\quad \Gamma\in\mathscr{B}(B),$$

が成り立つ.

証明. 定義と命題 2.2 を用いて左辺を計算することで結論が得られる. 実際

$$\begin{aligned}\int_B P_t(w,\Gamma)\,\mu(dw) &= \int_B\int_B 1_\Gamma(e^{-t}w+\sqrt{1-e^{-2t}}v)\,\mu(dv)\mu(dw)\\ &= \int_B\int_B 1_\Gamma(w+v)\,\mu_{1-e^{-2t}}(dv)\mu_{e^{-2t}}(dw)=\int_B 1_\Gamma(u)\,\mu_{1-e^{-2t}}*\mu_{e^{-2t}}(du)=\mu(\Gamma)\end{aligned}$$

となる. □

定義 2.5 (Ornstein-Uhlenbeck 半群)**.** $t\geq 0$ に対して, $T_t: L^p(K)\to L^p(K)$ を Bochner 積分の意味で

$$T_tF(x)=\int_B F(w)\,P_t(x,dw),\quad F\in L^p(K),\ x\in B,$$

と定義し, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を **Ornstein-Uhlenbeck 半群**という.

命題 2.6 ([15, Proposition 2.4])**.** $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は $L^p(K)$ 上の強連続縮小半群である. すなわち, $F\in L^p(K)$ に対して

$$\|T_tF\|_{L^p(K)}\leq\|F\|_{L^p(K)}, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T_tF-F\|_{L^p(K)}=0 \tag{2.2}$$

が成り立つ.

証明. (2.1) について. Hölder の不等式より

$$\|T_tF(x)\|_K^p=\left\|\int_B F(w)\,P_t(x,dw)\right\|_K^p\leq\int_B\|F(w)\|_K^p\,P_t(x,dw)$$

が成り立つ. これと命題 2.4 より

$$\begin{aligned}\|T_tF\|^p_{L^p(K)} &= \int_B \|T_tF(x)\|^p_K \,\mu(dx) \\ &\le \int_B\int_B \|F(w)\|^p_K \,P_t(x,dw)\,\mu(dx) = \int_B \|F(w)\|^p_K \,\mu(dw) = \|F\|^p_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. よって $T_t : L^p(K) \to L^p(K)$ が矛盾なく定義され, (2.1) が成り立つことが分かる. さらに $s,t \ge 0$ に対して, 命題 2.3 より

$$\begin{aligned}T_sT_tF(x) &= \int_B T_tF(w)\,P_s(x,dw) \\ &= \int_B\int_B F(v)\,P_t(w,dv)P_s(x,dw) = \int_B F(u)\,P_{s+t}(x,du) = T_{s+t}F(x)\end{aligned}$$

が得られ, $T_0 = 1$ と合わせれば $\{T_t\}_{t\ge 0}$ が $L^p(K)$ 上の半群であることが分かる.

(2.2) について. 定理 1.24 より $\mathcal{S}_0(K)$ は $L^p(K)$ の中で稠密であるから, $F \in \mathcal{S}_0(K)$ に対して示せば十分である. $F \in \mathcal{S}_0(K)$ ならば有界収束定理を用いることで各 $x \in B$ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0} T_tF(x) = \int_B \lim_{t\downarrow 0} F(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}w)\,\mu(dw) = F(x)$$

が得られる. もう一度有界収束定理を用いると

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T_tF - F\|^p_{L^p(K)} = \int_B \lim_{t\downarrow 0} \|T_tF(x) - F(x)\|^p_K \,\mu(dx) = 0$$

となる. これで (2.2) が示された. □

2.2 Ornstein-Uhlenbeck 半群の従属操作

$\alpha \ge 0$ と $0 < \beta \le 1$ を固定して議論を進める.

定義 2.7. (i) $t \ge 0$ に対して, $[0,\infty)$ 上の確率測度で Laplace 変換が

$$\int_0^\infty e^{-\gamma u}\,\lambda_t^{(\beta)}(du) = e^{-\gamma^\beta t}, \quad \gamma \ge 0,$$

となるものを $\lambda_t^{(\beta)}$ と表わす.

(ii) $t \ge 0$ に対して, B 上の有限測度 $Q_t^{(\alpha,\beta)} : B \times \mathscr{B}(B) \to [0,1]$ を

$$Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma) := \int_0^\infty e^{-\alpha v}\,P_v(x,\Gamma)\lambda_t^{(\beta)}(dv), \quad (x,\Gamma) \in B \times \mathscr{B}(B),$$

で定める.

注意 2.8. (i) $\beta = 1$ のとき, 任意の t に対して $\lambda_t^{(\beta)}$ は Dirac 測度 δ_t である.

(ii) $\beta = 1/2$ のとき, 任意の t に対して

$$\lambda_t^{(1/2)}(du) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t u^{-3/2} e^{-t^2/4u}\,du$$

となる.

(iii) $t=0$ のとき, 任意の β に対して $\lambda_t^{(\beta)}$ は Dirac 測度 δ_0 である.

(iv) $\alpha=0$ のとき $Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,\cdot)$ は確率測度であるが, $\alpha>0$ のとき $Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,B)=e^{-\alpha^\beta t}<1, t>0,$ となり確率測度ではない.

命題 2.9. $s,t\geq 0$ に対して $\lambda_s^{(\beta)}*\lambda_t^{(\beta)}=\lambda_{s+t}^{(\beta)}$ が成り立つ. ここで $*$ は畳み込みを表わす.

証明. 二つの測度の Laplace 変換が一致することを示せば十分である. $\gamma\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\gamma w}\,\lambda_s^{(\beta)}*\lambda_t^{(\beta)}(dw)&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\gamma(u+v)}\,\lambda_s^{(\beta)}(du)\lambda_t^{(\beta)}(dv)\\&=\int_0^\infty e^{-\gamma u}\,\lambda_s^{(\beta)}(du)\int_0^\infty e^{-\gamma v}\,\lambda_t^{(\beta)}(dv)=e^{-\gamma^\beta(s+t)}\end{aligned}$$

となる. これは $\lambda_{s+t}^{(\beta)}$ の Laplace 変換である. □

命題 2.10. $s,t\geq 0$ に対して

$$\int_B Q_s^{(\alpha,\beta)}(x,dw)Q_t^{(\alpha,\beta)}(w,\Gamma)=Q_{s+t}^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma),\quad (x,\Gamma)\in B\times\mathscr{B}(B),$$

が成り立つ.

証明. 定義より

$$\begin{aligned}\int_B Q_s^{(\alpha,\beta)}(x,dw)Q_t^{(\alpha,\beta)}(w,\Gamma)&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_B e^{-\alpha(u+v)}\,P_u(x,dw)P_v(x,\Gamma)\lambda_s^{(\beta)}(du)\lambda_t^{(\beta)}(dv)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha(u+v)}P_{u+v}(x,\Gamma)\lambda_s^{(\beta)}(du)\lambda_t^{(\beta)}(dv)\end{aligned}$$

となる. 最後の変形では命題 2.3 を用いている. そして命題 2.9 より

$$\begin{aligned}\int_B Q_s^{(\alpha,\beta)}(x,dw)Q_t^{(\alpha,\beta)}(w,\Gamma)&=\int_0^\infty e^{-\alpha w}P_w(x,\Gamma)\lambda_s^{(\beta)}*\lambda_t^{(\beta)}(dw)\\&=\int_0^\infty e^{-\alpha w}P_w(x,\Gamma)\lambda_{s+t}^{(\beta)}(dw)=Q_{s+t}^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma)\end{aligned}$$

が得られる. □

命題 2.11. $t\geq 0$ に対して

$$\int_B Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma)\,\mu(dx)=e^{-\alpha^\beta t}\mu(\Gamma),\quad \Gamma\in\mathscr{B}(B),$$

が成り立つ.

証明. 定義より

$$\begin{aligned}\int_B Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma)\,\mu(dx)&=\int_B\int_0^\infty e^{-\alpha v}P_v(x,\Gamma)\,\lambda_t^{(\beta)}(dv)\mu(dx)\\&=\int_0^\infty e^{-\alpha v}\,\lambda_t^{(\beta)}(dv)\int_B P_v(x,\Gamma)\,\mu(dx)\end{aligned}$$

となる. 命題 2.4 より

$$\int_B Q_t^{(\alpha,\beta)}(x,\Gamma)\,\mu(dx)=\mu(\Gamma)\int_0^\infty e^{-\alpha v}\,\lambda_t^{(\beta)}(dv)=e^{-\alpha^\beta t}\mu(\Gamma)$$

が従う. 最後の変形は $\lambda_t^{(\beta)}$ の Laplace 変換を用いた. □

定義 2.12. $t \geq 0$ に対して, $Q_t^{(\alpha,\beta)} : L^p(K) \to L^p(K)$ を Bochner 積分の意味で

$$Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x) := \int_B F(w)\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw), \quad F \in L^p(K),\ x \in B,$$

とおく.

注意 2.13. $\alpha = 0, \beta = 1$ ならば $x \in B$ と $\Gamma \in \mathscr{B}(B)$ に対して

$$Q_t^{(0,1)}(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^0 P_v(x, \Gamma)\, \delta_t(dv) = P_t(x, \Gamma)$$

となる. よって $\{Q_t^{(0,1)}\}_{t \geq 0}$ は Ornstein-Uhlenbeck 半群である.

命題 2.14. $\{Q_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t \geq 0}$ は $L^p(K)$ 上の強連続縮小半群である. すなわち $F \in L^p(K)$ に対して

$$\|Q_t^{(\alpha,\beta)} F\|_{L^p(K)} \leq e^{-\alpha^\beta t} \|F\|_{L^p(K)}, \tag{2.3}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F - F\|_{L^p(K)} = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つ.

証明. (2.3) について. Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x)\|_K^p &= \left\| \int_B F(w)\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) \right\|_K^p \\ &\leq (Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, B))^{p-1} \int_B \|F(w)\|_K^p\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) = e^{-\alpha^\beta (p-1)t} \int_B \|F(w)\|_K^p\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) \end{aligned}$$

が成り立つ. これと命題 2.11 より

$$\begin{aligned} \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F\|_{L^p(K)}^p &= \int_B \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x)\|_K^p\, \mu(dx) \leq e^{-\alpha^\beta (p-1)t} \int_B \int_B \|F(w)\|_K^p\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) \mu(dx) \\ &= e^{-\alpha^\beta pt} \int_B \|F(w)\|_K^p\, \mu(dw) = e^{-\alpha^\beta pt} \|F\|_{L^p(K)} \end{aligned}$$

が得られる. これより $Q_t^{(\alpha,\beta)} : L^p(K) \to L^p(K)$ が矛盾なく定義され, (2.3) が成り立つことが分かる. さらに $s, t \geq 0$ について命題 2.10 より

$$\begin{aligned} Q_s^{(\alpha,\beta)} Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x) &= \int_B \int_B F(v)\, Q_s^{(\alpha,\beta)}(w, dv) Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) \\ &= \int_B F(v)\, Q_{s+t}^{(\alpha,\beta)}(x, dv) = Q_{s+t}^{(\alpha,\beta)} F(x) \end{aligned}$$

が得られ, $Q_0^{(\alpha,\beta)} = 1$ と合わせれば $\{Q_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t \geq 0}$ が $L^p(K)$ 上の半群であることが分かる.

(2.4) について. 定理 1.24 より $\mathcal{S}_0(K)$ は $L^p(K)$ の中で稠密であるから, $F \in \mathcal{S}_0(K)$ について示せば十分である. $F \in \mathcal{S}_0(K)$ ならば有界収束定理を用いることで各 $x \in B$ について

$$\lim_{t \downarrow 0} Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x) = \int_B \lim_{t \downarrow 0} F(w)\, Q_t^{(\alpha,\beta)}(x, dw) = F(x)$$

が得られる. もう一度有界収束定理を用いると

$$\lim_{t \downarrow 0} \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F - F\|_{L^p(K)}^p = \int_B \lim_{t \downarrow 0} \|Q_t^{(\alpha,\beta)} F(x) - F(x)\|_K^p\, \mu(dx) = 0$$

となる. これで (2.4) が示された. $\square$

2.3　Malliavin 微分作用素

この節では K 値多項式汎関数の全体 $\mathcal{P}(K)$ 上に Malliavin 微分作用素を定義し, その性質を調べる. B^n から K への n 重線形作用素の全体を $\mathscr{L}^n(B;K)$, Hilbert-Schmidt 型 (定義 6.8) の H^n から K への n 重線形作用素の全体を $\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K)$ で表わす.

定義 2.15 (Malliavin 微分). K 値 Wiener 汎関数 F が点 $x \in B$ において **n 階 Malliavin 微分可能**であることを, ある $\Phi_x \in \mathscr{L}^n_{(2)}(H;K)$ が存在して, 全ての $h_1, \dots, h_n \in B$ に対して

$$\Phi_x[h_1, \dots, h_n] = \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \cdots \partial\varepsilon_n} F(x + \varepsilon_1(\iota h_1) + \cdots + \varepsilon_n(\iota h_n))\bigg|_{\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0}$$

が成立することと定義する. Φ_x を $D^n F(x)$ とかく. B の全ての点で n 階 Malliavin 微分可能なとき F は **n 階 Malliavin 微分可能**という.

例 2.16 ($K = \mathbf{R}$ の場合). $F \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ を $f \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^m;\mathbf{R})$ と H^* の正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^m \subset B^*$ を用いて $F(x) = f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_m, x\rangle)$ と表わす. $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ は多重指数を用いると, $x \in B$ と $h_1, \dots, h_n \in H$ に対して

$$\begin{aligned} D^n F(x)[h_1, \dots, h_n] &= \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \cdots \partial\varepsilon_n} F(x + \varepsilon_1(\iota h_1) + \cdots + \varepsilon_n(\iota h_n))\bigg|_{\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0} \\ &= \sum_{|\alpha| = n} \partial^\alpha f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_m, x\rangle)\, {}_{H^*}\langle \iota^* \ell_{\alpha^1}, h_1\rangle_H \cdots {}_{H^*}\langle \iota^* \ell_{\alpha^n}, h_n\rangle_H \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\iota^*\ell_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes \iota^*\ell_{\alpha^n}[h_1, \dots, h_n] := {}_{H^*}\langle \iota^* \ell_{\alpha^1}, h_1\rangle_H \cdots {}_{H^*}\langle \iota^* \ell_{\alpha^n}, h_n\rangle_H$$

と置けば, $\iota^*\ell_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes \iota^*\ell_{\alpha^n} \in \mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R})$ である. これと $\partial^\alpha f \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^m;\mathbf{R})$ より $D^n F \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ となる. よって Malliavin 微分 $D^n F$ は

$$D^n F(\cdot) = \sum_{|\alpha| = n} \partial^\alpha f(\langle \ell_1, \cdot\rangle, \dots, \langle \ell_m, \cdot\rangle) \iota^*\ell_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes \iota^*\ell_{\alpha^n} \tag{2.5}$$

と表現される. とくに $D^2 F(x) \in \mathscr{L}^2_{(1)}(H;\mathbf{R})$ なので $\mathrm{tr}\, D^2 F(x)$ が定義され, それは $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^m$ を拡張して作った H の完全正規直交系 $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^\infty$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, D^2 F(x) &= \sum_{j=1}^\infty D^2 F(x)[\iota^*\ell_j, \iota^*\ell_j] \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_m, x\rangle)\, {}_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^1}, \iota^*\ell_j\rangle_H\, {}_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^2}, \iota^*\ell_j\rangle_H \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_m, x\rangle) \delta_{\alpha^1 j}\delta_{\alpha^2 j} \end{aligned}$$

と表現できる. これより

$$\mathrm{tr}\, D^2 F(x) = \Delta f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_m, x\rangle) \tag{2.6}$$

を得る.

例 2.17 (一般の K の場合)**.** $F \in \mathcal{S}(K)$ を $\{F_j\}_{j=1}^l \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ と正規直交系 $\{\kappa_j\}_{j=1}^l \subset K$ を用いて $F(x) = \sum_{j=1}^l F_j(x)\kappa_j$ と表わす. さらに F_j を $f_j \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R})$ と H^* の正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^m \subset B^*$ を用いて $F_j(x) = f(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_m, x\rangle)$ と表わす. このとき Malliavin 微分は

$$D^n F(x)[h_1, \ldots, h_n] = \sum_{j=1}^l \sum_{|\alpha|=n} \partial^\alpha f_j(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_m, x\rangle)_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^1}, h_1\rangle_H \cdots {}_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^n}, h_n\rangle_H \kappa_j$$

となる. ここで

$$[\iota^*\ell_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes \iota^*\ell_{\alpha^n} \otimes \kappa_j][h_1, \ldots, h_n] = {}_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^1}, h_1\rangle_H \cdots {}_{H^*}\langle \iota^*\ell_{\alpha^n}, h_n\rangle_H \kappa_j$$

置けば $\iota^*\ell_{\alpha^1} \otimes \cdots \otimes \iota^*\ell_{\alpha^n} \otimes \kappa_j \in \mathscr{L}^n_{(2)}(H; K)$ である. これと $\partial^\alpha f_j \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R})$ より $D^n F \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H; K))$ となる. そして $D^n F_j \otimes \kappa_j \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H; K))$ を

$$[D^n F_j \otimes \kappa_j](x)[h_1, \ldots, h_n] := D^n F_j(x)[h_1, \ldots, h_n]\kappa_j$$

と定義することで

$$D^n F = \sum_{j=1}^l D^n F_j \otimes \kappa_j \tag{2.7}$$

と表現できる. とくに $D^2 F(x) \in \mathscr{L}^2_{(1)}(H; K)$ なので $\mathrm{tr}\, D^2 F(x)$ が定義できる. そして

$$\mathrm{tr}\, D^2 F(x) = \sum_{j=1}^l \mathrm{tr}(D^2 F_j(x) \otimes \kappa_j) = \sum_{j=1}^l [\mathrm{tr}\, D^2 F_j(x)]\kappa_j \tag{2.8}$$

が成り立つ.

注意 2.18. K 値 Wiener 汎関数が n 階 Malliavin 微分可能であれば $(n-1)$ 階 Malliavin 微分可能で $D^n F = D(D^{n-1}F)$ が成り立つ.

例 2.19. $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$, $F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ならば $1 \le \nu \le n$ に対して多重指数 α と ν に依存して決まる $DF \ldots, D^{\nu-|\alpha|+1}F$ の ν 階のテンソル積の線形結合 $P^\nu_\alpha(DF \ldots, D^{\nu-|\alpha|+1}F)$ が存在し

$$D^\nu(\varphi \circ F) = \sum_{1 \le |\alpha| \le \nu} (\partial^\alpha \varphi \circ F) P^\nu_\alpha(DF, \ldots, D^{\nu-|\alpha|+1}F) \tag{2.9}$$

となる.

(2.9) の成立を帰納法を用いて示す. $\nu = 1$ のときは Malliavin 微分が定義にしたがって計算できて

$$D(\varphi \circ F) = \sum_{k=1}^d (\partial_k \varphi \circ F) DF^k$$

となる. $\nu-1$ のときを仮定すれば

$$\begin{aligned}
D^\nu(\varphi\circ F) &= \sum_{1\le|\alpha|\le\nu-1} D[(\partial^\alpha\varphi\circ F)P_\alpha^{\nu-1}(DF,\dots,D^{\nu-1-|\alpha|+1}F)] \\
&= \sum_{1\le|\alpha|\le\nu-1} D[\partial^\alpha\varphi\circ F]\otimes P_\alpha^{\nu-1}(DF,\dots,D^{\nu-1-|\alpha|+1}F) \\
&\quad+\sum_{1\le|\alpha|\le\nu-1}(\partial^\alpha\varphi\circ F)DP_\alpha^{\nu-1}(F,DF,\dots,D^{\nu-1-|\alpha|+1}F) \\
&= \sum_{1\le|\alpha|\le\nu-1}\sum_{k=1}^d(\partial_k\partial^\alpha\varphi\circ F)DF^k\otimes P_\alpha^{\nu-1}(DF,\dots,D^{\nu-1-|\alpha|+1}F) \\
&\quad+\sum_{1\le|\alpha|\le\nu-1}(\partial^\alpha\varphi\circ F)DP_\alpha^{\nu-1}(DF,\dots,D^{\nu-1-|\alpha|+1}F)
\end{aligned}$$

となり, (2.9) が得られる.

例 2.20. (B,H,μ) を $\mathbf{R}^d$ 値古典 Wiener 空間とする (例 1.11). $s\in[0,1]$ と $x\in B$ に対して $\delta_s(x):=x(s)$ とおく. このとき

$$D^\nu\delta_s=\begin{cases}\iota^*\delta_s, & \nu=1,\\ 0, & \nu\ge 2,\end{cases}$$

となる. そして $\iota^*\delta_s\in H$ は

$$\iota^*\delta_s=\Big(\int_0^\cdot 1_{[0,s]}(u)\,du,\dots,\int_0^\cdot 1_{[0,s]}(u)\,du\Big)$$

という表現をもつ.

2.4　Ornstein-Uhlenbeck 作用素

この節では K 値多項式汎関数の全体 $\mathcal{P}(K)$ 上に Ornstein-Uhlenbeck 作用素を定義し, その性質を調べる.

定義 2.21 (Ornstein-Uhlenbeck 作用素)**.** $L^p(K)$ 上の Ornstein-Uhlenbeck 半群 $\{T_t\}_{t\ge0}$ の生成作用素を **Ornstein-Uhlenbeck 作用素**といい L で表わす.

命題 2.22 ([15, Proposition 2.7])**.** $F\in\mathcal{P}(K)$ ならば

$$LF(x)=\operatorname{tr}D^2F(x)-DF(x)[x],\quad x\in B, \tag{2.10}$$

が成り立つ. $[x]$ の定義は証明中で与える.

証明. $K=\mathbf{R}$ のとき, $F\in\mathcal{P}(\mathbf{R})$ を n 変数多項式 f と H^* の正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^n\subset B^*$ を用いて $F(x)=f(\langle\ell_1,x\rangle,\dots,\langle\ell_n,x\rangle)$, $x\in B$, と表わす. すると $t>0$ に対して

$$T_tF(x)=\int_B F(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\mu(dy)=\int_{\mathbf{R}^n}f(e^{-t}\xi+\sqrt{1-e^{-2t}}\eta)p(\eta)\,d\eta$$

となる. ここで $\xi := (\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle) \in \mathbf{R}^n$, $p(\eta) := (2\pi)^{-n/2}\exp(-|\eta|^2/2), \eta \in \mathbf{R}^n$, である. f が多項式なので微分と積分の順序交換は正当化され

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T_tF(x) &= \int_{\mathbf{R}^n}\sum_{j=1}^n \partial_j f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta)\left(-e^{-t}\xi_j + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\eta_j\right)p(\eta)\,d\eta \\
&= -e^{-t}\int_{\mathbf{R}^n}\xi\cdot\nabla f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta)p(\eta)\,d\eta \\
&\quad - \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\int_{\mathbf{R}^n}\nabla f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta)\cdot\nabla p(\eta)\,d\eta \\
&=: I_t(\xi) + J_t(\xi)
\end{aligned}$$

が得られる. Gauss の公式を用いると

$$\begin{aligned}
J_t(\xi) &= -\frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\int_{\mathbf{R}^n}\nabla_\eta(f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta))\cdot\nabla_\eta p(\eta)\,d\eta \\
&= \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\int_{\mathbf{R}^n}\Delta_\eta(f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta))p(\eta)\,d\eta \\
&= e^{-2t}\int_{\mathbf{R}^n}(\Delta f)(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta)p(\eta)\,d\eta
\end{aligned}$$

となる. これで各点 $x \in B$ で $(d/dt)T_tF(x)$ が計算出来た. そして優収束定理より

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T_{t+h}F - T_tF}{h} - \frac{d}{dt}T_tF\right\|_{L^p(\mathbf{R})} = 0$$

が分かる. したがって $T_tLF = (d/dt)T_tF = I_t + J_t$ より

$$\begin{aligned}
LF(x) = \lim_{t\downarrow 0}T_tLF(x) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}T_tF(x) &= \lim_{t\downarrow 0}(I_t(\xi) + J_t(\xi)) = \Delta f(\xi) - \xi\cdot\nabla f(\xi) \\
&= \Delta f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle) - \sum_{j=1}^n\langle \ell_j, x\rangle\partial_j f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle)
\end{aligned}$$

が得られる. ここで $[x] := \sum_{k=1}^n\langle \ell_k, x\rangle\iota^*\ell_k \in H$ とおけば, (2.5) より

$$\begin{aligned}
DF(x)[x] &= \sum_{j=1}^n\partial_j f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle)(\iota^*\ell_j, [x])_H \\
&= \sum_{j=1}^n\partial_j f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle)\left(\iota^*\ell_j, \sum_{k=1}^n\langle \ell_k, x\rangle\iota^*\ell_k\right)_H \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\langle \ell_k, x\rangle\partial_j f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle)(\iota^*\ell_j, \iota^*\ell_k)_H \\
&= \sum_{j=1}^n\langle \ell_j, x\rangle\partial_j f(\langle \ell_1, x\rangle, \dots, \langle \ell_n, x\rangle)
\end{aligned}$$

となる. これと (2.6) より結論が従う.

一般の K の場合は, $F \in \mathcal{P}(K)$ を $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$ と正規直交系 $\{\kappa_j\}_{j=1}^m \subset K$ を用いて

$F(x)=\sum_{j=1}^m F_j(x)\kappa_j$ と表わせば, L の線形性より

$$\begin{aligned}LF(x)=\sum_{j=1}^m L(F_j(x)\kappa_j)&=\sum_{j=1}^m (LF_j(x))\kappa_j\\&=\sum_{j=1}^m (\operatorname{tr}D^2F_j(x))(x)\kappa_j-\sum_{j=1}^m DF_j(x)[x]\kappa_j=\operatorname{tr}D^2F(x)-DF(x)[x]\end{aligned}$$

が得られる. 最後の変形では (2.7) と (2.8) を用いた. □

命題 2.23 ([15, Proposition 2.8])**.** Fourier-Hermite 多項式 H_a に対して

$$LH_a=-|a|H_a, \tag{2.11}$$

$$T_tH_a=e^{-|a|t}H_a \tag{2.12}$$

が成り立つ

証明. 半群の一般論と (2.11) より (2.12) が従うので, (2.11) を示せば良い. (1.3), (1.4) より n 次 Hermite 多項式 H_n は

$$\sqrt{n+1}H_{n+1}(\xi)-\xi H_n(\xi)+\frac{d}{d\xi}H_n(\xi)=0,\quad \xi\in\mathbf{R},$$

を満たす. これを ξ について微分し (1.3) を用いることで

$$\frac{d^2}{d\xi^2}H_n(\xi)-\xi\frac{d}{d\xi}H_n(\xi)=-nH_n(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R},$$

を得る. これと Fourier-Hermite 多項式 H_a の定義 1.13 と Ornstein-Uhlenbeck 作用素の表現 (2.10) より

$$\begin{aligned}LH_a(x)&=\sum_{k=1}^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}H_{a_k}(\langle\ell_k,x\rangle)\prod_{j\neq k}H_{a_j}(\langle\ell_j,x\rangle)-\sum_{k=1}^\infty\langle\ell_k,x\rangle\frac{d}{d\xi}H_{a_k}(\langle\ell_k,x\rangle)\prod_{j\neq k}H_{a_j}(\langle\ell_j,x\rangle)\\&=\sum_{k=1}^\infty(-a_k)H_{a_k}(\langle\ell,x\rangle)\prod_{j\neq k}H_{a_j}(\langle\ell,x\rangle)\\&=-\sum_{k=1}^\infty a_kH_a(x)\end{aligned}$$

となる. これと $\sum_{k=1}^\infty a_k=|a|$ より (2.11) が得られる. □

命題 2.24 ([15, Proposition 2.9])**.** $1<p,q<\infty$ が $1/p+1/q=1$ を満たすとき

$$\int_B(T_tF,G)_K\,d\mu=\int_B(F,T_tG)_K\,d\mu,\quad F\in L^p(K),\ G\in L^q(K), \tag{2.13}$$

が成り立つ.

証明. H_a,H_b を Fourier-Hermite 多項式とすれば, 命題 2.23 より

$$\int_B(T_tH_a)H_b\,d\mu=\int_B e^{-|a|t}H_aH_b\,d\mu=e^{-|a|t}\delta_{a,b}=\int_B H_a(T_tH_b)\,d\mu$$

が成り立つ. T_t の線形性より F,G が $\{H_a\kappa_j\mid a\in\Lambda,j\in\mathbf{N}\}$ の線形結合で表わせるとき (2.13) が成立する. 多項式の全体は $L^p(\mathbf{R})$ の中で稠密なので主張は成立する. □

2.5　Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性

この節では Ornstein-Uhlenbeck 半群の著しい性質である超縮小性を証明する.

定理 2.25 (超縮小性 [15, Theorem 2.11]). $t \geq 0$ に対して $q(t) := e^{2t}(p-1)+1$ とおく. $L^p(K)$ 上の Ornstein-Uhlenbeck 半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は

$$\|T_t F\|_{L^{q(t)}(K)} \leq \|F\|_{L^p(K)}, \quad F \in L^p(K), \tag{2.14}$$

を満たす. これを**超縮小性**という.

証明. $t=0$ のときは $q(t)$ の定義より縮小性から超縮小性が直ちに従う. $t>0$ を固定し, $q := q(t)$, q' を q の共役指数, $\lambda := e^{-t}$ とする. さらに $\mu_n(d\xi) := (2\pi)^{-n/2}\exp(-|\xi|^2/2)d\xi, \xi \in \mathbf{R}^n$, とおき証明を進める.

すべての $f \in L^p(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R}), g \in L^{q'}(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R})$ に対して

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} T_t f(x) g(x)\, \mu_n(dx) \right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} \|g\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} \tag{2.15}$$

が成り立つことを示す.

$f \in L^p(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R}), g \in L^{q'}(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R})$ が

$$a < f(\xi) < b, a < g(\xi) < b, \quad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

となる $0 < a < b < \infty$ をもつときに (2.15) が成立することを示す. そのために確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上に定義された原点出発の互いに独立な $\mathbf{R}^n$ 値 Brown 運動 $\{W_s = (W_s^1, \ldots, W_s^n) \mid s \in [0,1]\}$, $\{\tilde{W}_s = (\tilde{W}_s^1, \ldots, \tilde{W}_s^n) \mid s \in [0,1]\}$ をとり

$$\hat{W}_s := \lambda W_s + \sqrt{1-\lambda^2}\tilde{W}_s, \quad s \in [0,1],$$

で新たな $\mathbf{R}^n$ 値 Brown 運動を作る. そして情報増大系を

$$\mathscr{F}_s^{\hat{W}} := \sigma(\hat{W}_u \mid u \in [0,s]), \quad \mathscr{F}_s^W := \sigma(W_u \mid u \in [0,s]), \quad s \in [0,1],$$

と定める. さらに有界連続マルチンゲールを

$$M_s := E\Big[(f(\hat{W}_1))^p \,\Big|\, \mathscr{F}_s^{\hat{W}}\Big], \quad N_s := E\Big[(g(W_1))^{q'} \,\Big|\, \mathscr{F}_s^W\Big], \quad s \in [0,1],$$

とおく. $\hat{W}_1, W_1$ はそれぞれ $\mathscr{F}_1^{\hat{W}}, \mathscr{F}_1^W$ 可測なので

$$E\left[M_1^{1/p} N_1^{1/q'}\right] = E\left[\left(E\Big[(f(\hat{W}_1))^p \,\Big|\, \mathscr{F}_1^{\hat{W}}\Big]\right)^{1/p} \left(E\Big[(g(W_1))^{q'} \,\Big|\, \mathscr{F}_1^W\Big]\right)^{1/q'}\right] = E\left[f(\hat{W}_1) g(W_1)\right]$$

となる. $\lambda = e^{-t}$ と Ornstein-Uhlenbeck 半群の定義より

$$\begin{aligned} &E\left[M_1^{1/p} N_1^{1/q'}\right] \\ &= E\left[f(\lambda W_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\tilde{W}_1) g(W_1)\right] = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda\xi + \sqrt{1-\lambda^2}\eta) g(\xi)\, \mu_n(d\xi)\mu_n(d\eta) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\eta)\, \mu_n(d\eta) \right) g(\xi)\mu_n(d\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} T_t f(\xi) g(\xi)\, \mu_n(d\xi) \end{aligned} \tag{2.16}$$

が得られる. また $\hat{W}_1, W_1$ はそれぞれ $\mathscr{F}_0^{\hat{W}}, \mathscr{F}_0^W$ と独立なので

$$
\begin{aligned}
(2.17)\quad E\left[M_0^{1/p}N_0^{1/q'}\right] &= E\left[\left(E\left[(f(\hat{W}_1))^p \mid \mathscr{F}_0^{\hat{W}}\right]\right)^{1/p}\left(E\left[(g(W_1))^{q'} \mid \mathscr{F}_0^{W}\right]\right)^{1/q'}\right]\\
&= \left(E\left[(f(\hat{W}_1))^p\right]\right)^{1/p}\left(E\left[(g(W_1))^{q'}\right]\right)^{1/q'} = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\|g\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}
\end{aligned}
$$

が得られる. (2.16) と (2.17) より (2.15) は

$$
(2.18)\qquad E\left[M_1^{1/p}N_1^{1/q'}\right] \le E\left[M_0^{1/p}N_0^{1/q'}\right]
$$

に帰着される.

(2.18) を証明していく. マルチンゲール表現定理より $\mathbf{R}^n$ 値確率過程 $\{X_s = (X_s^1, \dots, X_s^n) \mid s \in [0,1]\}, \{Y_s = (Y_s^1, \dots, Y_s^n) \mid s \in [0,1]\}$ が存在し

$$
M_s = M_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^s X_u^j\, d\hat{W}_u^j, \quad N_s = N_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^s Y_u^j\, dW_u^j \quad P\text{-a.s.}
$$

となり, M, N の二次変分 $\langle M\rangle, \langle N\rangle, \langle M, N\rangle$ はそれぞれ

$$
\langle M\rangle_s = \int_0^s |X_u|^2\, du, \quad \langle N\rangle_s = \int_0^s |Y_u|^2\, du, \quad \langle M, N\rangle_s = \lambda \int_0^s X_u \cdot Y_u\, du, \quad s \in [0,1],
$$

と表わせる. すると Itô の公式より

$$
(2.19)\quad d(M_s^{1/p}N_s^{1/q'}) = \frac{1}{p}M_s^{1/p-1}N_s^{1/q'}\, dM_s + \frac{1}{q'}M_s^{1/p}N_s^{1/p'-1}\, dN_s - \frac{1}{2}M_s^{1/p-2}N_s^{1/q'-2}K_s\, ds
$$

となる. ここで K_s は

$$
K_s := \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)N_s^2|X_s|^2 - \frac{2\lambda}{pq'}M_sN_sX_s\cdot Y_s + \frac{1}{q'}\left(1-\frac{1}{q'}\right)M_s^2|Y_s|^2
$$

で定義される確率過程である. そして

$$
K_s = \left|\sqrt{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}N_sX_s - \sqrt{\frac{1}{q'}\left(1-\frac{1}{q'}\right)}M_sY_s\right|^2 - \frac{2}{pq'}\left[\lambda - \sqrt{(p-1)(q'-1)}\right]M_sN_sX_s\cdot Y_s
$$

なので, $\sqrt{(p-1)(q'-1)} = \lambda$ に注意すれば $K_s \ge 0$ が分かる. これと (2.19) より (2.18) が成り立つ.

$f \in L^p(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R})$, $g \in L^{q'}(\mathbf{R}^n, \mu_n; \mathbf{R})$ が非負のときに (2.15) が成立することを示す. $j \in \mathbf{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_j(\xi) &:= j^{-1}1_{\{f\le j^{-1}\}}(\xi) + f(\xi)1_{\{j^{-1}<f<j\}}(\xi) + j1_{\{j\le f\}}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n,\\
g_j(\xi) &:= j^{-1}1_{\{g\le j^{-1}\}}(\xi) + g(\xi)1_{\{j^{-1}<g<j\}}(\xi) + j1_{\{j\le g\}}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n,
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
|T_tf(\xi) - T_tf_j(\xi)| &= \left|\int_{\mathbf{R}^n}[(f(\eta)-j^{-1})1_{\{f\le j^{-1}\}}(\eta) + (f(\eta)-j)1_{\{j\le f\}}(\eta)]\, P_t(\xi, d\eta)\right|\\
&\le \int_{\mathbf{R}^n} 2j^{-1}1_{\{f\le j^{-1}\}}(\eta)\, P_t(\xi, d\eta) + \int_{\mathbf{R}^n} 2f(\eta)1_{\{j\le f\}}(\eta)\, P_t(\xi, d\eta)\\
&= 2j^{-1}P_t(\xi, \{f \le j^{-1}\}) + 2T_t[f1_{\{j\le f\}}](\xi)
\end{aligned}
$$

となる. これより

$$\|T_t f - T_t f_j\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} \le 2j^{-1} + 2\|T_t[f1_{\{j\le f\}}]\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} \le 2j^{-1} + 2\|f1_{\{j\le f\}}\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}$$

が得られ, 優収束定理より $j\to\infty$ のとき $\{T_t f_j\}_{j=1}^\infty$ が $T_t f$ が L^p 収束することが分かる. 同じく優収束定理より $j\to\infty$ のとき $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ は f に L^p 収束, $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ は g に $L^{q'}$ 収束し, $1/p+1/q'<1$ なので, 先の結果を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} T_t f(\xi) g(\xi)\,\mu_n(d\xi) &= \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} T_t f_j(\xi) g_j(\xi)\,\mu_n(d\xi)\\ &\le \lim_{j\to\infty}\|f_j\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\|g_j\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\|g\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となり (2.15) が得られる.

$f\in L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})$, $g\in L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})$ が一般のときに (2.15) が成立することを示す. $|T_t f(\xi)| \le T_t|f|(\xi), \xi\in\mathbf{R}^n$, と f と g が非負の場合の結果を用いると

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} T_t f(\xi) g(\xi)\,\mu_n(d\xi)\right| \le \int_{\mathbf{R}^n} T_t|f|(\xi)|g|(\xi)\,\mu_n(d\xi) \le \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\|g\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}$$

となる. これは (2.15) である.

$K=\mathbf{R}$, $B=\mathbf{R}^n$ のときに (2.14) の成立を示す. 各点 $\xi\in\mathbf{R}^n$ で $|T_t f(\xi)|^{q-1}$ に収束する非負単調増大な単関数列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ をとると, 単調収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}^{q'-1} &= \lim_{j\to\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi_j(\xi)|^{q'}\,\mu_n(d\xi)\right)^{(q'-1)/q'}\\ = \left(\int_{\mathbf{R}^n}|T_t f(\xi)|^{(q-1)q'}\,\mu_n(d\xi)\right)^{(q'-1)/q'} &= \left(\int_{\mathbf{R}^n}|T_t f(\xi)|^{q}\,\mu_n(d\xi)\right)^{1/q} = \|T_t f\|_{L^q(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. そしてすべての $\xi\in\mathbf{R}^n$ に対して $(\varphi_j(\xi))^{q'-1} = (\varphi_j(\xi))^{1/(q-1)} \le |T_t f(\xi)|$ なので (2.15) を用いれば

$$\begin{aligned}\|\varphi_j\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}^{q'} &= \int_{\mathbf{R}^n}(\varphi_j(\xi))^{q'-1}\varphi_j(\xi)\,\mu_n(d\xi)\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}|T_t F(\xi)|\varphi_j(\xi)\,\mu_n(d\xi) \le \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\|\varphi_j\|_{L^{q'}(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. この二つを合わせれば $B=\mathbf{R}^n$ のとき $T_t f\in L^q(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})$ かつ (2.14) が分かる.

$K=\mathbf{R}$, B が一般のときに (2.14) の成立を示す. $F\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ ならば n 変数多項式 f と H^* の正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^n\subset B^*$ を用いて $F(x)=f(\langle\ell_1,x\rangle,\dots,\langle\ell_n,x\rangle), x\in B$, と表わされ $\|F\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}$ と $\|T_t F\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} = \|T_t f\|_{L^q(\mathbf{R}^n,\mu_n;\mathbf{R})}$ が成り立つ. これで $B=\mathbf{R}^n$ の場合に帰着され (2.14) の成立が分かる. $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ が $L^p(B,\mu;\mathbf{R})$ の中で稠密なので, $F\in L^p(B,\mu;\mathbf{R})$ に対して F に L^p 収束する $\{F_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbf{R})$ が存在する. そして多項式の場合の (2.14) より

$$\|T_t F_j - T_t F_k\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} \le \|T_t(F_j-F_k)\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} \le \|F_j - F_k\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})}$$

が得られる. これより $\{T_t F_j\}_{j=1}^\infty$ が $L^q(B,\mu;\mathbf{R})$ の収束列であることが分かる. その極限を G で表わす. $1<p<q$ なので $G\in L^p(B,\mu;\mathbf{R})$ で

$$\begin{aligned}\|T_t F - G\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} &\le \|T_t F - T_t F_j\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} + \|T_t F_j - G\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})}\\ &\le \|F - F_j\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})} + \|T_t F_j - G\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. これより $T_tF = G \in L^q(B,\mu;\mathbf{R})$ が従う. ゆえに

$$\|T_tF\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} = \lim_{j\to\infty} \|T_tF_j\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} \le \lim_{j\to\infty} \|F_j\|_{L^q(B,\mu;\mathbf{R})} = \|F\|_{L^p(B,\mu;\mathbf{R})}$$

となり (2.14) が得られる.

K と B が一般の場合に (2.14) の成立を示す. Bochner 積分の一般論よりすべての $F \in L^p(K)$ に対して

$$\|T_tF(\cdot)\|_K \le T_t\|F\|_K(\cdot) \quad \mu\text{-a.s.}$$

が成り立つ. $\|F\|_K \in L^p(\mathbf{R})$ と $K = \mathbf{R}$ の場合の結果より

$$\|T_tF\|_{L^q(K)} \le \|T_t\|F\|_K\|_{L^q(\mathbf{R})} \le \|\|F\|_K\|_{L^q(\mathbf{R})} \le \|F\|_{L^p(K)}$$

として (2.14) が得られる. □

2.6　連続作用素

この節では次で定義される線形作用素 $\varphi(-L) : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ がノルム $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続作用素になる十分条件を求める.

定義 2.26. $\varphi : \mathbf{N}\cup\{0\} \to \mathbf{R}$ に対して, 線形作用素 $\varphi(-L) : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ を

$$\varphi(-L)F := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)J_nF, \quad F \in \mathcal{P}(\mathbf{R}),$$

と定義する. F が多項式なので $n > N_F$ ならば $J_nF = 0$ となる $N_F \in \mathbf{N}$ が存在する. よって上の定義は有限和であり矛盾なく定義されている.

$\psi : \mathbf{N}\cup\{0\} \to \mathbf{R}$ に対しても同様に $\psi(-L) : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ を定義する.

命題 2.27. $\alpha \ge 0, 0 < \beta \le 1$ とする. このとき $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$Q_t^{(\alpha,\beta)}F = \varphi(-L)F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\alpha+n)^\beta t}J_nF \tag{2.20}$$

が成り立つ. つまり $\varphi_t(\xi) := e^{-(\alpha+\xi)^\beta t}$ とおけば, $Q_t^{(\alpha,\beta)} = \varphi_t(-L)$ が成り立つ. とくに

$$Q_t^{(\alpha,\beta)}J_nF = J_nQ_t^{(\alpha,\beta)}F = e^{-(\alpha+n)^\beta t}J_nF \tag{2.21}$$

が成り立つ.

証明. $\alpha = 0, \beta = 1$ のとき $Q_t^{(0,1)} = T_t$ である. $F \in \mathcal{P}(K)$ は $F = \sum_{n=0}^{\infty} J_nF$ と表わされる. F は多項式なので有限和であることに注意すれば

$$T_tF = \sum_{n=0}^{\infty} T_tJ_nF = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}J_nF$$

が分かる. 最後の変形では (2.12) を用いた. 一般の $\alpha \ge 0, 0 < \beta \le 1$ に対しては

$$Q_t^{(\alpha,\beta)}F \;=\; \int_0^\infty e^{-\alpha s}T_sF\lambda_t^{(\beta)}(ds) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-(\alpha+n)s}\lambda_t^{(\beta)}(ds)J_nF \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\alpha+n)^\beta t}J_nF$$

となることから分かる. (2.21) は (2.20) から明らかである. □

命題 2.28. $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\varphi(-L)\psi(-L)F = \psi(-L)\varphi(-L)F = (\varphi\psi)(-L)F, \tag{2.22}$$

$$D\varphi(-L)F = \varphi(1-L)DF \tag{2.23}$$

が成り立つ.

証明. Fourier-Hermite 多項式 H_a と $\kappa \in K$ に対して

$$\varphi(-L)(H_a\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)(H_a\kappa) = \varphi(|a|)(H_a\kappa) \tag{2.24}$$

となる.

(2.22) について. (2.24) より

$$\varphi(-L)\psi(-L)(H_a\kappa) = \varphi(|a|)\psi(|a|)(H_a\alpha) = (\varphi\psi)(-L)(H_a\alpha)$$

となる. よって F が $\{H_a\kappa \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ の線形和ならば (2.22) が成り立つことが分かる. ここで $\{\kappa_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ は K の完全正規直交系である. 一般の $F \in \mathcal{P}(K)$ は有限和 $\sum_{n=0}^{\infty} J_nF$ と表わされ, J_nF は $\{H_a\kappa_j \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ の線形和なので

$$\varphi(-L)\psi(-L)F = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(-L)\psi(-L)(J_nF) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi\psi)(-L)J_nF = (\varphi\psi)(-L)F$$

となり, (2.22) が得られる.

(2.23) について. Fourier-Hermite 多項式 H_a は a_j 次 Hermite 多項式 H_{a_j} と H^* の完全正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B^*$ によって $H_a(x) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{a_j}(\langle \ell_j, x\rangle), x \in B,$ と定義されることに注意すると

$$\begin{aligned} DH_a(\cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d}{d\xi} H_{a_k}(\langle \ell_k, \cdot\rangle) \prod_{j\neq k} H_{a_j}(\langle \ell_k, \cdot\rangle) \right] (\iota^*\ell_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_j} H_{a_k-1}(\langle \ell_k, \cdot\rangle) \prod_{j\neq k} H_{a_j}(\langle \ell_k, \cdot\rangle) \right] (\iota^*\ell_k) \end{aligned}$$

が成り立つ. これより $D\varphi(-L)(H_a\kappa) \in \mathcal{H}_{|a|-1}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ が分かり, (2.24) より

$$\varphi(1-L)D(H_a\kappa) = \varphi(1 + (|a|-1))D(H_a\kappa) = D\varphi(|a|)H_a\kappa = D\varphi(-L)(H_a\kappa)$$

となる. よって F が $\{H_a\kappa \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ の線形和ならば (2.23) が成り立つことが分かる. 一般の $F \in \mathcal{P}(K)$ は有限和 $\sum_{n=0}^{\infty} J_nF$ と表わされ, J_nF は $\{H_a\kappa_j \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ の線形和なので

$$\begin{aligned} D\varphi(-L)F = D\varphi(-L)\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_nF\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} D\varphi(-L)(J_nF) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(1-L)D]J_nF = \varphi(1-L)D\sum_{n=0}^{\infty} J_nF = \varphi(1-L)DF \end{aligned}$$

となり, (2.23) が得られる. □

命題 2.29. $F, G \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\int_B (\varphi(-L)F, G)_K \, d\mu = \int_B (F, \varphi(-L)G)_K \, d\mu, \tag{2.25}$$

$$\|\varphi(-L)F\|_{L^2(K)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(n))^2 \|J_n F\|_{L^2(K)}^2 \tag{2.26}$$

が成り立つ.

証明. (2.25) について. J_n は射影作用素なので

$$\begin{aligned}\int_B (\varphi(-L)F, G)_K \, d\mu &= \int_B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) J_n F, G \right)_K d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \int_B (J_n F, G)_K \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \int_B (F, J_n G)_K \, d\mu = \int_B (F, \varphi(-L)G)_K \, d\mu\end{aligned}$$

となり, (2.25) が得られる.

(2.26) について. (2.25),(2.22) より

$$\begin{aligned}\|\varphi(-L)F\|_{L^2(K)}^2 &= \int_B (\varphi(-L)F, \varphi(-L)F)_K \, d\mu = \int_B (\varphi(-L)\varphi(-L)F, F)_K \, d\mu \\ &= \int_B (\varphi^2(-L)F, F)_K \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(n))^2 \int_B (J_n F, F)_K \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(n))^2 \|J_n F\|_{L^2(K)}^2\end{aligned}$$

となり, (2.26) が得られる. □

命題 2.30 ([15, Proposition 2.14])**.** n 次 Wiener 積分の空間 $\mathcal{H}_n(K)$ は $L^p(K)$ の閉部分空間であり, ノルムの族 $\{\|\cdot\|_{L^p(K)} \mid 1 < p < \infty\}$ は $\mathcal{H}_n(K)$ 上で互いに同値である. すなわち $1 < p < q < \infty$ と $t > 0$ が $q = e^{2t}(p-1) + 1$ を満たすならば, すべての $F \in \mathcal{H}_n(K)$ に対して

$$e^{-nt} \|F\|_{L^q(K)} \le \|F\|_{L^p(K)} \le \|F\|_{L^q(K)}$$

が成立する.

証明. $\{\kappa_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ を K の完全正規直交系とする. $F \in \mathcal{P}(K)$ が $\{H_a \kappa_j \mid a \in \Lambda, |a| = n, j \in \mathbf{N}\}$ の線形結合で表わされるならば命題 2.23 より $T_t F = e^{-nt} F$ となる. これと定理 2.25 より

$$e^{-nt} \|F\|_{L^q(K)} = \|T_t F\|_{L^q(K)} \le \|F\|_{L^p(K)} \le \|F\|_{L^q(K)}$$

が成り立つ. これより $L^2(K)$ の閉部分空間として定義された $\mathcal{H}_n(K)$ は $L^p(K)$ の閉部分空間であることが分かった. □

命題 2.31 ([15, Proposition 2.15],[17, Lemma 1.1])**.** $L^2(K)$ から $\mathcal{H}_n(K)$ への正射影 J_n は拡張または制限を行うことで $L^p(K)$ から $\mathcal{H}_n(K)$ への連続作用素となる. さらに

$$J_n J_m = J_m J_n = \delta_{mn} J_n, \tag{2.27}$$

$$T_t J_n = J_n T_t = e^{-nt} J_n \tag{2.28}$$

が成り立つ. ただし δ_{mn} は $m = n$ のとき $1, m \neq n$ のとき 0 をとる.

証明. $L^2(K)$ 上で (2.27) が成り立つことは J_n の定義より直ちに従う. $F \in L^2(K)$ に L^2 収束する $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(K)$ を取れる. 命題 2.23 より $T_t J_n F_j = e^{-nt} J_n F_j$ となるので

$$\begin{aligned}\|T_t J_n F - e^{-nt} J_n F\|_{L^2(K)} &\le \|T_t J_n (F - F_j)\|_{L^2(K)} + \|e^{-nt} J_n (F_j - F)\|_{L^2(K)} \\ &\le 2\|F - F_j\|_{L^2(K)}\end{aligned}$$

が得られる. これより $T_t J_n F = e^{-nt} J_n F$ が分かる. そして命題 2.24 より

$$\begin{aligned}\int_B (J_n T_t F) G \, d\mu = \int_B (T_t F)(J_n G) \, d\mu = \int_B F (T_t J_n G) \, d\mu \\ = \int_B F (e^{-nt} J_n G) \, d\mu = \int_B (e^{-nt} J_n F) G \, d\mu = \int_B (T_t J_n F) G \, d\mu\end{aligned}$$

となり, $F \in L^2(K)$ に対して (2.28) が成り立つことが分かる. $1 < p < 2$ のときは, 定理 2.25 より $2 = e^{2t_p}(p-1) + 1$ なる $t_p > 0$ を取れば, すべての $F \in L^2(K) \subset L^p(K)$ に対して

$$e^{-nt_p} \|J_n F\|_{L^p(K)} \le e^{-nt_p} \|J_n F\|_{L^2(K)} = \|J_n T_{t_p} F\|_{L^2(K)} \le \|T_{t_p} F\|_{L^2(K)} \le \|F\|_{L^p(K)}$$

が成り立つ. よって $L^2(K)$ は $L^p(K)$ の中で稠密なので J_n は $L^p(K)$ 上に連続作用素として拡張できる. $2 < p < \infty$ のときは, 定理 2.25 より $p = e^{2t_p}(2-1) + 1$ なる $t_p > 0$ を取れば, すべての $F \in L^p(K) \subset L^2(K)$ に対して

$$e^{-nt_p} \|J_n F\|_{L^p(K)} = \|T_{t_p} J_n F\|_{L^p(K)} \le \|J_n F\|_{L^2(K)} \le \|F\|_{L^2(K)} \le \|F\|_{L^p(K)}$$

が成り立つ. よって J_n の $L^p(K)$ への制限は $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続となる.

$F \in L^p(K)$ に対して (2.27) と (2.28) が成立することは $L^2(K)$ の場合と同じく, F を多項式で近似することで分かる. □

命題 2.32 ([17, Lemma 1.2])**.** $\alpha \ge 0$, $0 < \beta \le 1$, $N \in \mathbf{N}$ とする. p, N に依存するが α, β に依存しない $C_{p,N} > 0$ が存在し, すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\left\| Q_t^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F \right\|_{L^p(K)} \le C_{p,N} e^{-(\alpha+N)^{\beta} t} \|F\|_{L^p(K)}$$

が成り立つ.

証明. 命題 2.31 より $1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n$ は連続作用素なので, その作用素ノルムを $A_{p,N}$ で表わす.
はじめに $\alpha = 0, \beta = 1$ のときを考える. 注意 2.13 より $Q_t^{(\alpha,\beta)} = T_t$ である. $p = 2$ のとき

$$\begin{aligned}\left\| T_t \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F \right\|_{L^2(K)}^2 &= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} e^{-nt} J_n F \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} e^{-2nt} \|J_n F\|_{L^2(K)}^2 \le e^{-2Nt} \sum_{n=N}^{\infty} \|J_n F\|_{L^2(K)}^2 \le e^{-2Nt} \|F\|_{L^2(K)}^2\end{aligned}$$

となり, $C_{2,N} = 1$ として主張が成立することが分かる. $1 < p < 2$ のとき $2 = e^{2t_p}(p-1) + 1$ なる $t_p > 0$ を取る. $0 \le t < t_p$ ならば

$$\begin{aligned}\left\| T_t \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F \right\|_{L^p(K)} &\le \left\| \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F \right\|_{L^p(K)} \le A_{p,N} \|F\|_{L^p(K)} \\ &\le e^{N(t_p - t)} A_{p,N} \|F\|_{L^p(K)} \le (p-1)^{-N/2} A_{p,N} e^{-Nt} \|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. $t \geq t_p$ ならば $p=2$ のときの結果と定理 2.25 より

$$\begin{aligned}\Big\|T_t\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)} &\leq \Big\|T_t\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^2(K)} = \Big\|T_{t-t_p}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)T_{t_p}F\Big\|_{L^2(K)}\\ &\leq e^{-N(t-t_p)}\|T_{t_p}F\|_{L^2(K)} \leq (p-1)^{-N/2}e^{-Nt}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. $1<p<2$ のときは $C_{p,N} := (p-1)^{-N/2}\max\{1, A_{p,N}\}$ として主張が成立することが分かる. $2<p<\infty$ のとき $p = e^{2t_p}(2-1)+1$ なる $t_p>0$ を取る. $0 \leq t < t_p$ ならば

$$\begin{aligned}\Big\|T_t\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)} &\leq \Big\|\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)} \leq A_{p,N}\|F\|_{L^p(K)}\\ &\leq e^{-N(t-t_p)}A_{p,N}\|F\|_{L^p(K)} \leq (p-1)^{N/2}A_{p,N}\times e^{-Nt}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. $t \geq t_p$ ならば $p=2$ のときの結果と定理 2.25 より

$$\begin{aligned}\Big\|T_t\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)} &= \Big\|T_{t_p}T_{t-t_p}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)}\\ &\leq \Big\|T_{t-t_p}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^2(K)} \leq e^{-N(t-t_p)}\|F\|_{L^2(K)} \leq (p-1)^{N/2}e^{-Nt}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. $2<p<\infty$ のときは $C_{p,N} := (p-1)^{N/2}\max\{1, A_{p,N}\}$ として主張が成立することが分かる.

一般の $\alpha \geq 0$ と $0<\beta\leq 1$ に対しては

$$\begin{aligned}\Big\|Q_t^{(\alpha,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)} &= \Big\|\int_0^\infty e^{-\alpha s}T_s\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\,\lambda_t^{(\beta)}(ds)\Big\|_{L^p(K)}\\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s}\Big\|T_s\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)}\lambda_t^{(\beta)}(ds)\\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s}C_{p,N}e^{-Ns}\|F\|_{L^p(K)}\,\lambda_t^{(\beta)}(ds) \leq C_{p,N}e^{-(\alpha+N)^\beta t}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}\tag{2.29}$$

となり主張が成立することが分かる. □

命題 2.33. $\alpha \geq 0, 0<\beta\leq 1$ とする. 連続線形作用素 $R^{(\alpha,\beta)} : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ を

$$R^{(\alpha,\beta)}F := \int_0^\infty Q_t^{(\alpha,\beta)}(1-J_0)F\,dt, \quad F \in \mathcal{P}(K),$$

と定義する. このとき $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$R^{(\alpha,\beta)}F = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)^{-\beta}J_nF,\tag{2.30}$$

$$R^{(\alpha,\beta)}J_nF = J_nR^{(\alpha,\beta)}F = \begin{cases}0, & n=0,\\ (\alpha+n)^{-\beta}J_nF, & n\geq 1,\end{cases}\tag{2.31}$$

が成り立つ.

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して命題 2.32 より

$$\int_0^\infty \|Q_t^{(\alpha,\beta)}(1-J_0)F\|_{L^p(K)}\,dt \le \int_0^\infty C_{p,N}e^{-N^\beta t}\|F\|_{L^p(K)}\,dt \le C_{p,N}(\alpha+N)^{-\beta}\|F\|_{L^p(K)}$$

が成り立つので $R^{(\alpha,\beta)}$ は $\mathcal{P}(K)$ を定義域とし $L^p(K)$ ノルムに関する連続作用素として矛盾なく定義される. さらに (2.20) より

$$\begin{aligned} R^{(\alpha,\beta)}F &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-(\alpha+n)^\beta t} J_n(1-J_0)F\,dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha+n)^\beta t} J_n(1-J_0)F\,dt = \sum_{n=1}^\infty (\alpha+n)^{-\beta} J_n F \end{aligned}$$

となる. ここで (2.27) を用いている. これより主張が成立することが分かる. □

命題 2.34 ([17, Lemma 1.2]). $\alpha \ge 0$, $0 < \beta \le 1$, $N \in \mathbf{N}$ とする. $C_{p,N} > 0$ を命題 2.32 で定義した $C_{p,N}$ とすれば, すべての $j \in \mathbf{N}$ と $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\left\| \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\}^j F \right\|_{L^p(K)} \le C_{p,N}(\alpha+N)^{-\beta j}\|F\|_{L^p(K)}$$

が成り立つ.

証明. すべての $j \in \mathbf{N}$ と $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\}^j F = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_{t_1+\cdots+t_j} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F\,dt_1\cdots dt_j \tag{2.32}$$

が成り立つことを帰納法で示す. $(1-J_0)(1-\sum_{n=0}^{N-1} J_n) = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n$ より $j=1$ の場合は直ちに従う. $j-1$ のときを仮定すれば

$$\begin{aligned} \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\}^j F &= \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\}^{j-1} \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\} F \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_{t_1+\cdots+t_{j-1}} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\} F\,dt_1\cdots dt_{j-1} \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_{t_1+\cdots+t_{j-1}} \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\} F\,dt_1\cdots dt_{j-1} \end{aligned}$$

となる. 最後の変形では (2.31) を用いた. $j=1$ のときの結論を用いれば

$$\begin{aligned} \left\{ R^{(\alpha,\beta)} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) \right\}^j F &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_{t_1+\cdots+t_{j-1}} \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_s \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F\,ds dt_1\cdots dt_{j-1} \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty Q^{(\alpha,\beta)}_{s+t_1+\cdots+t_{j-1}} \Big(1 - \sum_{n=0}^{N-1} J_n\Big) F\,ds dt_1\cdots dt_{j-1} \end{aligned}$$

となり, j のときも (2.32) が成り立つことが分かる.

(2.32) の表現と命題 2.32 より

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big\{R^{(\alpha,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\Big\}^j F\Big\|_{L^p(K)} &\le \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \Big\|Q^{(\alpha,\beta)}_{t_1+\cdots+t_j}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)F\Big\|_{L^p(K)}\,dt_1\cdots dt_j \\
&\le \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty C_{p,N}e^{-(\alpha+N)^\beta(t_1+\cdots+t_j)}\,dt_1\cdots dt_j \le C_{p,N}(\alpha+N)^{-\beta j}\|F\|_{L^p(K)}
\end{aligned}$$

となり主張が成り立つことが分かる. □

命題 2.35. $h(\xi)=\sum_{j=0}^\infty a_j\xi^j, |\xi|\le N^{-1}$, と $0<\beta\le 1$ が存在し

$$\varphi(n)=h(n^{-\beta}),\quad n\ge N,$$

が成り立てば, $\varphi(-L)$ はノルム $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続である.

証明. $T_1,T_2:\mathcal{P}(K)\to\mathcal{P}(K)$ を

$$T_1F:=\sum_{n=0}^{N-1}\varphi(n)J_nF,\quad T_2F:=\sum_{n=N}^{\infty}\varphi(n)J_nF,\quad F\in\mathcal{P}(K),$$

とおくと $\varphi(-L)F=T_1F+T_2F$ となる. そして命題 2.31 から T_1 がノルム $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続であることが分かる. T_2 が連続であることを示せば良い.

(2.32) より $F=\sum_{m=0}^\infty J_mF\in\mathcal{P}(K)$ に対して

$$\begin{aligned}
\Big\{R^{(0,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\Big\}^j F &= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty Q^{(0,\beta)}_{t_1+\cdots+t_j}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\sum_{m=0}^\infty J_mF\,dt_1\cdots dt_j \\
&= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty Q^{(0,\beta)}_{t_1+\cdots+t_j}\sum_{n=N}^\infty J_nF\,dt_1\cdots dt_j \\
&= \sum_{n=N}^\infty\Big(\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty Q^{(0,\beta)}_{t_1+\cdots+t_j}\,dt_1\cdots dt_j\Big)J_nF=\sum_{n=N}^\infty n^{-\beta}J_nF
\end{aligned}$$

となる. 最後の変形では (2.21) を用いた. よって

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^\infty a_j\Big\{R^{(0,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\Big\}^j F &= \sum_{j=0}^\infty a_j\sum_{n=N}^\infty n^{-\beta}J_nF \\
&= \sum_{n=N}^\infty\Big(\sum_{j=0}^\infty a_jn^{-\beta}\Big)J_nF=\sum_{n=N}^\infty h(n^{-\beta})J_nF=\sum_{n=N}^\infty\varphi(n)J_nF=T_2F
\end{aligned}$$

が成り立つ. そして (2.34) より

$$\begin{aligned}
&\|T_2F\|_{L^p(K)} \\
&\quad= \Big\|\sum_{j=0}^\infty a_j\Big\{R^{(0,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\Big\}^jF\Big\|_{L^p(K)} \le \sum_{j=0}^\infty |a_j|\Big\|\Big\{R^{(0,\beta)}\Big(1-\sum_{n=0}^{N-1}J_n\Big)\Big\}^jF\Big\|_{L^p(K)} \\
&\quad\le \sum_{j=0}^\infty |a_j|C_{p,N}N^{-\beta j}\|F\|_{L^p(K)}\le C_{p,N}\Big[\sum_{j=0}^\infty|a_j|N^{-j}\Big]\|F\|_{L^p(K)}
\end{aligned}$$

となる. これより T_2 がノルム $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続であることが分かり, T_1 の連続性と合わせれば結論が従う. □

第3章　二つの同値なノルム

この節では多項式 Wiener 汎関数全体 $\mathcal{P}(K)$ 上で定義された二つのノルム

$$\|(\alpha - L)^{n/2}\cdot\|_{L^p(K)}, \qquad\qquad \sum_{m=0}^{n}\|D^m\cdot\|_{L^p(K)}$$

の同値性を見る. ここで $n\in\mathbf{N}$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$ である.

3.1　Littlewood-Paley-Stein の不等式

この節ではいくつか命題をつなげて Littlewood-Paley-Stein の不等式を証明する. これはノルムの同値性を示す上で重要な補題となる.

定理 3.1 (Littlewood-Paley-Stein の不等式 [15, Theorem 3.4])**.** $1<p<\infty$ とする. α と p に依存する定数 $C_{\alpha,p}>$ が存在し, すべての $F\in\mathcal{P}(K)$ に対して

$$\|G_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})}\le C_{\alpha,p}\begin{cases}\|F\|_{L^p(K)}, & \alpha>0,\\ \|(1-J_0)F\|_{L^p(K)}, & \alpha=0,\end{cases} \tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで

$$G_{\alpha,F}(x):=\int_0^\infty t\left[\left\|\frac{\partial}{\partial t}Q_t^{(\alpha,1/2)}F(x)\right\|_K^2+\|DQ_t^{(\alpha,1/2)}F(x)\|^2_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}\right]dt$$

である. これを **Littlewood-Paley-Stein の不等式**という.

証明のために次の記号を用いる.

定義 3.2. $\alpha\ge 0$ と $F\in\mathcal{P}(K)$ に対して $g^{\rightarrow}_{\alpha,F}, g^{\uparrow}_{\alpha,F}, g_{\alpha,F} : B\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$\begin{aligned}
g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x,t) &:= \left\|\frac{\partial}{\partial t}Q_t^{(\alpha,1/2)}F(x)\right\|_K, && (x,t)\in B\times[0,\infty),\\
g^{\uparrow}_{\alpha,F}(x,t) &:= \|DQ_t^{(\alpha,1/2)}F(x)\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}, && (x,t)\in B\times[0,\infty),\\
g_{\alpha,F}(x,t) &:= \sqrt{(g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x,t))^2+(g^{\uparrow}_{\alpha,F}(x,t))^2}, && (x,t)\in B\times[0,\infty),
\end{aligned}$$

とおく. さらに $G^{\rightarrow}_{\alpha,F}, G^{\uparrow}_{\alpha,F}, G_{\alpha,F} : B\to\mathbf{R}$ を

$$\begin{aligned}
G^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t(g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x,t))^2\,dt\right)^{1/2}, && x\in B,\\
G^{\uparrow}_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t(g^{\uparrow}_{\alpha,F}(x,t))^2\,dt\right)^{1/2}, && x\in B,\\
G_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t(g_{\alpha,F}(x,t))^2\,dt\right)^{1/2}, && x\in B,
\end{aligned}$$

とおく.

3.1.1　$p = 2$ の場合の証明

命題 3.3 ([15, Proposition 3.5]). すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\|G^{\rightarrow}_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{2}\begin{cases}\|F\|_{L^2(K)}, & \alpha > 0,\\ \|(1-J_0)F\|_{L^2(K)}, & \alpha = 0,\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\|G^{\uparrow}_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})} \le \frac{1}{2}\begin{cases}\|F\|_{L^2(K)}, & \alpha > 0,\\ \|(1-J_0)F\|_{L^2(K)}, & \alpha = 0,\end{cases} \tag{3.3}$$

が成り立つ. つまり (3.1) は $C_{\alpha,2} = 1/2$ として成り立つ.

証明. (3.2) を示す. 命題 2.27 より

$$\|g^{\rightarrow}_{\alpha,F}\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\alpha+n}e^{-\sqrt{\alpha+n}t}J_nF\Big\|^2_{L^2(K)} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)e^{-2\sqrt{\alpha+n}t}\|J_nF\|^2_{L^2(K)}$$

となり, Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\|G^{\rightarrow}_{\alpha,F}\|^2_{L^2(\mathbf{R})} &= \int_B\int_0^{\infty} t(g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(\cdot,t))^2\,dtd\mu\\ &= \int_0^{\infty} t\|g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\|J_nF\|^2_{L^2(K)}(\alpha+n)\int_0^{\infty} te^{-2\sqrt{\alpha+n}t}\,dt\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\lambda\int_0^{\infty} te^{-2\sqrt{\lambda}t}\,dt = \begin{cases}1/4, & \lambda > 0,\\ 0, & \lambda = 0,\end{cases} \tag{3.4}$$

となることに注意し, Itô-Wiener 展開 (定理 1.19) を用いれば (3.2) が得られる.

次に (3.3) を示す. 命題 2.27 と命題 2.23 より

$$\begin{aligned}\|g^{\uparrow}_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})} &= \int_B (DQ_t^{(\alpha,1/2)}F, DQ_t^{(\alpha,1/2)}F)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}\,d\mu\\ &= \int_B(-LQ_t^{(\alpha,1/2)}F, Q_t^{(\alpha,1/2)}F)_K\,d\mu = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha+m}+\sqrt{\alpha+n})t}\int_B(-LJ_mF, J_nF)_K\,d\mu\\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha+m}+\sqrt{\alpha+n})t}\int_B(mJ_mF, J_nF)_K\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\sqrt{\alpha+n}t}\|J_nF\|^2_{L^2(K)}\end{aligned}$$

が得られる. そして Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\|G^{\uparrow}_{\alpha,F}\|^2_{L^2(\mathbf{R})} &= \int_B\int_0^{\infty} t(g^{\uparrow}_{\alpha,F}(\cdot,t))^2\,dtd\mu\\ &= \int_0^{\infty} t\|g_{\alpha,F}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\|J_nF\|^2_{L^2(K)}\int_0^{\infty} te^{-2\sqrt{\alpha+n}t}\,dt\end{aligned}$$

が従う. 最後に (3.4) に注意すれば結論が得られる. □

3.1.2 いくつかの補題

この小節では $B = \mathbf{R}^n$, $K = \mathbf{R}^m$, $\mu(d\xi) := (2\pi)^{n/2}\exp(-|\xi|^2/2))d\xi$ とし, B 上の Ornstein-Uhlenbeck 過程について考察する. これは Littlewood-Paley-Stein の不等式を示す際に重要な補題となる. B 値 Brown 運動 $\{\omega_t = {}^t(\omega_t^1, \dots, \omega_t^n) \mid t \in [0,\infty)\}$ に対して確率微分方程式

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2}\, d\omega_t - X_t\, dt, \quad t > 0, \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

を考えると, その解 $\{X_t = {}^t(X_t^1, \dots, X_t^n) \mid t \in [0,\infty)\}$ は B 値 Ornstein-Uhlenbeck 過程である. $\{W_t \mid t \in [0,\infty)\}$ を生成作用素 $\partial^2/\partial\beta^2$ をもつ X とは独立な 1 次元 Brown 運動とする. $\xi \in B$ から出発する X の法則を P_ξ, $\beta \in [0,\infty)$ から出発する W の法則を P_β^W と表わす. そして $B \times [0,\infty)$ 上の確率分布 ν を初期分布とする (X, W) の結合法則を $\hat{P}_\nu$ で表わす. つまり $\hat{P}_\nu = \int_{B\times[0,\infty)} P_\xi \otimes P_\beta^W \nu(d\xi d\beta)$ とする. さらに情報増大系 $\{\hat{\mathscr{F}}_t := \sigma\{(X_s, W_s) \mid s \in [0,t]\} \mid t \in [0,\infty)\}$ に関する停止時刻 τ を $\tau := \inf\{t \in [0,\infty) \mid W_t = 0\}$ と定義する

$F \in \mathcal{P}(K)$ に対して $u(x,t) := Q_t^{(\alpha,1/2)}F(x)$ とおくと $u \in C^{2,2}(B \times (0,\infty); K)$ であり

$$\begin{cases} u(x,0) = F(x), & x \in B, \\ Lu(x,t) + \partial^2 u(x,t) = \alpha u(x,t), & (x,t) \in B \times (0,\infty), \end{cases}$$

が成り立つ. ここで L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素で $B = \mathbf{R}^n$ 上では $L = \Delta - x\cdot\nabla$ と表現できる. Itô の公式より

$$u^j(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau}) = M_t^j + (\mathrm{BV1})_t^j + (\mathrm{BV2})_t^j + (\mathrm{BV3})_t^j + (\mathrm{BV4})_t^j$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned} M_t^j &= u^j(X_0, W_0) + \sqrt{2}\int_0^{t\wedge\tau} \nabla u^j(X_s, W_s)\cdot d\omega_s + \int_0^{t\wedge\tau} \partial u^j(X_s, W_s)\, dW_s, \\ (\mathrm{BV1})_t^j &:= -\int_0^{t\wedge\tau} X_s \cdot \nabla u^j(X_s, W_s)\, ds, \\ (\mathrm{BV2})_t^j &:= \frac{1}{2}\sum_{\nu,\lambda=1}^n \int_0^{t\wedge\tau} \partial_\nu\partial_\lambda u^j(X_s, W_s)\, d\langle X^\nu, X^\lambda\rangle_s, \\ (\mathrm{BV3})_t^j &:= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n \int_0^{t\wedge\tau} \partial_\nu\partial u^j(X_s, W_s)\, d\langle W, X^\nu\rangle_s, \\ (\mathrm{BV4})_t^j &:= \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \partial^2 u^j(X_s, W_s)\, d\langle W, W\rangle_s \end{aligned}$$

である. ただし $\partial_\nu u^j(x,t)$ は $u^j(x,t)$ の x の第 ν 成分に関する偏導関数を表わし, $\partial u^j(x,t)$ は $u^j(x,t)$ の t に関する偏導関数を表わす. 以降 ∇, Δ は x に関する微分を表わすものとする. (X, W) の 2 次変分過程が

$$\langle X^j, X^k\rangle_t = 2t\delta_{jk}, \quad \langle W, X^j\rangle_t = 0, \quad \langle W, W\rangle_t = 2t$$

となることに注意すれば $(\mathrm{BV3})_t^j = 0$ と

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{BV1})_t^j + (\mathrm{BV2})_t^j + (\mathrm{BV4})_t^j \\
&\qquad = -\int_0^{t\wedge\tau} X_s \cdot \partial_\nu u^j(X_s, W_s)\, ds + \int_0^{t\wedge\tau} \Delta u^j(X_s, W_s)\, ds + \int_0^{t\wedge\tau} \partial^2 u^j(X_s, W_s)\, ds \\
&\qquad = \int_0^{t\wedge\tau} \Big[L u^j(X_s, W_s) + \partial^2 u^j(X_s, W_s) \Big]\, ds = \int_0^{t\wedge\tau} \alpha u^j(X_s, W_s)\, ds
\end{aligned}
$$

が得られる. よって

$$
u^j(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau}) = M_t^j + \int_0^{t\wedge\tau} \alpha u^j(X_s, W_s)\, ds \tag{3.5}
$$

が従う. さらに Itô の公式を用いれば

$$
\begin{aligned}
&|u^j(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau})|^2 - |u^j(X_0, W_0)|^2 \\
&\qquad = \int_0^{t\wedge\tau} 2u^j(X_{s\wedge\tau}, W_{s\wedge\tau}) \Big[dM_s^j + \alpha u^j(X_s, W_s)\, ds \Big] + \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\tau} 2\, d\langle M^j, M^j \rangle_s \\
&\qquad = 2\int_0^{t\wedge\tau} u^j(X_s, W_s) dM_s^j + 2\int_0^{t\wedge\tau} \alpha |u^j(X_s, W_s)|^2\, ds + \langle M^j, M^j \rangle_{t\wedge\tau}
\end{aligned}
$$

が得られる. そして M の 2 次変分過程が

$$
\langle M^j, M^j \rangle_t = 2\int_0^{t\wedge\tau} \Big[|\nabla u^j(X_s, W_s)|^2 + |\partial u^j(X_s, W_s)|^2 \Big]\, ds
$$

と表わせる. $D = \nabla$ であるから

$$
\begin{aligned}
|DQ_t^{(\alpha,1/2)} F(x)|^2 &= |Du(x,t)|^2 = \sum_{j=1}^m |\nabla u^j(x,t)|^2, \\
\Big| \frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(\alpha,1/2)} F(x) \Big|^2 &= \Big| \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \Big|^2 = \sum_{j=1}^m |\partial u^j(x,t)|^2
\end{aligned}
$$

が従い, これより

$$
\begin{aligned}
\langle M, M \rangle_t &:= \sum_{j=1}^m \langle M^j, M^j \rangle_t = 2\int_0^{t\wedge\tau} \left[\sum_{j=1}^m |\nabla u^j(X_s, W_s)|^2 + \sum_{j=1}^m |\partial u^j(X_s, W_s)|^2 \right] ds \\
&= 2\int_0^{t\wedge\tau} \left[|DQ_{W_s}^{(\alpha,1/2)} F(X_s)| + \Big| \frac{\partial}{\partial t} Q_{W_s}^{(\alpha,1/2)} F(X_s) \Big|^2 \right] ds \qquad (3.6) \\
&= 2\int_0^{t\wedge\tau} |g_{\alpha,F}(X_s, W_s)|^2\, ds
\end{aligned}
$$

が得られる. ゆえに

$$
\begin{aligned}
&|u(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau})|^2 - |u(X_0, W_0)|^2 \qquad (3.7) \\
&\qquad = 2\int_0^{t\wedge\tau} u(X_s, W_s) \cdot dM_s + 2\int_0^{t\wedge\tau} \Big[\alpha |u(X_s, W_s)|^2 + |g_{\alpha,F}(X_s, W_s)|^2 \Big]\, ds
\end{aligned}
$$

が分かる.

補題 3.4 ([15, Proposition 3.10])**.** j を $B \times [0,\infty)$ の非負可測関数とすれば

$$\hat{E}_{\mu\otimes\delta_\beta}\left[\int_0^\tau j(X_s, W_s)\,ds\right] = \int_B \int_0^\infty (\beta\wedge b) j(x,b)\,\mu(dx)db$$

が成立する.

補題 3.5 ([15, Proposition 3.11])**.** j を $B \times [0,\infty)$ の非負可測関数とすれば

$$\hat{E}_{\mu\otimes\delta_\beta}\left[\int_0^\tau j(X_s, W_s)\,ds \,\middle|\, X_\tau\right] = \int_0^\infty (\beta\wedge b)\big[Q_b^{(0,1/2)} j(\cdot, b)\big](X_\tau)\,db \quad P_{\mu\times\delta_\beta}\text{-a.s.}$$

が成立する.

補題 3.6 ([15, Theorem 3.3])**.** $1 < p < \infty$ とし, $F \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ に対して

$$F^\times(x) := \sup_{0\le t<\infty} |T_t F(x)|, \quad x \in B,$$

とおく. このとき

$$\|F^\times\|_{L^p(\mathbf{R})} \le \frac{p}{p-1}\|F\|_{L^p(\mathbf{R})}$$

が成り立つ.

3.1.3 $1 < p < 2$ の場合の証明

定理 3.1 の証明 ($1 < p < 2$ の場合). 1 次元マルチンゲール $\{N_t \mid t \in [0,\infty)\}$ と有界変動過程 $\{C_t^i \mid t \in [0,\infty)\}, i = 1, 2,$ を

$$N_t := \int_0^{t\wedge\tau} u(X_s, W_s)\cdot dM_s,$$
$$C_t^1 := \alpha \int_0^{t\wedge\tau} |u(X_s, W_s)|^2\,ds, \qquad C_t^2 := \int_0^{t\wedge\tau} |g_{\alpha,F}(X_s, W_s)|^2\,ds$$

とおく. (3.7) より $|u(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau})|^2 - |u(X_0, W_0)|^2 = 2N_t + 2C_t^1 + 2C_t^2$ となるので, Itô の公式より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}(|u(X_{t\wedge\tau}, W_{t\wedge\tau})|^2 + \varepsilon)^{p/2} &= (|u(X_0, W_0)|^2 + \varepsilon)^{p/2} + 2\cdot\frac{p}{2}\int_0^{t\wedge\tau} (|u(X_s, W_s)|^2 + \varepsilon)^{p/2-1}\,dN_s \\ &\quad + (\mathrm{BV1})_t + (\mathrm{BV2})_t + (\mathrm{BV3})_t + (\mathrm{BV4})_t\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
(\mathrm{BV1})_t &:= 2\cdot\frac{p}{2}\int_0^{t\wedge\tau} (|u(X_s, W_s)|^2 + \varepsilon)^{p/2-1}\,dC_s^1, \\
(\mathrm{BV2})_t &:= 2\cdot\frac{p(p-1)}{2}\int_0^{t\wedge\tau} (|u(X_s, W_s)|^2 + \varepsilon)^{p/2-1}\,dC_s^2, \\
(\mathrm{BV3})_t &:= 2\cdot\frac{p(2-p)}{2}\int_0^{t\wedge\tau} (|u(X_s, W_s)|^2 + \varepsilon)^{p/2-1}\,dC_s^2, \\
(\mathrm{BV4})_t &:= \frac{1}{2}2^2\cdot\frac{p}{2}\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\int_0^{t\wedge\tau} (|u(X_s, W_s)|^2 + \varepsilon)^{p/2-2}\,d\langle N, N\rangle_s
\end{aligned}$$

である. まずは

$$\hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}\Big[(|u(X_{t\wedge\tau},W_{t\wedge\tau})^2+\varepsilon)^{p/2}\Big] \le \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}[(\mathrm{BV2})_t] \tag{3.8}$$

を示そう. そのためには $(\mathrm{BV3})_t+(\mathrm{BV4})_t\ge 0$ を示せば良い. マルチンゲール $\{N_t^j \mid t\in[0,\infty)\}$ を $N_t^j := \int_0^{t\wedge\tau} u^j(X_s,W_s)dM_s^j$ として定めれば, Kunita-Watanabe の不等式を用いることで, N の 2 次変分過程に対して

$$\begin{aligned}\langle N^j,N^k\rangle_t &= \int_0^{t\wedge\tau} u^j(X_s,W_s)u^k(X_s,W_s)\,d\langle M^j,M^k\rangle_s\\ &\le \left[\int_0^{t\wedge\tau}|u^j(X_s,W_s)|^2\,d\langle M^k,M^k\rangle_s\right]^{1/2}\left[\int_0^{t\wedge\tau}|u^k(X_s,W_s)|^2\,d\langle M^j,M^j\rangle_s\right]^{1/2}\end{aligned}$$

なる評価が得られる. $N_t=\sum_j N_t^j$ なので Cauchy-Schwarz の不等式を用いることで

$$\begin{aligned}\langle N,N\rangle_t &= \sum_{j,k}\langle N^j,N^k\rangle_t\\ &\le \left[\sum_{j,k}\int_0^{t\wedge\tau}|u^j(X_s,W_s)|^2\,d\langle M^k,M^k\rangle_s\right]^{1/2}\left[\sum_{j,k}\int_0^{t\wedge\tau}|u^k(X_s,W_s)|^2\,d\langle M^j,M^j\rangle_s\right]^{1/2}\\ &= \int_0^{t\wedge\tau}|u(X_s,W_s)|^2\,d\langle M,M\rangle_s \le 2\int_0^{t\wedge\tau}|u(X_s,W_s)|^2|g_{\alpha,F}(X_s,W_s)|^2\,ds\end{aligned}$$

が得られる. 最後の変形では (3.6) を用いた. これより

$$\begin{aligned}&(\mathrm{BV3})_t+(\mathrm{BV4})_t\\ &\quad= \frac{p(2-p)}{2}\int_0^{t\wedge\tau}(|u(X_s,W_s)|^2+\varepsilon)^{p/2-2}\Big[2|u(X_s,W_s)|^2|g_{\alpha,F}(X_s,W_s)|^2\Big]\,ds\\ &\qquad+\frac{p(p-2)}{2}\int_0^{t\wedge\tau}(|u(X_s,W_s)|^2+\varepsilon)^{p/2-2}\,d\langle N,N\rangle_s\\ &\quad= \frac{p(2-p)}{2}\int_0^{t\wedge\tau}(|u(X_s,W_s)|^2+\varepsilon)^{p/2-2}\Big[2|u(X_s,W_s)|^2|g_{\alpha,F}(X_s,W_s)|^2\,ds-d\langle N,N\rangle_s\Big]\\ &\quad\ge 0\end{aligned}$$

となり, (3.8) が分かる. そして $t\to\infty$ とすることで

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}[(\mathrm{BV2})_t] &\le \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}\Big[(|u(X_\tau,W_\tau)|^2+\varepsilon)^{p/2}\Big]\\ &= \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}\Big[(|F(X_\tau)|^2+\varepsilon)^{p/2}\Big] = \|(|F|^2+\varepsilon)^{1/2}\|_{L^p(\mathbf{R})}^p\end{aligned}$$

が得られる. 補題 3.6 で定義した $F^\times$ に対して

$$|u(\cdot,b)| = |Q_b^{(\alpha,1/2)}F(\cdot)| \le \int_0^\infty e^{-\alpha s}|T_sF(\cdot)|\,\lambda_b^{(1/2)}(ds) \le \int_0^\infty e^{-\alpha s}|F^\times(\cdot)|\,\lambda_b^{(1/2)}(ds)\le F^\times(\cdot)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}[(\mathrm{BV2})_t] &= p(p-1)\hat{E}_{\mu\times\delta_\beta}\left[\int_0^\tau(|u(X_s,W_s)|^2+\varepsilon)^{p/2-1}g_{\alpha,F}(X_s,W_s)^2\,ds\right]\\ &= p(p-1)\left\|\int_0^\infty(\beta\wedge b)(|u(\cdot,b)|^2+\varepsilon)^{p/2-1}g_{\alpha,F}(\cdot,b)^2\,db\right\|_{L^1(\mathbf{R})}\\ &\ge p(p-1)\left\|\int_0^\infty(\beta\wedge b)(|F^\times|^2+\varepsilon)^{p/2-1}g_{\alpha,F}(\cdot,b)^2\,db\right\|_{L^1(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. よって

$$\|(|F|^2+\varepsilon)^{1/2}\|_{L^p(\mathbf{R})}^p \geq p(p-1)\left\| \int_0^\infty (\beta\wedge b)(|F^\times|^2+\varepsilon)^{p/2-1} g_{\alpha,F}(\cdot,b)^2\,db \right\|_{L^1(\mathbf{R})}$$

を得る. $\beta\to\infty$ として

$$\begin{aligned}\|(|F|^2+\varepsilon)^{1/2}\|_{L^p(\mathbf{R})}^p &\geq p(p-1)\|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{p/2-1}|G_{\alpha,F}|^2\|_{L^1(\mathbf{R})}\\ &= p(p-1)\|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(p-2)/4}G_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\end{aligned}$$

となる. そして

$$\begin{aligned}\|G_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})} &\leq \|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(2-p)/4}(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(p-2)/4}G_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})}\\ &\leq \|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(2-p)/4}\|_{L^{2p/(2-p)}(\mathbf{R})}\|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(p-2)/4}G_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})}\\ &\leq \frac{1}{p(p-1)}\|(|F^\times|^2+\varepsilon)^{(2-p)/4}\|_{L^{2p/(2-p)}(\mathbf{R})}\|(|F|^2+\varepsilon)^{1/2}\|_{L^p(\mathbf{R})}^{p/2}\end{aligned}$$

なので $\varepsilon\downarrow 0$ として, 補題 3.6 を用いれば

$$\begin{aligned}&\|G_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})}\\ &\quad\leq \frac{1}{p(p-1)}\||F^\times|^{(2-p)/2}\|_{L^{2p/(2-p)}(\mathbf{R})}\|F\|_{L^p(K)}^{p/2} \leq \frac{1}{p(p-1)}\|F^\times\|_{L^p(\mathbf{R})}^{(2-p)/2}\|F\|_{L^p(K)}^{p/2}\\ &\quad\leq \frac{1}{p(p-1)}\Big(\frac{p}{p-1}\|F\|_{L^p(K)}\Big)^{(2-p)/2}\|F\|_{L^p(K)}^{p/2} = \frac{1}{p(p-1)}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{(2-p)/2}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

が得られる. □

3.1.4 $2<p<\infty$ の場合の証明

命題 3.7. 次の等式が成り立つ:

$$M_t = \hat{E}_{\mu\otimes\delta_\beta}\left[F(X_\tau)-\alpha\int_0^\tau Q_{W_s}^{(\alpha,1/2)}F(X_s)\,ds\,\middle|\,\hat{\mathscr{F}}_t\right]\quad \hat{P}_{\mu\times\delta_\beta}\text{-a.s.}$$

証明. (3.6) と補題 3.4 より $\langle M,M\rangle_\infty := \lim_{t\to\infty}\langle M,M\rangle_t$ に対して

$$\begin{aligned}\hat{E}_{\mu\otimes\delta_\beta}[\langle M,M\rangle_\infty] &= 2\hat{E}_{\mu\otimes\delta_\beta}\left[\int_0^\tau |g_{\alpha,F}(X_s,W_s)|^2ds\right] = 2\int_B\int_0^\infty(\beta\wedge b)|g_{\alpha,F}(\cdot,b)|^2\,d\mu db\\ &\leq 2\int_B\int_0^\infty b|g_{\alpha,F}(\cdot,b)|^2\,d\mu db = 2\int_B |G_{\alpha,F}|^2\,d\mu = 2\|G_{\alpha,F}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\end{aligned}$$

が得られ, M が一様可積分なマルチンゲールであることが分かる. よって $M_\infty := \lim_{t\to\infty}M_t$ が存在し, $u(x,\beta)=Q_\beta^{(\alpha,1/2)}F(x)$ と $W_\tau=0$ に注意すれば (3.5) より

$$\begin{aligned}M_\infty &= \lim_{t\to\infty}\left[u(X_{t\wedge\tau},W_{t\wedge\tau})-\alpha\int_0^\tau u(X_s,W_s)\,ds\right]\\ &= Q_{W_\tau}^{(\alpha,1/2)}F(X_\tau)-\alpha\int_0^{t\wedge\tau}Q_{W_s}^{(\alpha,1/2)}F(X_s)\,ds = F(X_\tau)-\alpha\int_0^\tau Q_{W_s}^{(\alpha,1/2)}F(X_s)\,ds\end{aligned}$$

が成り立つ. □

定義 3.8. $H^{\rightarrow}_{\alpha,F}, H^{\uparrow}_{\alpha,F}, H_{\alpha,F} : B \to \mathbf{R}$ を

$$
\begin{aligned}
H^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g^{\rightarrow}_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{1/2}, \quad x \in B, \\
H^{\uparrow}_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g^{\uparrow}_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{1/2}, \quad x \in B, \\
H_{\alpha,F}(x) &:= \left(\int_0^\infty t \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{1/2}, \quad x \in B,
\end{aligned}
$$

とおく.

命題 3.9. $2 \le p < \infty$ ならば α と p に依存する定数 $C_{\alpha,p} > 0$ が存在し, すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$
\|H_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C_{\alpha,p} \|F\|_{L^p(K)}
$$

が成り立つ.

証明. 補題 3.5 と条件付き期待値に関する Jensen の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\int_B \left(\int_0^\infty (\beta \wedge t) \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{p/2} \mu(dx) \\
&\qquad = \int_B \left(\hat{E}_{\mu\times\delta_\beta} \left[\int_0^\tau (g_{\alpha,F}(X_s,W_s))^2\, ds \,\middle|\, X_\tau = x \right] \right)^{p/2} \mu(dx) \\
&\qquad \le \int_B \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta} \left[\left(\int_0^\tau (g_{\alpha,F}(X_s,W_s))^2\, ds \right)^{p/2} \,\middle|\, X_\tau = x \right] \mu(dx) \\
&\qquad = \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta} \left[\left(\int_0^\tau (g_{\alpha,F}(X_s,W_s))^2\, ds \right)^{p/2} \right] \\
&\qquad = \hat{E}_{\mu\times\delta_\beta} \left[\left(\int_0^\tau \Big[\alpha |u(X_s,W_s)|^2 (g_{\alpha,F}(X_s,W_s))^2 \Big]\, ds \right)^{p/2} \right] \\
&\qquad \lesssim \|F\|_{L^p(K)}^p
\end{aligned}
$$

が得られる. これより

$$
\begin{aligned}
\|H_{\alpha,F}\|_{L^p(\mathbf{R})}^p &= \int_B \left(\int_0^\infty t \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{p/2} \mu(dx) \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \int_B \left(\int_0^\infty (\beta \wedge t) \Big[Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}(\cdot,t))^2 \Big](x)\, dt \right)^{p/2} \mu(dx) \lesssim \|F\|_{L^p(K)}^p
\end{aligned}
$$

が従う. □

命題 3.10. $1 < p < \infty$ のとき, すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$
\begin{aligned}
G^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x) &\le 2 H^{\rightarrow}_{\alpha,F}(x), \quad x \in B, \\
G^{\uparrow}_{\alpha,F}(x) &\le 2 H^{\uparrow}_{\alpha,F}(x), \quad x \in B,
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|Q_t^{(\alpha,1/2)}F(x)\|_K^2 &= \left\| \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s F(x)\, \lambda_t^{1/2}(ds) \right\|_K^2 \\
&\le \int_0^\infty e^{-\alpha s} \|T_s F(x)\|_K^2\, \lambda_t^{(1/2)}(ds) \le \int_0^\infty \|T_s F(x)\|_K^2\, \lambda_t^{(1/2)}(ds) = Q_t^{(0,1/2)}\big[\|F\|_K^2\big](x)
\end{aligned}
$$

となる. $\{Q_t^{(\alpha,1/2)}\}_{t>0}$ が半群であることより

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} Q_a^{(\alpha,1/2)} F(x)\bigg|_{a=t+s} &= \frac{\partial}{\partial s} Q_{t+s}^{(\alpha,1/2)} F(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}[Q_t^{(\alpha,1/2)} Q_s^{(\alpha,1/2)}] F(x) = Q_t^{(\alpha,1/2)} \frac{\partial}{\partial s} Q_s^{(\alpha,1/2)} F(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. また命題 2.28 より

$$
\begin{aligned}
DQ_a^{(\alpha,1/2)} F(x)\big|_{a=t+s} &= Q_{t+s}^{(\alpha+1,1/2)} DF(x) \\
&= Q_t^{(\alpha+1,1/2)} Q_s^{(\alpha+1,1/2)} DF(x) = Q_t^{(\alpha+1,1/2)} DQ_s^{(\alpha,1/2)} F(x)
\end{aligned}
$$

も成り立つ. したがって

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x,2t)^2 &= \left\| \frac{\partial}{\partial a} Q_a^{(\alpha,1/2)} F(x)\bigg|_{a=2t} \right\|_K^2 = \left\| Q_t^{(\alpha,1/2)} \frac{\partial}{\partial s} Q_t^{(\alpha,1/2)} F(x) \right\|_K^2 \\
&\le Q_t^{(0,1/2)} \left[\left\| \frac{\partial}{\partial s} Q_s^{(\alpha,1/2)} F(\cdot) \right\|_K^2 \right](x) = Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}^{\rightarrow}(\cdot,t))^2(x), \\
g_{\alpha,F}^{\uparrow}(x,2t)^2 &= \big\| DQ_a^{(\alpha,1/2)} F(x)\big|_{a=2t} \big\|_K^2 = \big\| Q_t^{(\alpha,1/2)} DQ_t^{(\alpha,1/2)} F(x) \big\|_K^2 \\
&\le Q_t^{(0,1/2)} \big[\big\| DQ_s^{(\alpha,1/2)} F(\cdot) \big\|_K^2 \big](x) = Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}^{\uparrow}(\cdot,t))^2(x)
\end{aligned}
$$

が得られ

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x)^2 &= \int_0^\infty t g_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x,t)^2\, dt = \int_0^\infty 2s (g_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x,2s))^2 2\, ds \\
&\le 4 \int_0^\infty s Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}^{\rightarrow}(\cdot,2s))^2(x)\, ds = 4H_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x)^2, \\
G_{\alpha,F}^{\uparrow}(x)^2 &= \int_0^\infty t g_{\alpha,F}^{\uparrow}(x,t)^2\, dt = \int_0^\infty 2s (g_{\alpha,F}^{\uparrow}(x,2s))^2 2\, ds \\
&\le 4 \int_0^\infty s Q_t^{(0,1/2)} (g_{\alpha,F}^{\uparrow}(\cdot,2s))^2(x)\, ds = 4H_{\alpha,F}^{\uparrow}(x)^2
\end{aligned}
$$

が従う. □

定理 3.1 の証明 ($2 < p < \infty$ の場合). 命題 3.10 より

$$
G_{\alpha,F}(x)^2 = G_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x)^2 + G_{\alpha,F}^{\uparrow}(x)^2 \le 4[H_{\alpha,F}^{\rightarrow}(x)^2 + H_{\alpha,F}^{\uparrow}(x)^2] = 4H_{\alpha,F}(x)^2
$$

となり, これと命題 3.9 より結論が従う. □

3.2　ノルムの定義

定義 3.11. $r \in \mathbf{R}$ に対して, 線形作用素 $(1-L)^{r/2} : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ を

$$(\alpha - L)^{r/2}F := \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)^{r/2}J_nF, \quad F \in \mathcal{P}(K),$$

と定める.

注意 3.12. $\alpha > 0, 0 < \beta \leq 1$ のとき $-(\alpha-L)^{\beta}$ は $L^p(K)$ 上の縮小半群 $\{Q_t^{(\alpha,\beta)}\}_{t\geq 0}$ の生成作用素である.

命題 3.13. $r < 0$ のとき

$$(\alpha-L)^{r/2} = \frac{1}{\Gamma(-r/2)}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}t^{-r/2-1}T_t\,dt$$

が成り立つ. ここで Γ はガンマ関数を表わす.

証明. $\mathcal{P}(K)$ 上で $\sum_{n=0}^{\infty} J_n$ が恒等写像であることと $T_tJ_n = e^{-nt}J_n$ に注意すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}t^{-r/2-1}T_t\,dt &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}t^{-r/2-1}T_t\sum_{n=0}^{\infty}J_n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+n)t}t^{-r/2-1}\,dt\right)J_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(-r/2)(\alpha+n)^{r/2}J_n = \Gamma(-r/2)(\alpha-L)^{r/2}\end{aligned}$$

が得られ, 主張が従う. □

命題 3.14. $r \leq 0$ のとき $(\alpha-L)^{r/2}$ は $L^p(K)$ から $L^p(K)$ への連続作用素である.

証明. $r=0$ のときの主張の成立は明らかなので $r<0$ のときを示す. $F \in \mathcal{P}(K)$ とする. 命題 3.13 により

$$\begin{aligned}\|(\alpha-L)^{-r/2}F\|_{L^p(K)} &\leq \frac{1}{\Gamma(-r/2)}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}t^{-r/2-1}\|T_tF\|_{L^p(K)}\,dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(-r/2)}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}t^{-r/2-1}\|F\|_{L^p(K)}\,dt \leq \alpha^{r/2}\|F\|_{L^p(K)}\end{aligned}$$

となる. これより主張が示された. □

命題 3.15. $(\alpha-L)^{r/2}$ は $\mathcal{P}(K)$ から $\mathcal{P}(K)$ への全単射である.

証明. 命題 2.31 より $\mathcal{P}(K)$ 上で

$$(\alpha-L)^{r/2}(\alpha-L)^{-r/2} = (\alpha-L)^{-r/2}(\alpha-L)^{r/2} = 1$$

が成り立つ. これより $(\alpha-L)^{r/2}$ の逆写像が $(\alpha-L)^{-r/2}$ であることが従い, 全単射であることも分かる. □

命題 3.16. $(\mathcal{P}(K), \|(\alpha-L)^{r/2}\cdot\|_{L^p(K)})$ はノルム空間である.

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ が $\|(\alpha-L)^{r/2}F\|_{L^p(K)} = 0$ を満たすなら, $(\alpha-L)^{r/2}F = 0$ となる. さらに, 命題 3.15 より $F=0$ となる. その他のノルムの条件は明らかである. □

命題 3.17. $(\mathcal{P}(K), \sum_{m=0}^{n}\|D^m\cdot\|_{L^p(K)})$ はノルム空間である.

証明. 明らか. □

3.3 同値性の証明

命題 3.18. $\alpha \geq 0, 1 < p < \infty, n \in \mathbf{N}$ とする. α, p, n に依存する定数 $c, C > 0$ が存在し, すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して, $\alpha > 0$ ならば

$$c\|D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} \leq \|(\alpha - L)^{n/2} F\|_{L^p(K)} \leq C \sum_{m=0}^{n} \|D^m F\|_{L^p(\mathscr{L}^m_{(2)}(H;K))} \tag{3.9}$$

が成り立つ. $\alpha = 0$ ならば

$$c\|D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} \leq \|(-L)^{n/2} F\|_{L^p(K)} \leq C \sum_{m=1}^{n} \|D^m F\|_{L^p(\mathscr{L}^m_{(2)}(H;K))} \tag{3.10}$$

が成り立つ.

証明. はじめに $\alpha \geq 0$ に対して

$$\|D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} \lesssim \|(\alpha - L)^{n/2} F\|_{L^p(K)} \tag{3.11}$$

となること, つまり (3.9) と (3.10) の左辺が成立することを帰納法を用いて示す.

$\mathcal{P}(K)$ 上で $Q_t^{(\alpha+1,1/2)} = e^{-(\alpha+1-L)^{1/2}t}$ なる表現をもつので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} Q_t^{(\alpha+1,1/2)} DF &= e^{-(\alpha+1-L)^{1/2}t}(-(\alpha+1-L)^{1/2})DF \\
&= De^{-(\alpha-L)^{1/2}t}(-(\alpha-L)^{1/2})F = -DQ_t^{(\alpha,1/2)}(\alpha-L)^{1/2}F
\end{aligned}$$

が分かる. これより $g^{\uparrow}_{\alpha+1,DF} = g^{\rightarrow}_{\alpha,(\alpha-L)^{1/2}F}$, さらに $G^{\uparrow}_{\alpha+1,DF} = G^{\rightarrow}_{\alpha,(\alpha-L)^{1/2}F}$ が従う. よって $n = 1$ のとき $\alpha + 1 > 0$ なので, 定理 3.1 より

$$\begin{aligned}
\|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} &\leq C_{\alpha+1,p} \|G^{\uparrow}_{\alpha+1,DF}\|_{L^p(\mathbf{R})} \\
&= C_{\alpha+1,p} \|G^{\rightarrow}_{\alpha,(\alpha-L)^{1/2}F}\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq C_{\alpha+1,p} C_{\alpha,p} \|(\alpha-L)^{1/2}F\|_{L^p(\mathbf{R})}
\end{aligned}$$

が得られる. $(1 - J_0)\sqrt{-L}F = \sqrt{-L}F$ に注意すれば $\alpha = 0$ のときの成立も分かる. よって $n = 1$ のとき (3.11) が成立することが分かる. n までの成立を仮定すれば

$$\begin{aligned}
\|D^{n+1}F\|_{L^p(\mathscr{L}^{n+1}_{(2)}(H;K))} &= \|DD^nF\|_{L^p(\mathscr{L}^{n+1}_{(2)}(H;K))} \\
&\lesssim \|(\alpha+n-L)^{1/2}D^nF\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} \lesssim \|D^n(\alpha-L)^{1/2}F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} \\
&\lesssim \|(\alpha-L)^{n/2}(\alpha-L)^{1/2}F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} = \|(\alpha-L)^{(n+1)/2}F\|_{L^p(K)}
\end{aligned}$$

が得られ, $n+1$ のときも (3.11) が成り立つことが分かる.

$\alpha > 0$ として (3.9) の右辺の成立を帰納法を用いて示す. q を p の共役指数とする. $n = 1$ のとき $F, G \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\int_B ((\alpha-L)^{1/2}F, G)_K \, d\mu\right| &= \left|\int_B ((\alpha-L)F, (\alpha-L)^{-1/2}G)_K \, d\mu\right| \\
&\leq \alpha \left|\int_B (F, (\alpha-L)^{-1/2}G)_K \, d\mu\right| + \left|\int_B (-LF, (\alpha-L)^{-1/2}G)_K \, d\mu\right| \\
&\leq \alpha \left|\int_B (F, (\alpha-L)^{-1/2}G)_K \, d\mu\right| + \left|\int_B (DF, D(\alpha-L)^{-1/2}G)_K \, d\mu\right| \\
&\leq \alpha \|F\|_{L^p(K)} \|(\alpha-L)^{-1/2}G\|_{L^q(K)} \\
&\quad + \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} \|D(\alpha-L)^{-1/2}G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}
\end{aligned}$$

となる. (3.11) より

$$\|D(\alpha-L)^{-1/2}G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} \lesssim \|(\alpha-L)^{1/2}(\alpha-L)^{-1/2}G\|_{L^q(K)} = \|G\|_{L^q(K)}$$

なので $(\alpha-L)^{-1/2}$ が有界であることに注意すれば

$$\left|\int_B ((\alpha-L)^{1/2}F, G)_K \, d\mu\right| \lesssim (\|F\|_{L^p(K)} + \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))})\|G\|_{L^q(K)}$$

が得られるので, $n=1$ のときに (3.9) の右辺が成り立つことが分かる. n までの成立を仮定すれば

$$\begin{aligned}
\|(\alpha-L)^{(n+1)/2}F\|_{L^p(K)} &= \|(\alpha-L)^{1/2}(\alpha-L)^{n/2}F\|_{L^p(K)} \\
&\lesssim \|(\alpha-L)^{n/2}F\|_{L^p(K)} + \|D(\alpha-L)^{n/2}F\|_{L^p(K)} \\
&= \|(\alpha-L)^{n/2}F\|_{L^p(K)} + \|(\alpha+1-L)^{n/2}DF\|_{L^p(K)} \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{n} \|D^m F\|_{L^p(\mathscr{L}^m_{(2)}(H;K))} + \sum_{m=0}^{n} \|D^m DF\|_{L^p(\mathscr{L}^{m+1}_{(2)}(H;K))} \\
&\lesssim \sum_{m=0}^{n+1} \|D^m F\|_{L^p(\mathscr{L}^m_{(2)}(H;K))}
\end{aligned}$$

となり, $n+1$ のときも (3.9) の右辺が成り立つことが分かる.

$\alpha=0$ として (3.10) の右辺の成立を帰納法を用いて示す. q を p の共役指数とする. $n=1$ のとき $F, G \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\int_B ((-L)^{1/2}F, G)_K \, d\mu\right| &= \left|\int_B ((-L)^{1/2}F, (1-J_0)G)_K \, d\mu\right| \\
&= \left|\int_B ((-L)^{1/2}F, (-L)^{1/2}R^{(0,1/2)}G)_K \, d\mu\right| = \left|\int_B (-LF, R^{(0,1/2)}G)_K \, d\mu\right| \\
&= \left|\int_B (DF, DR^{(0,1/2)}G)_K \, d\mu\right| \le \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|DR^{(0,1/2)}G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}
\end{aligned}$$

となる. (3.11) より

$$\begin{aligned}
\left|\int_B ((-L)^{1/2}F, G)_K \, d\mu\right| &\lesssim \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|(-L)^{1/2}R^{(0,1/2)}G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} \\
&= \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|(1-J_0)G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))} \le \|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|G\|_{L^q(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}
\end{aligned}$$

が得られ, $n=1$ のときに (3.10) の右辺が成り立つことが分かる. n までの成立を仮定すれば

$$\begin{aligned}
\|(-L)^{(n+1)/2}F\|_{L^p(K)} &= \|(-L)^{1/2}(-L)^{n/2}F\|_{L^p(K)} \\
&\lesssim \|D(-L)^{n/2}F\|_{L^p(\mathscr{L}^2_{(2)}(H;K))} = \|(1-L)^{n/2}DF\|_{L^p(\mathscr{L}^2_{(2)}(H;K))}
\end{aligned}$$

となる. (3.9) の右辺より

$$\|(-L)^{(n+1)/2}F\|_{L^p(K)} \lesssim \sum_{m=0}^{n} \|D^m DF\|_{L^p(\mathscr{L}^{m+1}_{(2)}(H;K))} = \sum_{m=1}^{n+1} \|D^m F\|_{L^p(\mathscr{L}^m_{(2)}(H;K))}$$

となり, $n+1$ のときも (3.10) の右辺が成り立つことが分かる. □

命題 3.19. $1 < p < \infty, n \in \mathbf{N}$ とする. p, n に依存する定数 $C > 0$ が存在し, すべての $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\|D^n F\|_{L^p(K)} \leq C\Big[\|F\|_{L^p(K)} + \|D^{n+1}F\|_{L^p(\mathscr{L}^{n+1}_{(2)}(H;K))}\Big] \tag{3.12}$$

が成り立つ.

証明. $J_0 D^n = D^n J_n$ と $1 - J_0 = R^{(0,1/2)}(-L)^{1/2}$ より

$$\begin{aligned}\|D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} &\leq \|J_0 D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} + \|(1-J_0)D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\\ &\leq \|D^n J_n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} + \|R^{(0,1/2)}(-L)^{1/2}D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\end{aligned}$$

となる. (3.10) と $R^{(0,1/2)}$ の連続性より

$$\begin{aligned}\|D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} &\lesssim \|(-L)^{n/2}J_n F\|_{L^p(K)} + \|(-L)^{1/2}D^n F\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\\ &\lesssim \|J_n F\|_{L^p(K)} + \|D^{n+1}F\|_{L^p(\mathscr{L}^{n+1}_{(2)}(H;K))}\end{aligned}$$

が得られる. 最後の変形では $(-L)^{n/2}J_n = n^{n/2}J_n$ と (3.10) を用いた. これと $\|J_0 F\|_{L^p(K)} \lesssim \|F\|_{L^p(K)}$ より (3.12) が分かる. □

定理 3.20. $1 < p < \infty, n \in \mathbf{N}, \alpha > 0$ とする. $\mathcal{P}(K)$ 上のノルム

$$\|(\alpha - L)^{n/2} \cdot \|_{L^p(K)}, \qquad \sum_{m=0}^{n} \|D^m \cdot \|_{L^p(\mathscr{L}^m_F(2)(H;K))},$$

$$\|\cdot\|_{L^p(K)} + \|D^n \cdot \|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}$$

は互いに同値である.

証明. (3.9) と (3.12) より直ちに従う. □

第4章　抽象Wiener空間上のSobolev空間

この章を通して, (B, H, μ) を抽象 Wiener 空間, K を可分 Hilbert 空間とする. $1 < p < \infty$ に対して $L^p(K) = L^p(B, \mu; K)$ で Borel 可測関数 $F : B \to K$ で p 乗可積分なものの全体を表わす. また特に断らなければ $r \in \mathbf{R}$ とする.

4.1　Sobolev 空間の定義

定義 4.1 (Sobolev 空間). $r \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$ とする. ノルム空間 $(\mathcal{P}(K), \|(1-L)^{r/2} \cdot \|_{L^p(B,\mu;K)})$ の完備化によって得られた Banach 空間を **Sobolev 空間**とよび, $(W^{r,p}(B, \mu; K)), \| \cdot \|_{W^{r,p}(K)})$ で表わす. とくに混乱の恐れがないときは $W^{r,p}(B, \mu; K)$ を $W^{r,p}(K)$ と書くことにする.

命題 4.2 ([15, Proposition 4.9]). $r \leq s, 1 < p \leq q < \infty$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&W^{s,q}(K) \subset W^{r,p}(K), \\
&\|F\|_{W^{r,p}(K)} \leq \|F\|_{W^{s,q}(K)}, \quad F \in W^{s,q}(K),
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{W^{r,p}(K)} &= \|(1-L)^{r/2}F\|_{L^p(K)} = \|(1-L)^{-(s-r)/2}(1-L)^{s/2}F\|_{L^p(K)} \\
&\leq \|(1-L)^{s/2}F\|_{L^p(K)} \leq \|(1-L)^{s/2}F\|_{L^q(K)} = \|F\|_{W^{s,q}(K)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

命題 4.3. $\mathcal{P}(K)$ から $\mathcal{P}(K)$ への作用素 $(1-L)^{r/2}$ は $W^{r,p}(K)$ から $L^p(K)$ への等距離同型写像へ拡張できる.

証明. $(W^{r,p}(K), \| \cdot \|_{W^{r,p}K)})$ が $(\mathcal{P}(K), \|(1-L)^{r/2} \cdot \|_{L^p(K)})$ の完備化であるから, 1 対 1 の線形写像 $\kappa : \mathcal{P}(K) \to W^{r,p}(K)$ で $\kappa(\mathcal{P}(K))$ が $W^{r,p}(K)$ の中で稠密かつ

$$\|(1-L)^{r/2}f\|_{L^p(K)} = \|\kappa(f)\|_{W^{r,p}(K)}, \quad f \in \mathcal{P}(K),$$

を満たすものが存在する. $F \in \kappa(\mathcal{P}(K))$ に対して $\kappa(f) = F$ となる $f \in \mathcal{P}(K)$ が唯一つ存在するので, $T : W^{r,p}(K) \to L^p(K)$ を

$$T(F) = (1-L)^{r/2}f$$

によって定める. すると

$$\|T(F)\|_{L^p(K)} = \|(1-L)^{r/2}f\|_{L^p(K)} = \|\kappa(f)\|_{W^{r,p}(K)} = \|F\|_{W^{r,p}(K)}$$

となる. これより T は $\kappa(\mathcal{P}(K))$ を定義域とする等長連続線形作用素であることが分かる. $\kappa(\mathcal{P}(K))$ は $W^{r,p}(K)$ の中で稠密なので T は等長性を保ったまま $W^{r,p}(K)$ 上に一意的に拡張出来る. □

命題 4.4 ([15, Proposition 4.11]). $1/p + 1/q = 1$ とする．$W^{-r,q}(K)$ は $W^{r,p}(K)$ の共役空間 $W^{r,p}(K)^*$ と等距離同型である．この同型を与える写像を $\iota : W^{-r,q}(K) \to W^{r,p}(K)$ と表わせば，$r > 0$ のとき $F \in L^q(K) \subset W^{-r,q}(K)$ と $G \in W^{r,p}(K) \subset L^p(K)$ に対して

$$ {}_{W^{r,p}(K)^*}\langle \iota F, G \rangle_{W^{r,p}(K)} = \int_B (F, G)_K \, d\mu $$

が成り立つ．

証明. 命題 4.3 より

$$ A_1 := (1 - L)^{r/2} : W^{r,p}(K) \to L^p(K), $$
$$ A_2 := (1 - L)^{-r/2} : W^{-r,q} \to L^q(K) $$

は共に等距離同型写像である．$L^q(K) \cong L^p(K)^*$ の等距離同型に注意して

$$ \iota : W^{-r,q}(K) \xrightarrow{A_2} L^q(K) \xrightarrow{\cong} L^p(K)^* \xrightarrow{A_1^*} W^{r,p}(K)^* $$

と置けば，これが $W^{-r,q}(K)$ と $W^{r,p}(K)^*$ の等距離同型を与える写像である．

$r > 0$ のとき $F \in L^q(K) \subset W^{-r,q}(K)$ と $G \in W^{r,p}(K) \subset L^p(K)$ に対して

$$ \begin{aligned} {}_{W^{r,p}(K)^*}\langle \iota F, G \rangle_{W^{r,p}(K)} &= {}_{W^{r,p}(K)^*}\langle A_1^*(A_2 F)^*, G \rangle_{W^{r,p}(K)} \\ &= {}_{L^p(K)^*}\langle (A_2 F)^*, A_1 G \rangle_{L^p(K)} = \int_B ((1 - L)^{-r/2} F, (1 - L)^{r/2} G)_K \, d\mu \\ &= \int_B ((1 - L)^{r/2} (1 - L)^{-r/2} F, G)_K \, d\mu = \int_B (F, G)_K \, d\mu \end{aligned} $$

が成り立つ． □

定義 4.5. $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$ W^{n,\infty-}(\mathbf{R}) := \bigcap_{1<p<\infty} W^{n,p}(\mathbf{R}), $$
$$ \mathcal{W}(K) := \bigcap_{r\in\mathbf{R}} \bigcap_{1<p<\infty} W^{r,p}(K), $$
$$ \mathcal{W}^*(K) := \bigcup_{r\in\mathbf{R}} \bigcup_{1<p<\infty} W^{r,p}(K) $$

とおく．$\mathcal{W}^*(K)$ の元を**一般 Wiener 汎関数**という．命題 4.2 より上の定義は意味を持ち，命題 4.4 より $\mathcal{W}(K)$ の共役空間は $\mathcal{W}^*(K)$ となる．

4.2　Malliavin 微分作用素とその共役作用素

命題 4.6 ([15, Proposition 4.13]). Malliavin 微分作用素 $D : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H; K))$ は $W^{r+1,p}(K)$ から $W^{r,p}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H; K))$ への連続作用素として一意的に拡張できる．

証明. 命題 2.35 より $\varphi(\xi) := (\xi/(1+\xi))^{r/2}, \xi \in (-1,1)$, に対して $\varphi(-L) : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ は $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ に関して連続である. さらに (2.22) と (2.23) より, $\mathcal{P}(K)$ 上で

$$D(1-L)^{r/2}\varphi(-L) = D(-L)^{r/2} = (1-L)^{r/2}D$$

が成り立つ. これらと (3.9) より $F \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\begin{aligned}\|DF\|_{W^{r,p}(K)} &= \|(1-L)^{r/2}DF\|_{L^p(K)} = \|D(1-L)^{r/2}\varphi(-L)F\|_{L^p(K)} \\ &\lesssim \|(1-L)^{1/2}(1-L)^{r/2}\varphi(-L)F\|_{L^p(K)} = \|\varphi(-L)(1-L)^{(r+1)/2}F\|_{L^p(K)} \\ &\lesssim \|(1-L)^{(r+1)/2}F\|_{L^p(K)} = \|F\|_{W^{r+1,p}(K)}\end{aligned}$$

が成り立ち, 結論が得られる. □

定義 4.7. $1/p + 1/q = 1$ とする. $D : W^{r+1,p}(K) \to W^{r,p}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ の共役作用素を D^* で表わす. $D^* : W^{-r,q}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)) \to W^{-(r+1),q}(K)$ は連続作用素である.

命題 4.8 ([15, Proposition 4.16])**.** $F \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ に対して

$$D^*F(x) = -\operatorname{tr} DF(x) + F(x)[x], \quad x \in B, \tag{4.1}$$

が成り立つ. さらに $f \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ に対して

$$D^*[fF](x) = -(Df(x), F(x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} + f(x)D^*F(x), \quad x \in B, \tag{4.2}$$

が成り立つ. $[x]$ の定義は証明中で述べる.

証明. (4.1) について. D^* は D の共役作用素なので, (4.1) はすべての $G \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\int_B (-\operatorname{tr} DF(x) + F(x)[x], G(x))_K \,\mu(dx) = \int_B (F(x), DG(x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} \,\mu(dx)$$

が成り立つこと同値である.

$F \in \mathcal{P}(\mathbf{R}), h \in H, \kappa \in K$ とすれば $Fh \otimes \kappa \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ であり, $\mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ の元はこの形の元の線形結合で表わされる. $\mathcal{P}(K)$ の元も $G\kappa' \in \mathcal{P}(\mathbf{R}), \kappa' \in K$, の形の元の線形結合で表わせるので, $F, G \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_B (-\operatorname{tr} D[Fh\otimes\kappa](x) + [Fh\otimes\kappa](x)[x], [G\kappa'](x))_K \,\mu(dx) \\ &\qquad = \int_B ([Fh\otimes\kappa](x), D[G\kappa](x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} \,\mu(dx)\end{aligned}$$

が成立することを示せば (4.1) が得られる.

m 変数多項式 f, g と H^* の正規直交系 $\{\ell_j\}_{j=1}^m \subset B^*$ を用いて

$$\begin{aligned}F(x) &= f(\ell(x)) = f(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_m, x\rangle), \\ G(x) &= g(\ell(x)) = g(\langle \ell_1, x\rangle, \ldots, \langle \ell_m, x\rangle)\end{aligned}$$

と表わせば

$$
\begin{aligned}
([Fh\otimes\kappa](x), D[G\kappa](x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} &= \Big(f(\ell(x))h\otimes\kappa, \sum_{j=1}^m \partial_j g(\ell(x))(\iota^*\ell_j)\otimes\kappa'\Big)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} \\
&= \sum_{j=1}^m f(\ell(x))\partial_j g(\ell(x))(h\otimes\kappa, (\iota^*\ell_j)\otimes\kappa')_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} \\
&= \sum_{j=1}^m f(\ell(x))\partial_j g(\ell(x))(h, \iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K
\end{aligned}
$$

となる. これより $p(\xi) = (2\pi)^{-m/2}\exp(-|\xi|^2/2), \xi = (\xi^1,\ldots,\xi^m) \in \mathbf{R}^m$, とおけば

$$
\begin{aligned}
\int_B ([Fh\otimes\kappa](x), D[G\kappa](x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}\,\mu(dx) &= \sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K \int_B f(\ell(x))\partial_j g(\ell(x))\,\mu(dx) \\
&= \sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K \int_{\mathbf{R}^m} f(\xi)\partial_j g(\xi)p(\xi)d\xi \\
&= -\sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K \int_{\mathbf{R}^m} g(\xi)\partial_j(fp)(\xi)d\xi \\
&= -\sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K \int_{\mathbf{R}^m} \partial_j f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi \\
&\quad + \sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H(\kappa,\kappa')_K \int_{\mathbf{R}^m} \xi^j f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

となる. $\{\iota^*\ell_j\}_{j=1}^m$ を拡張した H^* の完全正規直交系 $\{\iota^*\ell_k\}_{k=1}^\infty$ に対して $D[fh\otimes\kappa](x)[\iota^*\ell_k,\iota^*\ell_k]$ $= DF(x)[\iota^*\ell_k](h,\iota^*\ell_k)_H\kappa$ なので

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr} D[Fh\otimes\kappa](x) &= \sum_{k=1}^\infty DF(x)[\iota^*\ell_k](h,\iota^*\ell_k)_H\kappa \\
&= \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^m \partial_j f(\ell(x))(\iota^*\ell_j,\iota^*\ell_k)_H(h,\iota^*\ell_k)_H\kappa \\
&= \sum_{j=1}^m \partial_j f(\ell(x))(h,\iota^*\ell_j)_H\kappa
\end{aligned}
$$

となる. さらに $[x] := \sum_{j=1}^m \langle \ell_j, x\rangle \iota^*\ell_j$ とおけば

$$
[Fh\otimes\kappa](x)[x] = F(x)\Big(\sum_{j=1}^m (h,\iota^*\ell_j)_H\langle\ell_j,x\rangle\Big)\kappa
$$

となる. よって

$$
\begin{aligned}
&\int_B ([Fh\otimes\kappa](x), D[G\kappa](x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}\,\mu(dx) \\
&\qquad = \int_B (-\operatorname{tr} D[Fh\otimes\kappa](x) + [Fh\otimes\kappa](x)[x], [G\kappa'](x))_K\,\mu(dx)
\end{aligned}
$$

が得られ, (4.1) が分かる.

(4.2) について. $f \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ とすれば $fF \in \mathcal{P}(K)$ であり $D[fF] = Df \otimes F + fDF$ となるので

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} D[fF](x) &= \sum_{k=1}^{\infty} Df(x)[\iota^*\ell_k]F(x)[\iota^*\ell_k] + f(x)\sum_{k=1}^{\infty} DF(x)[\iota^*\ell_k, \iota^*\ell_k] \\ &= (Df(x), F(x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} + f(x)\operatorname{tr} DF(x)\end{aligned}$$

となる. また $[fF](x)[x] = f(x)F(x)[x]$ である. よって (4.1) より $x \in B$ に対して

$$\begin{aligned}D^*[fF](x) &= -\operatorname{tr} D[fF](x) + [fF](x)[x] \\ &= -(Df(x), F(x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} - f(x)\operatorname{tr} DF(x) + f(x)F(x)[x] \\ &= -(Df(x), F(x))_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} + f(x)D^*F(x)\end{aligned}$$

が得られ, (4.2) が分かる. □

命題 4.9. $\mathcal{P}(K)$ 上で $L = -D^*D$ が成り立つ.

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ を $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$ と正規直交系 $\{\kappa_j\}_{j=1}^m$ を用いて $F = \sum_{j=1}^m F_j\kappa_j$ と表わす. このとき $DF = \sum_{j=1}^m DF_j \otimes \kappa_j \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))$ なので $x \in B$ に対して

$$\begin{aligned}D^*DF(x) &= \sum_{j=1}^m D^*(DF_j \otimes \kappa_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (-\operatorname{tr} D(DF_j \otimes \kappa_j) + (DF_j \otimes \kappa_j)(x)[x]) \\ &= -\sum_{j=1}^m \operatorname{tr} D^2(F \otimes \kappa_j) + \sum_{j=1}^m D(F_j \otimes \kappa_j)(x)[x] \\ &= -\operatorname{tr} D^2F(x) + DF(x)[x] \\ &= -LF(x)\end{aligned}$$

となる. 最後の変形は (2.10) から従う. □

補題 4.10. $1 \le p, q, r < \infty$ は $1/p + 1/q = 1/r$ を満たすとし, $F \in L^p(K)$ とする. 任意に $h \in H$ を固定するごとに, すべての $s \in \mathbf{R}$ に対して

$$\|F(\cdot + sh)\|^r_{L^r(K)} \le \|F(\cdot)\|^r_{L^p(K)} \exp\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{q}{r} - 1\Big)s^2\|h\|_H^2\Big)$$

が成り立つ.

証明. Camerom-Martin の定理 (定理 1.6) より

$$\begin{aligned}\|F(\cdot + sh)\|^r_{L^r(K)} &= \int_B \|F(x + sh)\|_K^r\,\mu(dx) \\ &= \int_B \|F(x)\|_K^r \exp\Big(-\frac{1}{2}s^2\|h\|_H^2 + sI_1(\hat{h})(x)\Big)\,\mu(dx) \\ &\le \|F(\cdot)\|_{L^{p/r}(K)} \Big\|\exp\Big(-\frac{1}{2}s^2\|h\|_H^2 + sI_1(\hat{h})(\cdot)\Big)\Big\|_{L^{q/r}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる．ここで H と H^* を Riesz の表現定理で同一視したときに $h \in H$ に対応する H^* の元を $\hat{h} \in H^*$ と表わし, $I_1(\hat{h})$ は 1 次 Wiener 積分を表わす．そして

$$\Big\| \exp\Big(-\frac{1}{2}s^2\|h\|_H^2 + sI_1(\hat{h})(\cdot)\Big)\Big\|_{L^{q/r}(\mathbf{R})}^{q/r} = \exp\Big(-\frac{q}{2r}s^2\|h\|_H^2\Big)\int_B \exp\Big(\frac{qs}{r}I_1(\hat{h})(x)\Big)\,\mu(dx)$$
$$= \exp\Big(-\frac{q}{2r}s^2\|h\|_H^2\Big)\exp\Big(\frac{q^2}{2r^2}s^2\|h\|_H^2\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{q}{r}\Big(\frac{q}{r}-1\Big)s^2\|h\|_H^2\Big)$$

なので

$$\|F(\cdot + sh)\|_{L^r(K)}^r \le \|F(\cdot)\|_{L^p(K)}^r \exp\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{q}{r}-1\Big)s^2\|h\|_H^2\Big)$$

が得られる． □

命題 4.11 ([11, Lemma 2.1.4])**.** $F \in W^{1,p}(K)$ とする．任意に $h \in H$ と $s \in \mathbf{R}$ を固定するごとに

$$F(x+sh) - F(x) = \int_0^s DF(x+uh)[h]\,du \quad \mu\text{-a.s.} \tag{4.3}$$

が成り立つ．

証明. $F \in \mathcal{P}(K)$ ならば, すべての $x \in B$ に対して

$$\frac{d}{ds}F(x+sh) = DF(x+sh)[h]$$

が成り立つ．さらに $s \mapsto DF(x+s(\iota h))[h]$ は連続であるから (4.3) は確率 0 の曖昧さなしに成り立つ．一般の $F \in W^{1,p}(K)$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \|F_j - F\|_{W^{1,p}(K)} = 0$$

なる $\{F_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{P}(K)$ が存在する．$F_j \in \mathcal{P}(K)$ は (4.3) を満たすことに注意すれば

$$\begin{aligned}\Big\|F(\cdot+sh) - F(\cdot) - \int_0^s DF(\cdot+uh)[h]\,du\Big\|_{L^1(K)} &\\ \le \|F(\cdot+sh) - F_j(\cdot+sh)\|_{L^1(K)} + \|F(\cdot) - F_j(\cdot)\|_{L^1(K)} &\\ + \Big\|\int_0^s DF_j(\cdot+uh)[h]\,du - \int_0^s DF(\cdot+uh)[h]\,du\Big\|_{L^1(K)} &\end{aligned} \tag{4.4}$$

が得られる．補題 4.10 より $1/q + 1/q = 1$ なる $1 < q < \infty$ を用いて, 右辺の第 1 項は

$$(\text{第 1 項}) \le \|F(\cdot) - F_j(\cdot)\|_{L^p(K)} \exp\Big(\frac{1}{2}(q-1)s^2\|h\|_H^2\Big)$$

と評価できる．また右辺の第 3 項は

$$\begin{aligned}(\text{第 3 項}) &\le \int_0^{|s|} \|DF_j(x+uh)[h] - DF(x+uh)[h]\|_{L^1(K)}\,du\\ &\le \int_0^{|s|} \|DF_j(x+uh) - DF(x+uh)\|_{L^1(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|h\|_H\,du\\ &\le \|DF_j - DF\|_{L^1(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K))}\|h\|_H \int_0^{|s|} \exp\Big(\frac{1}{2}(q-1)u^2\|h\|_H^2\Big)\,du\end{aligned}$$

と評価できる．よって (4.4) において $j \to \infty$ とすれば結論が得られる． □

命題 4.12 ([16, Theorem 3.1])**.** $F \in W^{1,p}(K)$ とする. $h \in H$ を固定するごとに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{s\to 0} \mu\left(x \in B \,\middle|\, \left|\frac{F(x+sh)-F(x)}{s} - DF(x)[h]\right| > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つ. すなわち $s \to 0$ のとき $(F(\cdot+sh)-F(\cdot))/s$ は $DF(\cdot)[h]$ に確率収束する.

証明. $F \in W^{1,p}(K)$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \|F_j - F\|_{W^{1,p}(K)} = 0$$

なる $\{F_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{P}(K)$ が存在する. ここで $\{F\}_{j=1}^\infty$ と $\{DF_j\}_{j=1}^\infty$ はそれぞれ F と DF に L^p 収束しているので, 必要なら部分列をとることで, これらを概収束列としてよい. そして任意の $\varepsilon > 0$ 対して

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\|\frac{F(\cdot+sh)-F(\cdot)}{s} - DF(\cdot)[h]\right\|_K > 4\varepsilon\right) \\
&\quad \le \mu\left(\left\|\frac{F(\cdot+sh)-F_j(\cdot+sh)}{s}\right\|_K > \varepsilon\right) + \mu\left(\left\|\frac{F(\cdot)-F_j(\cdot)}{s}\right\|_K > \varepsilon\right) \\
&\qquad + \mu\left(\left\|\frac{F_j(\cdot+sh)-F_j(\cdot)}{s} - DF_j(\cdot)[h]\right\|_K > \varepsilon\right) + \mu(\|DF(\cdot)[h] - DF_j(\cdot)[h]\|_K > \varepsilon)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 4.10 と測度の単調性より, 右辺第 1,2 および 3 項は

$$\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &\le \mu(\|F(\cdot+sh)-F_j(\cdot+sh)\|_K > |s|\varepsilon) \\
&\le \mu(\|F(\cdot)-F_j(\cdot)\|_K > |s|\varepsilon)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}s^2\|h\|_H^2\right) \\
&\le \mu(\|F(\cdot)-F_j(\cdot)\|_K > 0)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}s^2\|h\|_H^2\right), \\
(\text{第 2 項}) &\le \mu(\|F(\cdot)-F_j(\cdot)\|_K > 0), \\
(\text{第 3 項}) &\le \mu(\|DF(\cdot)-DF_j(\cdot)\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}\|h\|_H > \varepsilon) \\
&\le \mu(\|DF(\cdot)-DF_j(\cdot)\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} > 0)
\end{aligned}$$

と評価ができる. これらと $s \to 0$ のとき $(F_j(\cdot+sh)-F_j(\cdot))/s - DF_j(\cdot)[h]$ が 0 に各点で収束することより

$$\begin{aligned}
&\limsup_{s\to 0} \mu\left(\left\|\frac{F(\cdot+sh)-F(\cdot)}{s} - DF(\cdot)[h]\right\|_K > 4\varepsilon\right) \\
&\qquad \le \mu(\|F(\cdot)-F_j(\cdot)\|_K > 0)^{1/2} + \mu(\|F(\cdot)-F_j(\cdot)\|_K > 0) \\
&\qquad\quad + \mu(\|DF(\cdot)-DF_j(\cdot)\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} > 0)
\end{aligned}$$

が得られる. 最後に $\{F\}_{j=1}^\infty$ と $\{DF_j\}_{j=1}^\infty$ はそれぞれ F と DF に概収束しているので, $j \to \infty$ とすれば結論が得られる. □

命題 4.13 ([11, Proposition 1.2.5][14, Proposition 2.2])**.** $F \in W^{1,p}(K)$ が $DF = 0$ μ-a.s. を満たせば $F = \int_B F\, d\mu$ μ-a.s. である.

証明. 命題4.11 より, すべての $h \in H$ に対して $F(\cdot+(\iota h)) = F(\cdot)$ μ-a.s. が分かり, Cameron-Martin の定理 (定理 1.6) より

$$\begin{aligned} C &:= \int_B F(x)\,\mu(dx) = \int_B F(x+\iota h)\,\mu(dx) \\ &= \int_B F(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\|h\|_H^2 + I_1(\hat{h})(x)\right)\mu(dx) = e^{-\|h\|_H^2/2}\int_B F(x)e^{I_1(\hat{h})(x)}\,\mu(dx) \end{aligned}$$

が成り立つ. これと $I_1(\hat{h})$ の Laplace 変換 $\int_B e^{I_1(\hat{h})(x)}\,\mu(dx)$ が $e^{\|h\|_H^2/2}$ に一致することより

$$\int_B (F(x)-C)e^{I_1(\hat{h})(x)}\,\mu(dx) = Ce^{\|h\|_H^2/2} - C\int_B e^{I_1(\hat{h})(x)}\,\mu(dx) = 0$$

が得られ, 命題 1.7 より主張が従う. □

命題 4.14 ([11, Proposition 1.3.16])**.** $F \in W^{1,p}(K)$ が B の Borel 集合 A 上で $F=0$ μ-a.s. ならば, A 上で $DF = 0$ μ-a.s. である.

4.3 Sobolev 空間の特徴付け

この節を通して $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, $1 < p,q,r < \infty$ とする.

命題 4.15 ([15, Lemma 4.20])**.** $r \in \mathbf{R}$, $1/p+1/q=1$, $F \in \mathcal{W}^*(K)$ とする. $C>0$ が存在し, すべての $f \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$|{}_{\mathcal{W}^*(K)}\langle F, f\rangle_{\mathcal{W}(K)}| \le C\|f\|_{W^{-r,q}(K)}$$

が成立すれば $F \in W^{r,p}(K)$ となる.

証明. 仮定より $\mathcal{P}(K) \ni f \mapsto {}_{\mathcal{W}^*(K)}\langle F, f\rangle_{\mathcal{W}(K)} \in \mathbf{R}$ は $W^{-r,q}(K)$ から $\mathbf{R}$ への連続作用素として拡張できる. つまり ${}_{\mathcal{W}^*(K)}\langle F, \cdot\rangle_{\mathcal{W}(K)} \in W^{-r,q}(K)^*$ となる. 命題 4.4 より $G \in W^{r,p}(K)$ が存在して, すべての $f \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$${}_{\mathcal{W}^*(K)}\langle F, f\rangle_{\mathcal{W}(K)} = {}_{W^{r,p}(K)}\langle G, f\rangle_{W^{-r,q}(K)}$$

が成立する. これより $F = G \in W^{r,p}(K)$ が得られる. □

命題 4.16 ([15, Proposition 4.21])**.** $F \in L^p(K)$ とする. $\tilde{F} \in L^p(\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K))$ が存在し, すべての $G \in \mathcal{P}(\mathscr{L}_{(2)}^n(H,K))$ に対して

$$\int_B (\tilde{F}, G)_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}\,d\mu = \int_B (F, (D^*)^n G)_K\,d\mu$$

が成立すれば, $F \in W^{n,p}(K)$ かつ $\tilde{F} = D^n F$ μ-a.s. となる.

証明. すべての $m \in \mathbf{N}$ に対して $\mathcal{P}(K)$ 上で

$$(D^*)^m(DR^{(0,1)})^m = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} J_k \tag{4.5}$$

となることを帰納法を用いて示す. ここで $R^{(0,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}J_k$ である (命題 2.33). $m = 1$ のとき命題 4.9 より $D^*D = -L = \sum_{k=1}^{\infty} kJ_k$ なので

$$D^*DR^{(0,1)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} kJ_k\Big)(1 - J_0) = 1 - J_0$$

が得られる. m のときを仮定すれば

$$\begin{aligned}(D^*)^{m+1}(DR^{(0,1)})^{m+1} &= D^*(D^*)^m(DR^{(0,1)})^m DR^{(0,1)} = D^*\Big(1 - \sum_{k=0}^{m} J_k\Big)DR^{(0,1)} \\ &= D^*DR^{(0,1)}\Big(1 - \sum_{k=0}^{m} J_k\Big) = (1 - J_0)\Big(1 - \sum_{k=0}^{m} J_k\Big) = 1 - \sum_{k=0}^{m} J_k\end{aligned}$$

となり $m+1$ のときも成立するので, (4.5) が示された.

q を p の共役指数とすれば, 任意の $f \in \mathcal{P}(K)$ に対して

$$\begin{aligned}\Big|{}_{\mathcal{W}^*(K)}\Big\langle f, \Big(1 - \sum_{k=0}^{n} J_k\Big)F\Big\rangle_{\mathcal{W}(K)}\Big| &= \Big|{}_{\mathcal{W}^*(K)}\Big\langle \Big(1 - \sum_{k=0}^{n} J_k\Big)f, F\Big\rangle_{\mathcal{W}(K)}\Big| \\ &= \big|{}_{\mathcal{W}^*(K)}\langle (D^*)^n(DR^{(0,1)})^n f, F\rangle_{\mathcal{W}(K)}\big| \\ &= \big|{}_{L^q(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\langle (DR^{(0,1)})^n f, \tilde{F}\rangle_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\big| \\ &\le \|(DR^{(0,1)})^n f\|_{L^q(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\|\tilde{F}\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))} \\ &\lesssim \|f\|_{W^{-n,p}(K)}\|\tilde{F}\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;K))}\end{aligned}$$

が成り立つ. これと命題 4.15 より $(1 - \sum_{k=0}^{m} J_k)F \in W^{n,p}(K)$ となる. また $0 \le k \le n$ ならば $J_kF \in W^{n,p}(K)$ であり

$$F = \Big(1 - \sum_{k=0}^{n} J_k\Big)F + \sum_{k=0}^{n} J_kF$$

なので結論が得られる. □

命題 4.17 ([11, Exercise 1.2.13],[15, Proposition 4.18])**.** K_1, K_2 を可分 Hilbert 空間, $1/p+1/q = 1/r$ とする. $F \in W^{n,p}(K_1), G \in W^{n,q}(K_2)$ のとき $F \otimes G \in W^{n,r}(K_1 \otimes K_2)$ かつ

$$D^\nu(F \otimes G) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} D^kF \otimes D^{\nu-k}G, \quad 1 \le \nu \le n,$$

が成立する. さらに n と p, q のみに依存する正定数 C が存在し

$$\|F \otimes G\|_{W^{n,r}(K_1\otimes K_2)} \le C\|F\|_{W^{n,p}(K_1)}\|G\|_{W^{n,q}(K_2)}$$

が成立する.

証明. F, G が多項式の場合は直接的に証明する. 一般の F, G の場合は多項式で近似する. □

命題 4.18 ([15, Propositon 4.18])**.** $1/p + 1/q = 1/r$ とする. $F \in W^{n,p}(K), G \in W^{n,q}(K)$ のとき $(F, G)_K \in W^{n,r}(\mathbf{R})$ かつ

$$D^\nu(F, G)_K = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (D^kF, D^{\nu-k}G)_K, \quad 1 \le \nu \le n,$$

が成立する. さらに n と p, q のみに依存する正定数 C が存在し

$$\|(F,G)_K\|_{W^{n,r}(\mathbf{R})} \le C\|F\|_{W^{n,p}(K)}\|G\|_{W^{n,q}(K)}$$

が成立する.

証明. F, G が多項式の場合は直接的に証明する. 一般の F, G の場合は多項式で近似する. □

命題 4.19 ([11, Proposition 1.5.3]). $F \in L^p(K)$ に対して

$$\lim_{j\to\infty}\|F - F_j\|_{L^p(K)} = 0,$$
$$\sup_{j\in\mathbf{N}}\|F_j\|_{W^{n,p}(K)} < \infty$$

を満たす $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{n,p}(K)$ が存在すれば $F \in W^{n,p}(K)$ となる. さらに $1 \le \nu \le n$ に対して $\{D^\nu F_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $D^\nu F$ に $L^p(\mathscr{L}_{(2)}^{\nu}(H;K))$ 弱収束する.

証明. 必要なら部分列を取ることで $\{D^n F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K))$ を弱収束列としてよい. その極限を $\tilde{F}$ と書くことにすれば, 任意の $G \in \mathcal{P}(\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K))$ に対して

$$\begin{aligned}\int_B(\tilde{F}, G)_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}\,d\mu &= \lim_{j\to\infty}\int_B(D^nF_j, G)_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}\,d\mu\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_B(F_j, (D^*)^nG)_K\,d\mu = \int_B(F, (D^*)^nG)_K\,d\mu\end{aligned}$$

が成り立つ. よって命題 4.16 より $F \in W^{r,p}(K)$ が従う. また任意の弱収束する部分列は上の等式を満たすので $\{D^\nu F_j\}_{j=1\infty}$ は $D^\nu F$ へ弱収束する. □

命題 4.20. $\varphi \in C_{\mathrm{poly}}^n(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ とする. $K > 0$ と $k \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ をすべての $|\alpha| \le n$ なる多重指数 α に対して

$$|\partial^\alpha\varphi(\xi)| \le K(1+|\xi|^k), \quad \xi \in \mathbf{R}^d,$$

を満たすように取る. $F \in W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)$ ならば $\varphi\circ F \in W^{n,p}(\mathbf{R})$ かつ

$$\|\varphi\circ F\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})} \le CK\Big(1+\|F\|_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}^k\Big)\Big(1+\|F\|_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}^n\Big) \tag{4.6}$$

が成り立つ. ここで C は n と k, p のみに依存する正定数である.

証明. まず $F \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ の場合に証明する. 例 2.19 より多重指数 α によって決まる $DF, \dots, D^{n-|\alpha|+1}F$ の n 階のテンソル積の線形結合 $P_\alpha(DF, \dots, D^{n-|\alpha|+1}F)$ を用いて

$$D^n(\varphi\circ F) = \sum_{1\le|\alpha|\le n}(\partial^\alpha\varphi\circ F)P_\alpha(DF, \dots, D^{n-|\alpha|+1}F)$$

となる. ここですべての $|\alpha| \le n$ なる多重指数 α に対して $F \in W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)$ なので $\partial^\alpha\varphi\circ F \in L^{(n+k)p/k}(\mathbf{R})$ かつ

$$\begin{aligned}&\|\partial^\alpha\varphi\circ F\|_{L^{(n+k)p/k}(\mathbf{R})}\\ &\quad\le K\bigg(\int_B(1+|F|^k)^{(n+k)p/k}\,d\mu\bigg)^{k/(n+k)p} \le 2K\bigg(\int_B(1+|F|^{(n+k)p})\,d\mu\bigg)^{k/(n+k)p}\\ &\quad= 2K\Big(1+\|F\|_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}^{(n+k)p}\Big)^{k/(n+k)p} \le 4K\Big(1+\|F\|_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}^k\Big)\end{aligned}$$

が成り立ち, また命題 4.17 より $P_\alpha(DF,\dots,D^{n-|\alpha|+1}F)\in L^{(n+k)p/n}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ かつ

$$\|P_\alpha(DF,\dots,D^{n-|\alpha|+1}F)\|_{L^{(n+k)p/n}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\le C_\alpha\|F\|^n_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}$$

が成り立つ. ただし C_α は α と n,k,p のみに依存する定数である. そして $k/(n+k)p+n/(n+k)p=1/p$ より $D^n(\varphi\circ F)\in L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ かつ

$$\begin{aligned}\|D^n(\varphi\circ F)\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))}&\\ \le\sum_{1\le|\alpha|\le n}&\|\partial^\alpha\varphi\circ F\|_{L^{(n+k)p/k}(\mathbf{R})}\|P_\alpha(DF,\dots,D^{n-|\alpha|+1}F)\|_{L^{(n+k)p/n}(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\\ \le\sum_{1\le|\alpha|\le n}&4K\Big(1+\|F\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\Big)C_\alpha\|F\|^n_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\end{aligned}$$

が得られる. よって $C_n:=\sum_{1\le|\alpha|\le n}C_\alpha$ と置けば

$$\begin{aligned}\|\varphi\circ F\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})}&\le 4K\Big(1+\|F\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\Big)+4KC_n\Big(1+\|F\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\Big)\|F\|^n_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\\ &=4(1+C_n)K\Big(1+\|F\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\Big)\Big(1+\|F\|^n_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}\Big)\end{aligned}$$

となり, 結論が得られる. 一般の $F\in W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)$ の場合は $|\nabla\varphi(\xi)|\le dK(1+|\xi|^k)$ より, すべての $\xi,\eta\in\mathbf{R}^d$ に対して

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|\le 2^kdK(1+|\xi|^k+|\eta|^k)|\xi-\eta|$$

が成り立つので, を $\lim_{j\to\infty}\|F-F_j\|_{W^{n,(n+k)p}(\mathbf{R}^d)}=0$ なる $\{F_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ をとると

$$\begin{aligned}\|\varphi\circ F_j-\varphi\circ F\|_{L^p(\mathbf{R})}&\le 2^kdK\|(1+|F_j|^k+|F|^k)(F_j-F)\|_{L^p(\mathbf{R})}\\ &\le 2^kdK\|1+|F_j|^k+|F|^k\|_{L^{(n+k)p/k}(\mathbf{R})}\|F_j-F\|_{L^{(n+k)p/n}(\mathbf{R})}\\ &\le 2^kdK\Big(1+\|F_j\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R})}+\|F\|^k_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R})}\Big)\|F_j-F\|_{L^{(n+k)p}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. よって $\{\varphi\circ F_j\}_{j=1}^\infty$ は $\varphi\circ F$ に L^p 収束する. そして (4.6) より $\sup_{j\in\mathbf{N}}\|\varphi\circ F_j\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})}<\infty$ なので, 命題 4.19 より結論が従う. □

命題 4.21 ([11, Proposition 1.2.4]). $F\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ で $\varphi\in C^0(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ が Lipschitz 連続ならば $\varphi\circ F\in W^{1,p}(\mathbf{R})$ となる. さらに有界な $\mathbf{R}^d$ 値 Wiener 汎関数 $G=(G^1,\dots,G^d)$ が存在し

$$D(\varphi\circ F)=\sum_{k=1}^d G^kDF^k$$

となる.

証明. 台が $\{\xi\in\mathbf{R}^d\mid|\xi|\le1\}$ に含まれる非負値関数 $\alpha\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ で $\int_{\mathbf{R}^d}\alpha(\xi)d\xi=1$ を満たすものをとり, $\alpha_j(\xi):=j^d\alpha(j\xi)$, $\varphi_j:=\varphi*\alpha_j$ とおく. ただし $*$ は畳み込みを表わす. φ の Lipschitz 定数を L とすれば, $\xi,\eta\in\mathbf{R}^d$ に対して

$$|\varphi_j(\xi)-\varphi_j(\eta)|\le\int_{\mathbf{R}^d}|\varphi(\xi-\zeta)-\varphi(\eta-\zeta)|\alpha_j(\zeta)\,d\zeta\le\int_{\mathbf{R}^d}L|(\xi-\zeta)-(\eta-\zeta)|\alpha_j(\zeta)\,d\zeta\le L|\xi-\eta|$$

が成り立つ. これより $|\nabla\varphi_j| \le L$ が分かり $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ が従う. 命題 4.20 より $\varphi_j \circ F \subset W^{1,p}(\mathbf{R})$ かつ

$$D(\varphi_j \circ F) = \sum_{k=1}^d (\partial_k \varphi_j \circ F) DF^k$$

となる. φ は Lipschitz 連続なので $\varphi \circ F \in L^p(\mathbf{R})$ となり, $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ が φ に一様収束するので $\{\varphi_j \circ F\}_{j=1}^\infty$ は $\varphi \circ F$ に L^p 収束する. $\{\partial_1\varphi_j \circ F\}_{j=1}^\infty$ は有界なので必要なら部分列をとることで L^p 弱収束列としてよい. その極限を G^1 とする. 必要ならさらに部分列をとることで $\{\partial_2\varphi_j \circ F\}_{j=1}^\infty$ を L^p 弱収束列としてよい. その極限を G^2 とする. 帰納的に $\{\partial_k\varphi_j \circ F\}_{j=1}^\infty$ は L^p 弱収束列とし, その極限を G^k とする. このとき $f \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_B \left(\sum_{k=1}^d G^k DF^k, f \right)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} d\mu &= \lim_{j\to\infty} \int_B \left(\sum_{k=1}^d (\partial_k\varphi_j \circ F) DF^k, f \right)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})} d\mu \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_B (D(\varphi_j \circ F), f)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_B (\varphi_j \circ F)(D^* f)\, d\mu = \int_B (\varphi \circ F)(D^* f)\, d\mu
\end{aligned}$$

が成り立つので, 命題 4.16 より主張が従う. □

命題 4.22 ([7, Lemma 2.2][11, Exercise 1.3.4])**.** $1/p + 1/q = 1$ とする. $F \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ かつ $1/F \in L^q(\mathbf{R})$ ならば $\mu(F > 0)$ は 0 または 1 となる.

証明. $0 < \varepsilon < 1$ とする. $\varphi, \varphi_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$\varphi(\xi) := \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi < 0, \end{cases} \qquad \varphi_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} 1, & \xi > \varepsilon, \\ \xi/\varepsilon, & -\varepsilon \le \xi \le \varepsilon, \\ -1, & \xi < -\varepsilon, \end{cases}$$

と定義すれば, $|\varphi \circ F - \varphi_\varepsilon \circ F| \le 1_{\{|F| \le \varepsilon\}} 2\varepsilon/|F|$ と $1/F \in L^q(\mathbf{R})$ より

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \|\varphi \circ F - \varphi_\varepsilon \circ F\|_{L^q(\mathbf{R})} \le 2 \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}/F\|_{L^q(\mathbf{R})} = 0$$

が成り立つ. 命題 4.20 より $\{\varphi_\varepsilon \circ F\}_{0<\varepsilon<1} \subset W^{1,p}(\mathbf{R})$ かつ

$$D(\varphi_\varepsilon \circ F) = (\varphi'_\varepsilon \circ F) DF = \varepsilon^{-1} 1_{\{|F|\le\varepsilon\}} DF$$

となる. さらに

$$\begin{aligned}
\|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}\|_{L^q(\mathbf{R})} &= \left(\int_B 1_{\{|F|\le\varepsilon\}}\, d\mu \right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_B 1_{\{|F|\le\varepsilon\}} \left(\frac{\varepsilon}{|F|} \right)^q d\mu \right)^{1/q} = \varepsilon \|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}/F\|_{L^q(\mathbf{R})}
\end{aligned}$$

なので, $G \in \mathcal{S}_0(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ に対して $\|G\|_{L^\infty(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))} := \sup_{x\in B}\|G(x)\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}$ とおけば

$$\begin{aligned}\left|\int_B (\varphi_\varepsilon\circ F)D^*G\,d\mu\right| &= \left|\int_B (D(\varphi_\varepsilon\circ F),G)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}\,d\mu\right| \\ &= \left|\int_B \varepsilon^{-1}1_{\{|F|\le\varepsilon\}}(DF,G)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}\,d\mu\right| \\ &\le \varepsilon^{-1}\|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}\|_{L^q(\mathbf{R})}\|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\|G\|_{L^\infty(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\ &\le \varepsilon^{-1}\varepsilon\|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}/F\|_{L^q(\mathbf{R})}\|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\|G\|_{L^\infty(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\ &= \|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}/F\|_{L^q(\mathbf{R})}\|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\|G\|_{L^\infty(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\end{aligned}$$

が成り立つ. これより

$$\begin{aligned}\left|\int_B (\varphi\circ F)D^*G\,d\mu\right| &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left|\int_B (\varphi_\varepsilon\circ F)D^*G\,d\mu\right| \\ &\le \lim_{\varepsilon\to 0+}\|1_{\{|F|\le\varepsilon\}}/F\|_{L^q(\mathbf{R})}\|DF\|_{L^p(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\|G\|_{L^\infty(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\ &= 0\end{aligned}$$

が従い, 命題 4.16 より $\varphi\circ F\in W^{1,p}(\mathbf{R})$ かつ $DF=0$ μ-a.s. が分かる. 命題 4.13 より $\varphi\circ F$ は定数であるから $\mu(F>0)$ は 0 または 1 である. □

命題 4.23. $1<p,q,r<\infty$ は $1/p+1/q=1/r$ を満たす. $F\in W^{n,np}(\mathbf{R})$ かつ $1/F\in L^{(n+1)q}(\mathbf{R})$ ならば $1/F\in W^{n,r}(\mathbf{R})$ かつ

$$\begin{aligned}\|1/F\|_{W^{n,r}(\mathbf{R})} &\le C\Big(\|1/F\|_{L^r(\mathbf{R})}+\|F\|^n_{W^{n,np}(\mathbf{R})}\|1/F\|^{n+1}_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})}\Big) \\ &\le 2C\|F\|^n_{W^{n,np}(\mathbf{R})}\|1/F\|^{n+1}_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

となる. ここで C は n と p,q,r のみに依存する正定数である.

証明. 命題 4.22 より $\mu(F>0)=1$ を仮定してよい. $0<\varepsilon<1$ に対して $0\le\xi<\infty$ のとき

$$\varphi_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{\xi+\varepsilon}$$

となる $\varphi_\varepsilon\in C^n_b(\mathbf{R};\mathbf{R})$ をとる. 命題 4.20 より $\varphi_\varepsilon\circ F\in W^{n,p}(\mathbf{R})$ となる. そして高々n 次のテンソル積 $P_\nu(F,\ldots,D^nF)$ を用いて

$$D^n(\varphi_\varepsilon\circ F)=(F+\varepsilon)^{-(n+1)}\sum_{\nu=1}^n \varepsilon^{n-\nu}P_\nu(F,\ldots,D^nF)$$

となる. さらに $1/(F+\varepsilon)\le 1/F$ より $(F+\varepsilon)^{-(n+1)}\in L^q(\mathbf{R})$ かつ

$$\|(F+\varepsilon)^{-(n+1)}\|_{L^q(\mathbf{R})}\le\|1/F\|^{n+1}_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})}$$

となる. また $P_\nu(F,\ldots,D^nF)\in L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ かつ

$$\|P_\nu(F,\ldots,D^nF)\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\lesssim\|F\|^n_{W^{n,np}(\mathbf{R})}$$

となる. よって

$$
\begin{aligned}
&\|D^n(\varphi_\varepsilon \circ F)\|_{L^r(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\
&\qquad\qquad \lesssim \|(F+\varepsilon)^{-(n+1)}\|_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon^{n-\nu} \|P_\nu(F,\dots,D^nF)\|_{L^p(\mathscr{L}^n_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\
&\qquad\qquad \lesssim \|F\|^n_{W^{n,np}(\mathbf{R})} \|1/F\|^{n+1}_{L^q(\mathbf{R})}
\end{aligned}
$$

が得られる. また $1/F \in L^r(\mathbf{R})$ かつ

$$
\|1/F - \varphi_\varepsilon \circ F\|_{L^r(\mathbf{R})} \le \varepsilon \|1/F^2\|_{L^r(\mathbf{R})} \le \varepsilon \|1/F\|^2_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})}
$$

となる. 命題 4.19 より $1/F \in W^{n,r}(\mathbf{R})$ と初めの不等式が得られる. そして

$$
1 = \|F \cdot (1/F)\|_{L^r(\mathbf{R})} \le \|F\|_{L^p(\mathbf{R})} \|1/F\|_{L^q(\mathbf{R})} \le \|F\|_{W^{n,np}(\mathbf{R})} \|1/F\|_{L^{(n+1)q}(\mathbf{R})}
$$

なので 2 番目の不等式が得られる. □

命題 4.24. $1 < p, q_1, q_2, r < \infty$ は $1/p + 1/q_1 + 1/q_2 = 1/r$ を満たす. $F \in W^{n,p}(\mathbf{R})$ と $G \in W^{n,nq_1}(\mathbf{R})$ および $1/G \in L^{(n+1)q_2}(\mathbf{R})$ が成り立つならば $F/G \in W^{n,r}(\mathbf{R})$ かつ

$$
\|F/G\|_{W^{n,r}(\mathbf{R})} \le C \|F\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})} \|G\|^n_{W^{n,nq_1}(\mathbf{R})} \|1/G\|^{n+1}_{L^{(n+1)q_2}(\mathbf{R})}
$$

となる. ここで C は n と q_1, q_2, r のみに依存する正定数である.

証明. 命題 4.23 より $1/q := 1/q_1 + 1/q_2$ に対して $1/G \in W^{n,q}(\mathbf{R})$ となる. $1/q + 1/q = 1/r$ より $F/G \in W^{n,r}(\mathbf{R})$ が得られる. □

第5章　主定理

この章では [15] の Chapter 5 の拡張, [2] の精密化を行う. Wiener 汎関数の部分積分公式 (主定理 1) を証明し, それを用いて $\mathbf{R}^d$ 値 Wiener 汎関数 F の開集合 $A \subset \mathbf{R}^d$ 上で分布の Lebesgue 測度に関する絶対連続性とその分布密度の滑らかさを見る (主定理 2).

5.1　有限測度の絶対連続性と密度の滑らかさに関する補題

命題 5.1 ([5, Lemma 4.4][10, pp. 196-197])**.** ν を $\mathbf{R}^d$ 上の有限測度とする. 各 $1 \le j \le d$ に対して $C_j > 0$ が存在し

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} \partial_j \varphi \, d\nu \right| \le C_j \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}),$$

が成り立つならば, ν は $\mathbf{R}^d$ 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続となり, Lebesgue 測度に関する密度 $\rho \in L^{d/(d-1)}(\mathbf{R}^d, d\xi; \mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}^d, d\xi; \mathbf{R})$ をもつ. ただし $\|\cdot\|_\infty$ は一様ノルムを表わし, $d = 1$ のとき $L^{d/(d-1)}(\mathbf{R}^d, d\xi; \mathbf{R})$ は本質的に有界な関数全体を表わす.

命題 5.2. $V \subset \mathbf{R}^d$ を領域, ν を V 上の有限測度とする. 各 $1 \le j \le d$ に対して $C_j > 0$ が存在し

$$\left| \int_V \partial_j \varphi \, d\nu \right| \le C_j \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in C_0^\infty(V; \mathbf{R}),$$

が成り立つならば, ν は V 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続となり, Lebesgue 測度に関する密度 $\rho \in L^{d/(d-1)}_{\mathrm{loc}}(V, d\xi; \mathbf{R}) \cap L^1(V, d\xi; \mathbf{R})$ をもつ. ただし $d = 1$ のとき $L^{d/(d-1)}_{\mathrm{loc}}(V, d\xi; \mathbf{R})$ はすべての $\bar{W} \subset V$ なる有界開集合 W 上で本質的に有界な関数全体を表わす.

証明. $\bar{W} \subset V$ なる有界開集合 W に対して, $\theta_W \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ を

$$\theta_W(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \bar{W}, \\ 0, & \xi \in V^{\complement}, \end{cases}$$

を満たすようにとる. $\theta_W \nu$ は $\mathbf{R}^d$ 上の有限測度であり, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ に対して $\varphi\theta_W \in C_{0,V}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ なので

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_j \varphi) \theta_W \, d\nu \right| &= \left| \int_V (\partial_j(\varphi\theta_W) - \varphi \partial_j \theta_W) \, d\nu \right| \le \left| \int_V \partial_j(\varphi\theta_W) \, d\nu \right| + \left| \int_V \varphi \partial_j \theta_W \, d\nu \right| \\ &\le C_j \|\varphi\theta_W\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \|\partial_j \theta_W\|_\infty \nu(V) \le \left[C_j \|\theta_W\|_\infty + \|\partial_j \theta_W\|_\infty \nu(V) \right] \|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

が成り立つ. 命題 5.1 を用いると, $\theta_W \nu$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続であり, Lebesgue 測度に関する密度 $\rho_W \in L^{d/(d-1)}(\mathbf{R}^d, d\xi; \mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}^d, d\xi; \mathbf{R})$ が存在することが分かる. W は任意であったの

で ν は V 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続であり, Lebesgue 測度に関する密度 $\rho \in L^1(V, d\xi; \mathbf{R})$ が存在する. そして ρ は W 上で は ρ_W に一致するので $\rho \in L^{d/(d-1)}_{\mathrm{loc}}(V, d\xi; \mathbf{R}) \cap L^1(V, d\xi; \mathbf{R})$ となる. □

命題 5.3 (Sobolev の不等式 [3, Theorem10.1]). $q > d$, $V \subset \mathbf{R}^d$ を C^2 級の境界をもつ有界領域とする. $\rho \in L^q(V, d\xi; \mathbf{R})$ が弱微分可能で $\partial_j \rho \in L^q(V, d\xi; \mathbf{R})$ ならば $\rho \in C(\bar{V}; \mathbf{R})$ かつ

$$\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})} \le C\left(\sum_{j=1}^{d} \|\partial_j \rho\|^{d/q}_{L^q(V,d\xi;\mathbf{R}^d)}\right)\|\rho\|^{1-d/q}_{L^q(V,d\xi;\mathbf{R})}$$

が成り立つ. ここで $\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})} := \sup_{\xi\in\bar{V}} |\rho(\xi)|$ であり, C は V と d, q のみに依存する正定数である.

補題 5.4. $n \in \mathbf{N}$, $q > d$, $V \subset \mathbf{R}^d$ を C^2 級の境界をもつ有界領域とする. V 上の有限測度 ν はすべての $1 \le |\alpha| \le n$ なる多重指数 α に対して $g^\alpha \in L^q(V, \nu; \mathbf{R})$ が存在し

$$\int_V \partial^\alpha \varphi \, d\nu = \int_V \varphi g^\alpha \, d\nu, \quad \varphi \in C_0^\infty(V; \mathbf{R}), \tag{5.1}$$

が成り立つ. このとき ν は V 上で Lebesgue 測度に関して絶対連続であり, Lebsgue 測度に関する密度 $\rho \in C^{n-1}(\bar{V}; \mathbf{R})$ をもち

$$\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})} \le C\left(\sum_{\alpha^1=1}^{d} \|g^{(\alpha^1)}\|^{d}_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)\nu(V)^{1-d/q}$$

が成り立つ. ここで C は V と d, q のみに依存する正定数である.

証明. 命題 5.2 と

$$\left|\int_V \partial^{(j)} \varphi \, d\nu\right| \le \|g^{(j)}\|_{L^1(V,\nu;\mathbf{R})}\|\varphi\|_\infty$$

より ν は V 上で分布密度 $\rho \in L^1(V, d\xi; \mathbf{R})$ をもつ. そして (5.1) より

$$\int_V \partial^\alpha \varphi \rho \, d\xi = \int_V \partial^\alpha \varphi \, d\nu = \int_V \varphi g^\alpha \, d\nu = \int_V \varphi g^\alpha \rho \, d\xi$$

なので, 弱微分の意味で $\partial^\alpha \rho = (-1)^{|\alpha|} g^\alpha \rho$ が成り立つ. $\alpha = (\alpha^1)$, つまり $|\alpha| = 1$ のときを考えると, 合成関数の微分公式より $\partial^\alpha(\rho^{1/q}) = -(1/q) g^\alpha \rho^{1/q}$ となり, 可積分性に関して

$$\|\rho^{1/q}\|_{L^q(V,d\xi;\mathbf{R})} = \left(\int_V \rho \, d\xi\right)^{1/q} = \nu(V)^{1/q},$$
$$\|\partial^\alpha \rho^{1/q}\|_{L^q(V,d\xi;\mathbf{R})} = \frac{1}{q}\left(\int_V |g^\alpha|^q \rho \, d\xi\right)^{1/q} \le \|g^\alpha\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}$$

が成り立つ. 命題 5.3 より $\rho^{1/q} \in C(\bar{V}; \mathbf{R})$ かつ

$$\|\rho^{1/q}\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})} \le C\left(\sum_{\alpha^1=1}^{d} \|g^\alpha\|^{d/q}_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)\nu(V)^{(1-d/q)/q}$$

が得られる. ここで C は命題 5.3 で与えられる V と d, q のみに依存する正定数である. これより $\rho \in C(\bar{V}; \mathbf{R})$ かつ

$$\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})} \le C^q\left(\sum_{\alpha^1=1}^{d} \|g^\alpha\|^{d/q}_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)^q \nu(V)^{1-d/q} \le C^q d^q\left(\sum_{\alpha^1=1}^{d} \|g^\alpha\|^{d}_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)\nu(V)^{1-d/q}$$

が従う. つぎに $1 \leq |\alpha| \leq n$ のときを考えると, $\rho \in C(\bar{V};\mathbf{R})$ より

$$\|\partial^\alpha \rho\|_{L^q(V,d\xi;\mathbf{R})} = \left(\int_V |g^\alpha \rho|^q \, d\xi\right)^{1/q} \leq \|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})}^{(q-1)/q}\left(\int_V |g^\alpha|^q \rho \, d\xi\right)^{1/q} \leq \|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})}^{1-1/q}\|g^\alpha\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}$$

となる. $1 \leq |\alpha| \leq n-1$ とすれば, 命題 5.3 より $\partial^\alpha \rho \in C(\bar{V};\mathbf{R})$ かつ

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha \rho\|_{C(\bar{V}\rho;\mathbf{R})} &\leq C\left(\sum_{\beta^1=1}^{d}\left(\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})}^{1-1/q}\|g^{\alpha+(\beta^1)}\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)^{d/q}\right)\left(\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})}^{1-1/q}\|g^\alpha\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\right)^{1-d/q} \\ &\leq C\left(\sum_{\beta^1=1}^{d}\|g^{\alpha+(\beta^1)}\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}^{d/q}\right)\|g^\alpha\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}^{1-d/q}\|\rho\|_{C(\bar{V};\mathbf{R})}^{1-1/q}\end{aligned}$$

が得られる. ここで C は命題 5.3 で与えられる V と d, q のみに依存する正定数である. ゆえに $\rho \in C^{n-1}(\bar{V};\mathbf{R})$ が従う. □

5.2 局所非退化 Wiener 汎関数の部分積分公式と分布密度の滑らかさ

この節では主定理 1 と主定理 2 を示す. $n \in \mathbf{N}$, $1 < p, q, r < \infty$ とし p' で p の共役指数を表わす.

定義 5.5 (局所非退化)**.** $F \in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\mathbf{R}^d$ の開集合 A と $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_n$ なる $1 < q_1, \ldots, q_n < \infty$ および, すべての $1 \leq m \leq n$ に対して $U \in W^{m,q_m}(H^d)$ となる H^d 値 Wiener 汎関数 U が存在し

$$1_{\{F\in A\}}[(DF^j, U^k)_H - \delta_{jk}] = 0 \quad \mu\text{-a.s.} \tag{5.2}$$

を満たすならば, F を (A, n, q) **局所非退化**という. ただし δ_{jk} は $j = k$ のとき 1, $j \neq k$ のとき 0 をとる.

定理 5.6 (主定理 1)**.** $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$, $1/s := 1/q + 1/r$, $F \in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ は (A, n, q) 局所非退化とする. すべての $1 \leq |\alpha| \leq n$ なる多重指数 α と $G \in W^{n,r}(\mathbf{R})$ に対して $G^\alpha \in L^s(\mathbf{R})$ が存在し

$$\int_B (\partial^\alpha \varphi \circ F) G \, d\mu = \int_B (\varphi \circ F) G^\alpha \, d\mu, \quad \varphi \in C_{0,A}^n(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}),$$

が成り立つ. とくに形式的に $r = \infty$, $G = 1$ とした場合も $s := q$ としてこれらは成り立つ.

証明. $1 \leq m \leq n$ に対して $s_1 \geq s_m \geq s_n = s$ なる単調減少数列 $\{s_m\}_{m=1}^n$ を帰納的に

$$\frac{1}{s_m} := \begin{cases} \dfrac{1}{q_n} + \dfrac{1}{r}, & m = 1, \\[2mm] \dfrac{1}{q_{n-(m-1)}} + \dfrac{1}{s_{m-1}}, & 2 \leq m \leq n \end{cases} \tag{5.3}$$

と定義する. $G^\alpha \in W^{n-m,s_m}(\mathbf{R}) \subset L^s(\mathbf{R})$ に対して主張が成立することを $|\alpha| = m$ に関する帰納法を用いて示していく. $|\alpha| = m = 1$ のとき, $\alpha = (\alpha^1)$ として主張を示す. 命題 4.20 より $\varphi \circ F \in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ かつ $D(\varphi \circ F) = \sum_{j=1}^d (\partial_j \varphi \circ F) DF^j$ が成り立つ. $D(\varphi \circ F)$ と U^{α^1} の H に関

する内積を考え, $\partial_j\varphi\circ F=(\partial_j\varphi\circ F)1_{\{F\in A\}}$ に注意すると

$$\begin{aligned}(D(\varphi\circ F),U^{\alpha^1}G)_H&=\sum_{j=1}^d(\partial_j\varphi\circ F)(DF^j,U^{\alpha^1})_HG\\&=\sum_{j=1}^d(\partial_j\varphi\circ F)G\delta_{j\alpha^1}+\sum_{j=1}^d(\partial_j\varphi\circ F)G1_{\{F\in A\}}[(DF^j,U^{\alpha^1})_H-\delta_{j\alpha^1}]=(\partial_{\alpha^1}\varphi\circ F)G\end{aligned}$$

が分かる. $U^{\alpha^1}\in W^{n,q_n}(H)$ と $G\in W^{n,r}(\mathbf{R})$ および (5.3) より Hölder の不等式を用いることで $U^{\alpha^1}G\in W^{n,s_1}(H)$ が得られる. そして $1/p+1/s_1\le 1/p+1/s\le 1$ なので

$$\int_B(\partial^\alpha\varphi\circ F)G\,d\mu=\int_B(D(\varphi\circ F),U^{\alpha^1}G)_H\,d\mu=\int_B(\varphi\circ F)(D^*(U^{\alpha^1}G))\,d\mu$$

が成り立つ. これより $G^\alpha=D^*(U^{\alpha^1}G)\in W^{n-1,s_1}(\mathbf{R})\subset L^s(\mathbf{R})$ に対して主張が成立することが分かる. $2\le m\le n$ に対して $m-1$ のときを仮定し, m のときを示す. 多重指数 α,β はそれぞれ $|\alpha|=m-1$ と $|\beta|=1$ を満たす. とくに $\beta=(\beta^1)$ とする. $m-1$ のときの仮定より $G^\alpha\in W^{n-(m-1),s_{m-1}}(\mathbf{R})$ が存在し

$$\int_B(\partial^{\alpha+\beta}\varphi\circ F)G\,d\mu=\int_B(\partial^\alpha\partial^\beta\varphi\circ F)G\,d\mu=\int_B(\partial^\beta\varphi\circ F)G^\alpha\,d\mu$$

が成り立つ. そして $|\alpha|=1$ のときと同様にして $(\partial^\beta\varphi\circ F)G^\alpha=(D(\varphi\circ F),U^{\beta^1}G^\alpha)_H$ が得られる. $U^{\beta^1}\in W^{n-(m-1),q_{n-(m-1)}}$ と $G^\alpha\in W^{n-(m-1),s_{m-1}}(\mathbf{R})$ および (5.3) より $U^{\beta^1}G^\alpha\in W^{n-(m-1),s_{n-m}}(H)$ となるので, $1/p+1/s_m\le 1/p+1/s\le 1$ に注意すれば

$$\int_B(\partial^\beta\varphi\circ F)G^\alpha\,d\mu=\int_B(\varphi\circ F)(D^*(U^{\beta^1}G^\alpha))\,d\mu$$

となり, $G^{\alpha+\beta}:=D^*(U^{\beta^1}G^\alpha)\in W^{n-m,s_m}(\mathbf{R})\subset L^s(\mathbf{R})$ に対して主張が成り立つことが分かる. □

定理 5.7 (主定理 2)**.** $q>d,1/p+1/q\le 1$ とする. $F\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ が (A,n,q) 局所非退化ならば, F は A 上で分布密度 $\rho\in C^{n-1}(A;\mathbf{R})$ をもつ.

証明. C^2 級の境界をもつ有界領域 $V\subset A$ を固定する. 定理 5.6 より, $1\le|\alpha|\le n$ なる多重指数 α に対して $1^\alpha\in L^q(\mathbf{R})$ が存在し

$$\int_B(\partial^\alpha\varphi\circ F)1\,d\mu=\int_B(\varphi\circ F)1^\alpha\,d\mu,\quad\varphi\in C_{0,V}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}),$$

が成り立つ. $(1^\alpha\mu)\circ F^{-1}$ を ν^α と表わし, V 上の符号付き測度と見なす. $\nu^\emptyset=\nu$ に注意すれば, $\varphi\in C_0^\infty(V;\mathbf{R})$ に対して

$$\left|\int_V\varphi\,d\nu^\alpha\right|=\left|\int_B(\varphi\circ F)1^\alpha\,d\mu\right|\le\|\varphi\circ F\|_{L^{q'}(\mu)}\|1^\alpha\|_{L^q(\mu)}=\|1^\alpha\|_{L^q(\mu)}\|\varphi\|_{L^{q'}(V,\nu;\mathbf{R})}$$

が成り立つ. ここで $1/q'+1/q=1$ である. したがって $g^\alpha\in L^q(V,\nu;\mathbf{R})$ で $\nu^\alpha=g^\alpha\nu$ と $\|g^\alpha\|_{L^q(V,\nu;\mathbf{R})}\le\|1^\alpha\|_{L^q(\mu)}$ を満たすものが存在し

$$\int_V\partial^\alpha\varphi\,d\nu=\int_V\varphi g^\alpha\,d\nu,\quad\varphi\in C_0^\infty(V;\mathbf{R}),$$

となる. 補題 5.4 より ν は V 上で分布密度 $\rho_V\in C^{n-1}(\bar V;\mathbf{R})$ をもつ. したがって F は A 上で分布密度 ρ をもち, V 上では $\rho=\rho_V$ なので $\rho\in C^{n-1}(A;\mathbf{R})$ が得られる. □

5.3 局所非退化の十分条件と先行研究との比較

この節では Wiener 汎関数が局所非退化となる十分条件を与え, それを用いて Wiener 汎関数の分布密度の存在と滑らかさに関する先行研究と定理 5.7 との比較を行う.

5.3.1 局所非退化の十分条件

$1 < r_1, r_2, r_3 < \infty$ は $1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 = 1/q$ を満たすとし, $n \in \mathbf{N}$ に対して $M(n) = n(n+3)/2$ とおく. また H^d 値 Wiener 汎関数 $u = (u^1, \ldots, u^d)$ と $\mathbf{R}^{d^2}$ 値 Wiener 汎関数 $\gamma = (\gamma^{jk})_{1 \le j,k \le d}$ を固定し, $\Delta := \det \gamma$ とおく. $\Delta \neq 0$ のとき γ の逆行列 γ^{-1} の第 (j,k) 成分を $(\gamma^{-1})^{jk}$ と表わす. この設定の下で次の命題を示すことをこの小節の残りの目標とする.

命題 5.8. $F \in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ が (A, n, q) 局所非退化となるための十分条件は, $1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 = 1/q$ を満たす $1 < r_1, r_2, r_3 < \infty$, $u \in W^{n, nr_1}(H^d)$ を満たす H^d 値 Wiener 汎関数 $u = (u^1, \ldots, u^d)$, および $\gamma \in W^{n,(dM(n)-n)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})$ と $1/\Delta \in L^{M(n)r_3}(\mathbf{R})$ を満たす $\mathbf{R}^{d^2}$ 値 Wiener 汎関数 $\gamma = (\gamma^{jk})_{1 \le j,k \le d}$ が存在し, さらに

$$1_{\{F \in A\}}[(DF^j, u^k)_H - \gamma^{jk}] = 0 \quad \mu\text{-a.s.}$$

を満たすことである. さらに $d > q$, $1/p + 1/q \le 1$ ならば F は A 上で分布密度 $\rho \in C^{n-1}(A; \mathbf{R})$ をもつ.

命題 5.9. $\gamma \in W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})$ が $1/\Delta \in L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})$ を満たすならば, 逆行列 γ^{-1} が存在し, $1/r_4 := 1/r_2 + 1/r_3$ に対して第 (j,k) 成分が $(\gamma^{-1})^{jk} \in W^{m,r_4}(\mathbf{R})$ かつ

$$\|(\gamma^{-1})^{jk}\|_{W^{m,r_4}(\mathbf{R})} \le C \|\gamma\|^{d(m+1)-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})} \|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})}$$

となる. ここで C は m と r_2, r_3 および d に依存する正定数である.

証明. 行列式の定義と命題 4.18 より $\Delta \in W^{m,(d(m+1)-1)r_2/d}(\mathbf{R})$ かつ

$$\|\Delta\|_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2/d}(\mathbf{R})} \le d! \|\gamma\|^d_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})}$$

が直ちに分かり, 命題 4.23 より $1/r^\dagger := dm/(d(m+1)-1)r_2 + 1/r_3$ に対して $1/\Delta \in W^{m,r^\dagger}(\mathbf{R})$ かつ

$$\begin{aligned}\|1/\Delta\|_{W^{m,r^\dagger}(\mathbf{R})} &\le C_1 \|\Delta\|^m_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2/d}(\mathbf{R}^{d^2})} \|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})} \\ &\le C_1 (d!)^m \|\gamma\|^{dm}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})} \|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

が得られる. ここで C_1 は m と $r_2, r_3, r^\dagger$, つまり m と r_2, r_3, d のみに依存する正定数である. $d = 1$ のときは $\Delta_{11} = 1$ と約束し, $d > 1$ のときに γ の第 (j,k) 余因子を Δ_{jk} と表わせば, 行列式の定義と命題 4.18 より $\Delta_{jk} \in W^{m,(d(m+1)-1)r_2/(d-1)}(\mathbf{R})$ かつ

$$\|\Delta_{jk}\|_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2/(d-1)}(\mathbf{R})} \le (d-1)! \|\gamma\|^{d-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})}$$

となる. そして $(d-1)/(d(m+1)-1)r_2 + 1/r^\dagger = 1/r_4$ より $(\gamma^{-1})^{jk} = \Delta_{kj}/\Delta \in W^{m,r_4}(\mathbf{R})$ かつ

$$\begin{aligned}\|(\gamma^{-1})^{jk}\|_{W^{m,r_4}(\mathbf{R})} &\le \|\Delta_{kj}\|_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2/(d-1)}(\mathbf{R})} \|1/\Delta\|_{W^{m,r^\dagger}(\mathbf{R})} \\ &\le C_1 (d-1)! (d!)^m \|\gamma\|^{d(m+1)-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})} \|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

が得られる. □

命題 5.10. $u \in W^{m,r_1}(H^d)$ とし, $\gamma \in W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})$ は $1/\Delta \in L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})$ を満たすとする. このとき H^d 値 Wiener 汎関数 $U^k := \sum_{j=1}^d u^j(\gamma^{-1})^{jk}$ は $U \in W^{m,q}(H^d)$ かつ

$$\|U\|_{W^{m,q}(H^d)} \le C\|u\|_{W^{m,r_1}(H^d)}\|\gamma\|^{d(m+1)-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})}\|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})}$$

を満たす. ここで C は m, d, r_2, r_3 のみに依存する正定数である.

証明. 命題 5.9 より $(\gamma^{-1})^{jk} \in W^{m,r_4}(\mathbf{R})$ が分かり, $1/r_1 + 1/r_4 = 1/q$ に注意すれば $u^j(\gamma^{-1})^{jk} \in W^{m,q}(H)$ が従う. これより $U^k \in W^{m,q}(H)$ と

$$\begin{aligned}\|U^k\|_{W^{m,q}(H)} &\le \sum_{j=1}^d \|u^j(\gamma^{-1})^{jk}\|_{W^{m,q}(H)} \le \sum_{j=1}^d \|u^j\|_{W^{m,r_1}(H)}\|(\gamma^{-1})^{jk}\|_{W^{m,r_4}(H)} \\ &\le \sum_{j=1}^d \|u\|_{W^{m,r_1}(H^d)} C\|\gamma\|^{d(m+1)-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})}\|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})} \\ &\le Cd\|u\|_{W^{m,r_1}(H^d)}\|\gamma\|^{d(m+1)-1}_{W^{m,(d(m+1)-1)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})}\|1/\Delta\|^{m+1}_{L^{(m+1)r_3}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで C は命題 5.9 で与えられる m, d, r_2, r_3 のみに依存する正定数である. □

命題 5.8 の証明. 命題の仮定より, 任意の $1 \le m \le n$ に対して $u \in W^{m,nr_1}(H^d)$ と $\gamma \in W^{m,(d(m+1)-1)\cdot(dM(n)-n)r_2/(d(m+1)-1)}(\mathbf{R}^{d^2})$ および $1/\Delta \in L^{(m+1)\cdot M(n)r_3/(m+1)}(\mathbf{R})$ が成り立つ. $1 \le m \le n$ に対して

$$\frac{1}{q_m} := \frac{1}{nr_1} + \frac{d(m+1)-1}{(dM(n)-n)r_2} + \frac{m+1}{M(n)r_3}$$

とおけば, 命題 5.10 より $U^k := \sum_{j=1}^d u^j(\gamma^{-1})^{jk} \in W^{m,q_m}(H)$ となり, $U := (U^1, \ldots. U^d) \in W^{m,q_m}(H^d)$ が成り立つ. そして U が (5.2) を満たすことと $\sum_{m=1}^n 1/q_m = q$ は簡単な計算により分かる. したがって F は (A, n, q) 局所非退化である. □

5.3.2　先行研究との比較

これまでに Wiener 汎関数の分布密度の存在と滑らかさに関しては様々な考察が行われているが, 主だったものとしては次の二つの定理が知られている.

定理 5.11 (定理 2 [15, Theorem 5.9])**.** $p > d$ とする. $F = (F^1, \ldots, F^d) \in W^{n+1,4dM(n)p}(\mathbf{R}^d)$ の Malliavin 共分散行列 $\gamma := ((DF^j, DF^k)_H)_{1\le j,k\le d}$ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{2M(n)p}(\mathbf{R})$ を満たすならば F は $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度 $\rho \in C^{n-1}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ をもつ.

定理 5.12 (定理 3 [2, Theorem 2.1])**.** $F = (F^1, \ldots, F^d) \in W^{1,2}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\mathbf{R}^d$ の開集合 A と $u = (u^1, \ldots, u^d) \in W^{\infty,\infty-}(H^d)$, $\gamma = (\gamma^{jk})_{1\le j,k\le d} \in W^{\infty,\infty-}(\mathbf{R}^{d^2})$ が存在し

$$1_{\{F\in A\}}\big[(DF^j, u^k)_H - \gamma^{jk}\big] = 0 \quad \mu\text{-a.s.}$$

を満たし, さらに γ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{\infty-}(\mathbf{R})$ を満たすならば F は A 上で分布密度 $\rho \in C^\infty(A; \mathbf{R})$ をもつ.

この二つの定理が定理 5.7 の系として与えられることを示すことがこの小節の目標である.

命題 5.13. $1 < q, r, s < \infty$ は $1/r + 1/s \le 1/q$ を満たすとする. $F \in W^{n+1,(2dM(n)-n)r}(\mathbf{R}^d)$ の Malliavin 共分散行列 $\gamma := ((DF^j, DF^k)_H)_{1\le j,k\le d}$ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{M(n)s}(\mathbf{R})$ を満たすならば, F は $(\mathbf{R}^d, n, q)$ 局所非退化である. さらに $q > d$, $1/(2dM(n)-n)r + 1/q \le 1$ ならば, F は $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度 $\rho \in C^{n-1}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ をもつ.

証明. 命題 5.8 に帰着させる. $1 < r_1, r_2, r_3 < \infty$ を

$$r_1 := \frac{2dM(n)-n}{n} \cdot r, \qquad r_2 := \frac{2dM(n)-n}{2(dM(n)-n)} \cdot r, \qquad r_3 := s$$

とおくと, $1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 = 1/q$ が成り立つ. そして仮定より $u := (DF^1, \ldots, DF^d) \in W^{n,nr_1}(H^d)$, $\gamma \in W^{n,(dM(n)-n)r_2}(\mathbf{R}^{d^2})$ および $1/\Delta \in L^{M(n)r_3}(\mathbf{R})$ が成り立つ. さらに

$$1_{\{F\in\mathbf{R}^d\}}[(DF^j, u^k) - \gamma^{jk}] = 0 \quad \mu\text{-a.s.}$$

も成り立つ. ゆえに F は $(\mathbf{R}^d, n, q)$ 局所非退化である. □

注意 5.14. 定理 5.11 は命題 5.13 から次のようにして得られる. つまり, $F \in W^{n+1,4dM(n)p}(\mathbf{R}^d)$ かつ $1/\Delta \in L^{2M(n)p}(\mathbf{R})$ ならば, 命題 5.13 の q および r, s を

$$q := \frac{4dM(n)}{4dM(n)-n} \cdot p, \qquad r := \frac{4dM(n)}{2dM(n)-n} \cdot p, \qquad s := 2p$$

と取ることができ, F は $(\mathbf{R}^d, n, q)$ 局所非退化であることが分かる. さらに $p > d$ ならば $q > d$ であり, 命題 5.13 の p に対応するものは $4dM(n)p$ であり,

$$\frac{1}{4dM(n)p} + \frac{1}{q} = \frac{4dM(n)-(n-1)}{4dM(n)} \cdot \frac{1}{p} \le \frac{1}{p} < 1$$

を満たす. よって定理 5.11 は命題 5.13 の特別な場合であることが分かる.

また $F \in W^{n+1,(4dM(n)-(n-1))p}(\mathbf{R}^d)$ かつ $1/\Delta \in L^{(4dM(n)-(n-1))p/2d}(\mathbf{R})$ ならば, 命題 5.13 の q および r, s は

$$q := \frac{4dM(n)-(n-1)}{4dM(n)-n} \cdot p, \qquad r := \frac{4dM(n)-(n-1)}{2dM(n)-n} \cdot p, \qquad s := \frac{4dM(n)-(n-1)}{2dM(n)} \cdot p$$

と取ることができ, F が $(\mathbf{R}^d, n, q)$ 局所非退化となることが分かる. さらに $p > d$ ならば $q > d$ であり, 命題 5.13 の p に対応するものは $(4dM(n)-(n-1))p$ であり

$$\frac{1}{(4dM(n)-(n-1))p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \le 1$$

を満たす. 命題 5.13 より, F が $\mathbf{R}^d$ 上で分布密度 $\rho \in C^{n-1}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ をもつことが分かる.

命題 5.15. $F \in W^{1,2}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\mathbf{R}^d$ の開集合 A と $u = (u^1, \ldots, u^d) \in W^{\infty,\infty-}(H^d)$, $\gamma = (\gamma^{jk})_{1\le j,k\le d} \in W^{\infty,\infty-}(\mathbf{R}^{d^2})$ が存在し

$$1_{\{F\in A\}}\left[(DF^j, u^k)_H - \gamma^{jk}\right] = 0 \quad \mu\text{-a.s.} \tag{5.4}$$

を満たし, さらに γ の行列式 Δ が $1/\Delta \in L^{\infty-}(\mathbf{R})$ を満たすならば, F は $(A, \infty, \infty-)$ 局所非退化である. よって F は分布密度 $\rho \in C^\infty(A; \mathbf{R})$ をもつ.

証明. 命題の仮定が命題 5.8 の仮定を満たすことは明らかである. ゆえに F が $(A, \infty, \infty-)$ 局所非退化である. □

5.4　応用例

(B,H,μ) を $\mathbf{R}^N$ 値古典 Wiener 空間 (例 1.11) とし, $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ に対して

$$F(x):=\inf_{s\in[0,1]} f(x(s)),\quad x\in B,$$

とおく. 本修士論文の当初の目標は F が滑らかな分布密度をもつための f の条件を与えることであったが, 特定の f 以外では滑らかな分布密度の存在を示すことはできなかった. この節では F が分布密度をもつための f の条件を Bouleau-Hirsch の方法により与え, さらに定理 5.7 を用いて $N=1$ かつ $f(\xi)=\xi$ のときに F が C^∞ 級の分布密度をもつことを示す.

いくつか記号を用意する. $s\in[0,1]$ と $1\le j\le N$ に対して $\delta_s^j:B\to\mathbf{R}$ と $\delta_s:B\to\mathbf{R}^N$ を

$$\delta_s^j(x):=x^j(s),\quad x\in B,$$
$$\delta_s(x):=x(s),\quad x\in B,$$

とおく. このとき $\iota^*\delta_s^j$ は H の元と見なすことができ

$$\iota^*\delta_s^j=(0,\dots,0,\int_0^\cdot 1_{[0,s]}(u)\,du,0,\dots,0)$$

という第 j 成分以外 0 となる表現をもつ. この同一視の下で多重指数 $\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^k)$ に対して $\iota^*\delta_s^{\otimes\alpha}:H^k\to\mathbf{R}$ を

$$\iota^*\delta_s^{\otimes\alpha}[h_1,\dots,h_k]:=(\iota^*\delta_s^{\alpha^1},h_1)_H\cdots(\iota^*\delta_s^{\alpha^k},h_k)_H=h_1^{\alpha^1}(s)\cdots h_k^{\alpha^k}(s)$$

とおく.

5.4.1　分布密度が存在するための十分条件

一般の $\mathbf{R}^d$ 値 Wiener 汎関数が分布密度をもつ十分条件として Bouleau-Hirsch により次の定理が示されている.

定理 5.16 ([1], [11, Theorem 2.1.2, 2.1.3], [13])**.** $F\in W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$ とする. F の Malliavin 共分散行列 $\gamma=((DF^j,DF^k)_H)_{1\le j,k\le d}$ が確率 1 で非退化, つまり $\Delta=\det\gamma\ne 0$ μ-a.s. ならば F は分布密度をもつ.

この命題を用いて $N\ge 2$ のときに $F(x)=\inf_{s\in[0,1]}f(x(s)), x\in B,$ が分布密度をもつための f の十分条件を与えることがこの小節の目標である.

命題 5.17. $f\in C^n_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ ならば $f\circ\delta_s\in W^{n,\infty-}$ かつ $0\le\nu\le n$ に対して

$$D^\nu(f\circ\delta_s)=\sum_{|\alpha|=\nu}(\partial^\alpha f\circ\delta_s)(\iota^*\delta_s^{\otimes\alpha}), \tag{5.5}$$

$$\|D^\nu(f\circ\delta_s)\|_{L^p(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\le CN^\nu s^{\nu/2} \tag{5.6}$$

が成り立つ. ここで C は f と p に依存する正定数である.

証明. 定義に従って計算すると, $h_1,\ldots,h_\nu \in H$ に対して

$$\begin{aligned}D^\nu(f\circ\delta_s)(x)[h_1,\ldots,h_\nu] &= \frac{\partial^\nu}{\partial\varepsilon_1\ldots\partial\varepsilon_\nu} f(x(s)+\varepsilon_1 h_1(s)+\cdots+\varepsilon_\nu h_\nu(s))\Big|_{\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_\nu=0}\\ &= \sum_{|\alpha|=\nu}(\partial^\alpha f\circ\delta_s)(x)(\iota^*\delta_s^{\alpha^1},h_1)_H\cdots(\iota^*\delta_s^{\alpha^\nu},h_\nu)_H\\ &= \sum_{|\alpha|=\nu}(\partial^\alpha f\circ\delta_s)(x)(\iota^*\delta_s^{\otimes\alpha})[h_1,\ldots,h_\nu]\end{aligned}$$

となり (5.5) が得られる. $f\in C^n_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ なので $L>0$ と $l\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ が存在し, すべての $|\alpha|\le n$ なる多重指数 α に対して

$$|\partial^\alpha f(\xi)|\le L(1+|\xi|^l),\quad \xi\in\mathbf{R}^N,$$

が成り立つ. また $\|\iota^*\delta_s^{\alpha^j}\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}=\sqrt{s}$ と例 6.11 より

$$\|D^\nu(f\circ\delta_s)(x)\|_{\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R})}\le\sum_{|\alpha|=\nu}\left|\partial^\alpha f(x(s))\right|\left\|(\iota^*\delta_s)^{\otimes\alpha}\right\|_{\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R})}\le N^\nu s^{\nu/2}L(1+|x(s)|^l)$$

が得られる. よって $1<p<\infty$ に対して

$$\|D^\nu(f\circ\delta_s)\|^p_{L^p(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))}\le(N^\nu s^{\nu/2})^p\int_B L^p(1+\|x\|_B^l)^p\,\mu(dx)$$

となる. 系 1.9 と命題 4.15 より $f\circ\delta_s\in W^{n,p}(\mathbf{R})$ が分かる. また (5.6) も分かる. □

命題 5.18. $f\in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ ならば $F\in W^{1,\infty-}(\mathbf{R})$ となる. さらに $s\mapsto f(x(s))$ が最小値を取る時刻が μ-a.s. $x\in B$ に対して一意的に定まるならば, この時刻を $\sigma(x)$ と表わすことで

$$DF=G:=(\nabla f\circ\delta_\sigma)\int_0^\cdot 1_{[0,\sigma]}(u)\,du\quad \mu\text{-a.s.} \tag{5.7}$$

が成り立つ.

証明. この証明は [12, Theorem 1] を参考にしている. 任意に $1<p<\infty$ をとる. $[0,1]$ の稠密可算部分集合 $\{s_j\}_{j=1}^\infty$ と $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$F_n:=\inf_{1\le j\le n} f\circ\delta_{s_j}$$

とおき, $F_n=f\circ\delta_{s_j}$ となる $s_j\in\{s_1,\ldots,s_n\}$ のうち最小のものを σ_n とする. 命題 5.17 より $f\circ\delta_s\in W^{1,p}(\mathbf{R})$ であり, $(\xi^1,\ldots,\xi^n)\mapsto\inf_{1\le j\le n}\xi^j$ は Lipschitz 連続なので命題 4.21 より $F_n\in W^{1,p}(\mathbf{R})$ となる. $\{s_j\}_{j=1}^\infty$ の稠密性および $s\mapsto f\circ\delta_s$ の連続性を用いることで

$$\lim_{n\to\infty}F_n=\inf_{n\in\mathbf{N}}F_n=\inf_{n\in\mathbf{N}}f\circ\delta_{\sigma_n}=\inf_{j\in\mathbf{N}}f\circ\delta_{s_j}=\inf_{s\in[0,1]}f\circ\delta_s=F$$

が得られ, $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ が F に概収束することが分かる. そして $f\in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ なので $L>0$ と $l\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ が存在し $|f(\xi)|\le L(1+|\xi|^l)$ となるので $|f\circ\delta_s|\le L(1+|\delta_s|^l)\le L(1+\|\cdot\|_B^l)$ が得られる. これより

$$|F_n-F|\le 2|F|\le 2L(1+\|\cdot\|_B^l)$$

となり, $2L(1+\|\cdot\|_B^l) \in L^p(\mathbf{R})$ なので Lebesgue の収束定理を用いれば $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ は F に L^p 収束することが分かる. また $1 \le j \le n$ に対して

$$A_j^{(n)} := \begin{cases} \{F_n = f\circ\delta_{s_1}\}, & j=1, \\ \{F_n \neq f\circ\delta_{s_1}, \dots, F_n \neq f\circ\delta_{s_{j-1}}, F_n = f\circ\delta_{s_j}\}, & 2\le j\le n, \end{cases}$$

とおくと, 命題 4.14 より

$$\begin{aligned} DF_n &= \sum_{j=1}^n 1_{A_j^{(n)}} D(f\circ\delta_{s_j}) = \sum_{j=1}^n 1_{A_j^{(n)}} (\nabla f\circ\delta_{s_j}) \int_0^{\cdot} 1_{[0,s_j]}(u)\,du \\ &= \sum_{j=1}^n 1_{A_j^{(n)}} (\nabla f\circ\delta_{\sigma_n}) \int_0^{\cdot} 1_{[0,\sigma_n]}(u)\,du = (\nabla f\circ\delta_{\sigma_n}) \int_0^{\cdot} 1_{[0,\sigma_n]}(u)\,du \end{aligned}$$

が成立する. そして $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|DF_n\|_{L^p(H)} < \infty$ となることが $f \in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ より従う. ゆえに命題 4.19 より $F \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ が得られる.

以降, $s \mapsto f(x(s))$ が最小値を取る時刻が μ-a.s. $x \in B$ に対して一意的に定まるとして議論を進める. $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{DF_n\}_{n=1}^\infty$ がそれぞれ σ と G に概収束することを示す. 任意に $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ の収束する部分列 $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ をとり, その極限を τ とすれば

$$|f\circ\delta_\tau - f\circ\delta_\sigma| \le |f\circ\delta_\tau - f\circ\delta_{\tau_k}| + |f\circ\delta_{\tau_k} - f\circ\delta_\sigma|$$

となる. 最小値をとる時刻が一意に定まることより $\tau = \sigma$ が得られ, $\{\sigma_n\}$ が σ に概収束することが分かる. $s \mapsto (\nabla f\circ\delta_s)\int_0^{\cdot} 1_{[0,s]}(u)\,du$ の連続性と $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ が σ に概収束することより $\{DF_n\}_{n=1}^\infty$ が G に概収束することが分かる. よって $\{DF_n\}_{n=1}^\infty$ が G に L^p 収束することが分かり, これより任意の $f \in \mathcal{P}(\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R}))$ に対して

$$\begin{aligned} \int_B (G,f)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_B (DF_n,f)_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;\mathbf{R})}\,d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_B F_n(D^*f)\,d\mu = \int_B F(D^*f)\,d\mu \end{aligned}$$

が成り立つ. 命題 4.16 より (5.7) が得られる. □

補題 5.19. $f \in C^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ とする. F の $h \in H$ 方向への右微分を

$$D^+F(x)[h] := \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon}, \quad x \in B,$$

と定義する. このとき

$$D^+F(x)[h] = \inf_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s), \quad x\in B, \tag{5.8}$$

が成り立つ. ここで $I_F(x) := \{s\in[0,1] \mid f(x(s)) = F(x)\}$ である. 同様に左微分に対して

$$D^-F(x)[h] := \lim_{\varepsilon\to 0-} \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} = \sup_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s), \quad x\in B, \tag{5.9}$$

が成り立つ.

証明. $x \in B$ と $h \in H$ を固定し議論を進める. Taylor の公式より, $\varepsilon \in (0,1)$ と $s \in [0,1]$ に対して $\theta = \theta(s,\varepsilon)$ が存在し

$$f(x(s)+\varepsilon h(s)) = f(x(s)) + \varepsilon \nabla f(x(s)) \cdot h(s) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 h(s) \cdot \mathrm{Hess}_f(x(s)+\varepsilon\theta h(s))^t h(s)$$

となる. ここで ${}^t h(s)$ は $h(s)$ の転置を表わし, Hess_f は次で定義される Hesse 行列である:

$$\mathrm{Hess}_f(\xi) := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\xi) & \cdots & \partial_1\partial_N f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_N\partial_1 f(\xi) & \cdots & \partial_N\partial_N f(\xi) \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

ここで $R := \|x\|_B + \|h\|_H$ とおくと, 任意の $s \in [0,1]$ と $\theta \in (0,1)$ に対して

$$|\,\mathrm{Hess}_f(x(s)+\varepsilon\theta h(s))| \le \sup_{|\xi|\le R} |\,\mathrm{Hess}_f(\xi)| < \infty$$

が成り立つ. よって $M := (1/2)\|h\|_H^2 \sup_{|\xi|\le R}|\,\mathrm{Hess}_f(\xi)|$ とおけば, 任意の $s \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}(5.10)\qquad & f(x(s)) + \varepsilon\nabla f(x(s))\cdot h(s) - \varepsilon^2 M \\ &\qquad \le f(x(s)+\varepsilon h(s)) \le f(x(s)) + \varepsilon \nabla f(x(s))\cdot h(s) + \varepsilon^2 M\end{aligned}$$

となる. これより

$$\begin{aligned}(5.11)\qquad & F(x) + \varepsilon \inf_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s) - \varepsilon^2 M \\ &\qquad \le \inf_{s\in I_F(x)} f(x(s)+\varepsilon h(s)) \le F(x) + \inf_{s\in I_F(x)} \varepsilon\nabla f(x(s))\cdot h(s) + \varepsilon^2 M\end{aligned}$$

が得られる. そしてこの右辺より

$$F(x+\varepsilon h) \le \inf_{s\in I_F(x)} f(x(s)+\varepsilon h(s)) \le F(x) + \varepsilon \inf_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s) + \varepsilon^2 M$$

が成り立つので

$$(5.12)\qquad \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{F(x+\varepsilon h)-F(x)}{\varepsilon} := \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{0<u<\varepsilon} \frac{F(x+uh)-F(x)}{u} \le \inf_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)$$

が従う. 次は

$$(5.13)\qquad \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{F(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon} := \lim_{\varepsilon\to 0+} \inf_{0<u<\varepsilon} \frac{F(x+uh)-F(x)}{u} \ge \inf_{s\in I_F(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)$$

を示す. 任意の $\delta > 0$ に対して $I_F^\delta(x) := \{s \in [0,1] \mid F(x)+\delta \ge f(x(s))\}$ とおき, $\varepsilon_0 > 0$ を $2\varepsilon_0 \sup_{s\in[0,1]} |\nabla f(x(s))\cdot h(s)| < \delta$ を満たすように取る. このとき任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ と $t \in (I_F^\delta(x))^{\complement}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x(t)) + \varepsilon\nabla f(x(t))\cdot h(t) &\ge F(x) + \delta + \varepsilon \nabla f(x(t))\cdot h(t) \\ &> F(x) + 2\varepsilon_0 \sup_{s\in[0,1]} |\nabla f(x(s))\cdot h(s)| - \varepsilon \sup_{s\in[0,1]} |\nabla f(x(s))\cdot h(s)| \\ &\ge F(x) + \varepsilon_0 \sup_{s\in[0,1]} |\nabla f(x(s))\cdot h(s)| \\ &\ge F(x) + \varepsilon \sup_{s\in I_F^\delta(x)} |\nabla f(x(s))\cdot h(s)| \\ &\ge F(x) + \varepsilon \inf_{s\in I_F^\delta(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s) \end{aligned}$$

となる. これと (5.10) の左辺より

$$\begin{aligned}\inf_{t\in(I_F^\delta(x))^{\complement}} f(x(t)+\varepsilon h(t)) &\geq \inf_{t\in(I_F^\delta(x))^{\complement}} (f(x(t))+\varepsilon\nabla f(x(t))\cdot h(t)-\varepsilon^2 M) \\ &\geq F(x)+\varepsilon \inf_{s\in I_F^\delta(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)-\varepsilon^2 M\end{aligned}$$

が得られる. (5.11) の左辺と合わせれば

$$\begin{aligned}F(x+\varepsilon h) &= \left(\inf_{s\in I_F^\delta(x)} f(x(s)+\varepsilon h(s))\right)\wedge\left(\inf_{s\in(I_F^\delta(x))^{\complement}} f(x(s)+\varepsilon h(s))\right) \\ &\geq F(x)+\varepsilon \inf_{s\in I_F^\delta(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)-\varepsilon^2 M\end{aligned}$$

が得られる. よって $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ に対して

$$\frac{F(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon} \geq \inf_{s\in I_F^\delta(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)-\varepsilon M$$

となり

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{F(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon} \geq \inf_{s\in I_F^\delta(x)} \nabla f(x(s))\cdot h(s)$$

が得られる. $\delta\downarrow 0$ とすることで (5.13) が従い, (5.12) と (5.13) から (5.8) が得られる. 最後に

$$\lim_{\varepsilon\to 0-} \frac{F(x+\varepsilon h)-F(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon'\to 0+} \frac{F(x+\varepsilon'(-h))-F(x)}{-\varepsilon'} = -D^+F(x)[-h]$$

となり, これと (5.8) から (5.9) が従う. □

命題 5.20. $N\geq 2$ のとき $f\in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})\cap C^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ が $\nabla f(\xi)=0$ となる $\xi\in\mathbf{R}^N$ は高々可算個であるならば, μ-a.s. $x\in B$ に対して $s\mapsto f(x(s))$ が最小値をとる時刻が一意的に定まる.

証明. $\mu(x\in B\mid \sharp I_F(x)=1)=1$ を示せばよいが, $s\mapsto f(x(s))$ の連続性より $\mu(x\in B\mid \sharp I_F(x)\geq 1)=1$ なので, これは $\mu(x\in B\mid \sharp I_F(x)\geq 2)=0$ に帰着される. 記号を用意する. $\Xi_f:=\{\xi\in\mathbf{R}^N\setminus\{0\}\mid \nabla f(\xi)=0\}$ とおき, H の完全正規直交系 $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ を固定する. さらに B の部分集合 Γ_0,Γ_1 および Γ_2 を

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &:= \{x\in B\mid \sharp I_F(x)\geq 2\}, \\ \Gamma_1 &:= \{x\in B\mid \nabla x(s)\notin\Xi_f,\ \forall s\in(0,1]\} \\ &= \{x\in B\mid \nabla f(x(s))\neq 0,\ \forall s\in(0,1]\}, \\ \Gamma_2 &:= \bigcap_{j=1}^\infty \left\{x\in B\,\middle|\, \inf_{s\in I_F(x)}\nabla f(x(s))\cdot h_j(s)=\sup_{s\in I_F(x)}\nabla f(x(s))\cdot h_j(s)\right\}\end{aligned}$$

と定める.

まず 2 次元以上の Wiener 過程は高々可算な集合 Ξ_f に到達する確率は 0 なので, $\mu(\Gamma_1^{\complement})=\mu(x\in B\mid \exists s(x)\in(0,1]$ s.t. $x(s(x))\in\Xi_f)=0$ となり $\mu(\Gamma_1)=1$ が分かる. つぎに $f\in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ なので命題 5.18 を用いることで $F\in W^{1,\infty-}(\mathbf{R})$ が分かり, $DF\in L^{\infty-}(H)$ の存在が従う. そして

$h \in H$ を固定するごとに任意の $\delta > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mu\Big(x \in B \,\Big|\, \Big|DF(x)[h] - \inf_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h(s)\Big| > 2\delta\Big) \\
&\qquad = \mu(x \in B \mid |DF(x)[h] - D^+F(x)[h]| > 2\delta) \\
&\qquad \le \mu\Big(x \in B \,\Big|\, \Big|DF(x)[h] - \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon}\Big| > \delta\Big) \\
&\qquad\quad + \mu\Big(x \in B \,\Big|\, \Big|D^+F(x)[h] - \frac{F(x+\varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon}\Big| > \delta\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つので, 命題 4.12 と補題 5.19 より

$$\mu\Big(x \in B \,\Big|\, DF(x)[h] = \inf_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h(s)\Big) = 1$$

が得られる. 同様にして

$$\mu\Big(x \in B \,\Big|\, DF(x)[h] = \sup_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h(s)\Big) = 1$$

となるので

$$\mu\Big(x \in B \,\Big|\, \inf_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h(s) = \sup_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h(s)\Big) = 1$$

が成り立つ. これは $\mu(\Gamma_2) = 1$ を意味する. したがって

$$\mu(\Gamma_0) = \mu(\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$$

が得られる. これより $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ を示せば $\mu(\Gamma_0) = 0$ が分かる.

以降では $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ を仮定し矛盾を導く. $x \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ とする. $x \in \Gamma_0$ より $0 \le s_1 < s_2 \le 1$ なる $s_1, s_2 \in I_F(x)$ が存在する. $k \in H$ を

$$k := \nabla f(x(s_1)) \int_0^{\cdot} 1_{[0,s_1]}(u)\, du - \nabla f(x(s_2)) \int_0^{\cdot} 1_{[0,s_2]}(u)\, du$$

とおくと, $k = 0$ となるのは $\nabla f(x(s_1)) = \nabla f(x(s_2)) = 0$ のときのみなので, $x \in \Gamma_1$ より $k \neq 0$ が従う. そして $x \in \Gamma_2$ より, すべての $j \ge 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Big(\nabla f(x(s_1)) \cdot h_j(s_1)\Big) \wedge \Big(\nabla f(x(s_2)) \cdot h_j(s_2)\Big) \ge \inf_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h_j(s) \\
&\qquad = \sup_{s \in I_F(x)} \nabla f(x(s)) \cdot h_j(s) \ge \Big(\nabla f(x(s_1)) \cdot h_j(s_1)\Big) \vee \Big(\nabla f(x(s_2)) \cdot h_j(s_2)\Big)
\end{aligned}$$

となり, $\nabla f(x(s_1)) \cdot h_j(s_1) = \nabla f(x(s_2)) \cdot h_j(s_2)$ が分かる. よって, 任意の $j \ge 1$ に対して

$$\begin{aligned}
(k, h_j)_H &= \int_0^1 1_{[0,s_1]}(u) \nabla f(x(s_1)) \cdot h_j(u)\, du - \int_0^1 1_{[0,s_2]}(u) \nabla f(x(s_2)) \cdot h_j(u)\, du \\
&= \nabla f(x(s_1)) \cdot h_j(s_1) - \nabla f(x(s_2)) \cdot h_j(s_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. これは $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ の完全性に矛盾するので $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ が分かり結論が従う. □

定義 5.21 (Zaremba の錐条件)**.** $\eta \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ と $0 < \theta < \pi$ に対して

$$C(\eta;\theta) := \{\zeta \in \mathbf{R}^N \mid \eta \cdot \zeta \geq |\eta||\zeta| \cos\theta\}$$

とおく. $\mathbf{R}^N$ の開集合 Σ の境界上の点 $\xi \in \partial\Sigma$ が **Zaremba の錐条件**を満たすとは, $\xi + C(\eta;\theta)$ が $(\Sigma \cap V)^{\complement}$ に含まれるような $\eta \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ と $0 < \theta < \pi$ および ξ を中心とする開球 V が存在することをいう.

命題 5.22 ([9, Theorem 4.2.19, Remark 4.2.20])**.** $0 \in \partial\Sigma$ なる $\mathbf{R}^N$ の開集合 Σ に対して $\tau_\Sigma(x) := \inf\{s \in (0,1] \mid x(s) \in \Sigma^{\complement}\}$ とおく. $0 \in \partial\Sigma$ が Zaremba の錐条件を満たせば

$$\mu(x \in B \mid \tau_\Sigma(x) = 0) = 1$$

が成り立つ. つまり μ-a.s. $x \in B$ に対して $s \mapsto x(s)$ は 0 を出発した直後に $\Sigma^{\complement}$ に到達する.

定理 5.23 (主定理 3)**.** $N \geq 2$ のとき $f \in C^1_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ に対して $\Sigma_f := \{\xi \in \mathbf{R}^N \mid f(\xi) > f(0)\}$ とおく. もし

(A) $\nabla f(\xi) = 0$ となる $\xi \in \mathbf{R}^N$ が高々可算個であり,

(B) $0 \in \partial\Sigma_f$ であって, 0 が Zaremba の錐条件を満たす

ならば, F は分布密度をもつ.

証明. B の部分集合 Γ_1 と Γ_2 を

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= \{x \in B \mid \sharp I_F(x) = 1\},\\
\Gamma_2 &:= \{x \in B \mid \exists t(x) \in (0,1] \text{ s.t. } x(t(x)) \in \Sigma_f^{\complement}\}\\
&= \{x \in B \mid \exists t(x) \in (0,1] \text{ s.t. } f(x(t(x))) \leq f(0)\}
\end{aligned}$$

とおく. (A) と命題 5.20 より $\mu(\Gamma_1) = 1$ である. つまり μ-a.s. $x \in B$ に対して $s \mapsto f(x(s))$ が最小値を取る時刻 $\sigma(x)$ が一意に決まる. これと命題 5.18 より $\|DF\|_H^2 = |\nabla f \circ \delta_\sigma|^2 \sigma$ μ-a.s. が分かる. もし $\sigma(x) > 0$ μ-a.s. $x \in B$ が示されれば, 高々可算な集合 $\{\xi \in \mathbf{R}^N \mid \nabla f(\xi) = 0\}$ に Wiener 過程が到達する確率は 0 なので $\nabla f \circ \delta_\sigma \neq 0$ μ-a.s. となり, $\|DF\|_H^2 > 0$ μ-a.s. が得られ, 定理 5.16 より結論が従う

$\sigma(x) > 0$ μ-a.s. $x \in B$ となることを示す. 命題の仮定より $\mu(\Gamma_1) = 1$ となり, 命題 5.22 より $\mu(\Gamma_2) \geq \mu(x \in B \mid \tau_{\Sigma_f}(x) = 0) = 1$ となる. これらより $\mu(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 1$ が得られる. 次は $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subset \{x \in B \mid \sigma(x) > 0\}$ を示す. $x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ に対して, $(0,1]$ を

$$\begin{aligned}
J_0(x) &:= \{s \in (0,1] \mid f(x(s)) = f(0)\},\\
J_1(x) &:= \{s \in (0,1] \mid f(x(s)) < f(0)\},\\
J_2(x) &:= \{s \in (0,1] \mid f(x(s)) > f(0)\}
\end{aligned}$$

として, 互いに共通部分を持たない 3 個の集合に分割する. このとき $x \in \Gamma_2$ より $J_0(x) \cup J_1(x) \neq \emptyset$ が成り立つ. もし $J_1(x) = \emptyset$ ならば

$$\begin{aligned}
&J_0(x) \cup J_2(x) = (0,1],\\
&J_0(x) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

が成り立つ. 第 1 式より $F(x) = f(0)$ が従い, これと第 2 式より $\sharp I_F(x) = \sharp\{0\} + \sharp J_0(x) \geq 2$ となる. これは $x \in \Gamma_1$ に反するので $J_1(x) \neq \emptyset$ が分かり, $\sigma(x) > 0$ が従う. ゆえに $\mu(x \in B \mid \sigma(x) > 0) = 1$ が得られる. □

$N = 1$ のときは命題 5.16 によらずに次の十分条件が得られる.

命題 5.24. $N = 1$ のとき $f \in C^n(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ は狭い意味での単調性を持つとする. つまり $f' > 0\, d\xi$-a.e. または $f' < 0\, d\xi$-a.e. が成り立つとする. このとき F は分布密度 $\rho \in C^{n-1}((\inf_{\xi \in \mathbf{R}} f(\xi), f(0)); \mathbf{R})$ をもつ.

証明. [9, Section 2.8] によれば

$$\mu\Big(x \in B \,\Big|\, \inf_{s \in [0,1]} x(s) \leq u\Big) = \int_{-\infty}^{u} 1_{(-\infty,0)}(v) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big)\, dv$$

である. これより

$$\begin{aligned}
\mu(F \leq u) &= \mu\Big(x \in B \,\Big|\, \inf_{s \in [0,1]} f(x(s)) \leq u\Big) = \mu\Big(x \in B \,\Big|\, \inf_{s \in [0,1]} x(s) \leq f^{-1}(u)\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{f^{-1}(u)} 1_{(-\infty,0)}(v) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big)\, dv \\
&= \int_{-\infty}^{u} 1_{(\inf_{\xi \in \mathbf{R}} f(\xi), f(0))}(w) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\Big(-\frac{(f^{-1}(w))^2}{2}\Big) \frac{df^{-1}}{dw}(w)\, dw
\end{aligned}$$

が得られる. これより F が分布密度 $\rho \in C^{n-1}((\inf_{\xi \in \mathbf{R}} f(\xi), f(0)); \mathbf{R})$ をもつことが分かる. □

注意 5.25. 命題 5.24 は明らかな十分条件を与えたに過ぎない. 実際, $f(\xi) = -\xi^2$ や $f(\xi) = \xi(\xi-1)^2$ ならば F は分布密度をもつ.

5.4.2 分布密度の滑らかさ

この小節では定理 5.7 から得られる命題 5.8 を用いて, $N = 1$, $f(\xi) = \xi$ のときに F が C^∞ 級の分布密度をもつことを示す.

命題 5.26 (Garsia-Rodemich-Rumsey の補題 [4, Lemma 1.1])**.** $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ を連続関数, V を $\mathbf{R}^m$ 内の開球とする. $\gamma > 0, \delta > 0$ に対して

$$\Gamma := \int_{V^2} \frac{|g(v) - g(w)|^\gamma}{|v - w|^{\delta + 2m}}\, dv dw$$

とおく. このとき m と γ, δ に依存する正定数 C が存在し, $\Gamma < \infty$ ならば

$$|g(v) - g(w)|^\gamma \leq C |v - w|^\delta \Gamma$$

がすべての $v, w \in V$ について成り立つ.

命題 5.27. $0 < r < 1/2, k \in \mathbf{N}$ とする. $f \in C^n_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ と $s \in [0,1]$ に対して $Q_s : B \to \mathbf{R}$ を

$$Q_s := \int_{[0,s]^2} \frac{|f \circ \delta_v - f \circ \delta_w|^{2k+n}}{|v - w|^{1+2kr}}\, dv dw \tag{5.14}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

(i) $Q_s \in W^{n,\infty-}(\mathbf{R})$ となる.

(ii) $1+2kr<k$ ならば, 任意の $1<p<\infty$ に対して p と N,n,k,r に依存する正定数 C が存在し $\|Q_s\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})} \le Cs^2$ となる.

(iii) さらに $1<2kr$ ならば, 任意の $b>0$ に対して b と N,k,r に依存する正定数 R が存在し, $Q_s \le R$ ならば $\sup_{v,w\in[0,s]} |f\circ\delta_v - f\circ\delta_w| \le b$ となる.

証明. (i) と (ii) について. $f \in C^n_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$ なので $L>0$ と $l \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ が存在し, すべての $|\alpha| \le n$ なる多重指数 α と $\xi \in \mathbf{R}^N$ に対して $|\partial^\alpha f(\xi)| \le L(1+|\xi|^l)$ が成り立つ. これより $\xi,\eta \in \mathbf{R}^N$ に対して

$$|f(\xi)-f(\eta)| \le \int_0^1 |\nabla f(\eta+(\xi-\eta)t)||\xi-\eta|\,dt \le 2^l NL(1+|\xi|^l+|\eta|^l)|\xi-\eta|$$

となるので

$$|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w| \le 2^l NL(1+|\delta_v|^l+|\delta_w|^l)|\delta_v-\delta_w| \le 2^{l+1}NL(1+\|\cdot\|_B^l)|\delta_v-\delta_w|$$

が確率 1 で成り立つ. したがって任意の $0<\theta<\infty$ に対して

$$\begin{aligned}\||f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^\theta\|_{L^p(\mathbf{R})} &\le (2^{l+1}NL)^\theta \|(1+\|\cdot\|_B^l)^\theta\|_{L^{2p}(\mathbf{R})} \||\delta_v-\delta_w|^\theta\|_{L^{2p}(\mathbf{R})} \\ &\le C_{p,N,\theta}|v-w|^{\theta/2}\end{aligned}$$

が成り立つ. ν によって決まる $f\circ\delta_v, f\circ\delta_w, \ldots, D^\nu(f\circ\delta_v), D^\nu(f\circ\delta_w)$ の多項式 $P_\nu(v,w)$ が存在し $D^\nu|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n} = P_\nu(v,w)|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n-\nu}$ が成り立ち, $\|P_\nu(v,w)\|_{L^p(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))}$ が v,w に依存しない正定数 $C_{p,\nu}$ で評価できるので

$$\begin{aligned}&\|D^\nu|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n}\|_{L^p(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \\ &\quad\le \|P_\nu(v,w)\|_{L^{2p}(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))} \||f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n-\nu}\|_{L^{2p}(\mathbf{R})} \\ &\quad\le \|P_\nu(v,w)\|_{L^{2p}(\mathscr{L}^\nu_{(2)}(H;\mathbf{R}))} C_{2p,N,2k+n-\nu}|v-w|^{(2k+n-\nu)/2} \le C_{2p,\nu}C_{2p,N,2k+n-\nu}|v-w|^k\end{aligned}$$

が得られる. これより p と N,n,k に依存する正定数 $C_{p,N,n,k}$ が存在し

$$\begin{aligned}\int_{[0,s]^2} \frac{\||f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n}\|_{W^{n,p}(\mathbf{R})}}{|v-w|^{1+2kr}}\,dvdw &\le C_{p,N,n,k}\int_{[0,s]^2}|v-w|^{k-(1+2kr)}\,dvdw \\ &= \frac{2C_{p,N,n,k}s^{k-(1+2kr)+2}}{[k-(1+2kr)][k-(1+2kr)+2]}\end{aligned}$$

となり, (i) と (ii) が分かる.

(iii) について. $v \mapsto f\circ\delta_v$ に命題 5.26 を適用することで, n と k,r に依存する正定数 C が存在し, すべての $v,w\in[0,s]$ に対して

$$|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w|^{2k+n} \le C|v-w|^{2kr-1}Q_s \le CQ_s$$

が成り立つことが分かる. よって $R := b^{2k+n}/C$ とおいたとき, $Q_s \le R$ ならば $\sup_{v,w\in[0,s]}|f\circ\delta_v - f\circ\delta_w| \le b$ が従う. □

命題 5.28. $f \in C^\infty_{\mathrm{poly}}(\mathbf{R};\mathbf{R})$ を $f(\xi)=\xi$ と定める. このとき

$$F(x) := \inf_{s\in[0,1]} f(x(s)), \quad x\in B,$$

は $(-\infty, f(0))$ 上で分布密度 $\rho \in C^\infty((-\infty,f(0));\mathbf{R})$ をもつ.

証明. $n\in\mathbf{N}$ と $1<q<\infty$ および $a<f(0)$ を任意にとり, F が $((-\infty,a),n,q)$ 局所非退化であることを示す. 以降 $A:=(-\infty,a)$ とおく. $1<2kr$ と $1+2kr<k$ を満たす $0<r<1/2$ と $k\in\mathbf{N}$ および n に対して $Q_s\in W^{n,\infty-}(\mathbf{R})$ を (5.14) で定義する. このとき命題 5.27 の (iii) より $Q_s\le R$ ならば $\sup_{w\in[0,s]}|f\circ\delta_w - f\circ\delta_0|\le f(0)-a$ となる $f(0)-a$ と k,r に依存する正定数 R が存在するので, この R に対して $\chi\in C^\infty([0,\infty);[0,\infty))$ を $0\le\chi\le 1$ と

$$\chi(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in[0,R/2),\\ 0, & \xi\in(R,\infty),\end{cases}$$

を満たすように取る. そして $u:B\to H$ と $\gamma:B\to\mathbf{R}$ を

$$u(\cdot):=\int_0^{\cdot}\chi(Q_s)\,ds, \qquad \gamma:=\int_0^1\chi(Q_s)\,ds$$

とおく. $M(n):=n(n+3)/2$, $q^*:=3q$ とし, u と γ が命題 5.8 の条件を満たすことを示す.

第 1 段. $u\in W^{n,M(n)q^*}(H), \gamma\in W^{n,(M(n)-n)q^*}(\mathbf{R})$ および $1/\gamma\in L^{M(n)q^*}(\mathbf{R})$ の証明. 命題 5.27 の (i) より $Q_s\in W^{n,\infty-}(\mathbf{R})\subset W^{n,nM(n)q^*}(\mathbf{R})$ なので, 命題 4.20 と合わせれば $\chi(Q_s)\in W^{n,M(n)q^*}(\mathbf{R})$ と

$$\|\chi(Q_s)\|_{W^{n,M(n)q^*}(\mathbf{R})}\le C_1\Big(1+\|Q_s\|^n_{W^{n,nM(n)q^*}(\mathbf{R})}\Big)$$

が分かる. ここで C_1 は q^* と n のみに依存する正定数である. 命題 5.27 の (ii) より, $M(n)q^*$ と n,k,r のみに依存する正定数 C_2 が存在して

$$\|Q_s\|_{W^{n,nM(n)q^*}(\mathbf{R})}\le C_2 s^2$$

となるので

$$\int_0^1\|\chi(Q_s)\|_{W^{n,M(n)q^*}(\mathbf{R})}\,ds\le C_1\int_0^1(1+(C_2s^2)^n)\,ds\le C_1\left(1+\frac{C_2^n}{2n+1}\right)$$

が得られ, $u\in W^{n,M(n)q^*}(H)$ と $\gamma\in W^{n,(M(n)-n)q^*}(\mathbf{R})$ が従う. そして $[0,1]\ni s\mapsto Q_s\in\mathbf{R}$ は単調増加なので, 逆関数を $Q_\cdot^{-1}$ と表わせば $\gamma\ge\int_0^1 1_{\{Q_s<R/2\}}\,ds=Q^{-1}_{R/2}$ となるので

$$\begin{aligned}\mu(1/\gamma\ge\nu)&=\mu(\gamma\le 1/\nu)\le\mu(Q^{-1}_{R/2}\le 1/\nu)=\mu(R/2\le Q_{1/\nu})\\ &\le\int_B 1_{\{R/2\le Q_{1/\nu}\}}\left(\frac{Q_{1/\nu}}{R/2}\right)^{M(n)q^*}d\mu\le\left(\frac{2C_2}{R}\right)^{M(n)q^*}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)^{M(n)q^*}\end{aligned}$$

が得られる. これより

$$\begin{aligned}\int_B|1/\gamma|^{M(n)q^*}\,d\mu&=\sum_{\nu=0}^\infty\int_{\{\nu\le 1/\gamma\le\nu+1\}}|1/\gamma|^{M(n)q^*}\,d\mu\\ &\le 1+\sum_{\nu=1}^\infty(\nu+1)^{M(n)q^*}\mu(1/\gamma\ge\nu)\le 1+\left(\frac{2C_2}{R}\right)^{M(n)q^*}\sum_{\nu=1}^\infty\left(\frac{\nu+1}{\nu^2}\right)^{M(n)q^*}\end{aligned}$$

となり $1/\gamma \in L^{M(n)q^*}(\mathbf{R})$ が得られる.

第 2 段. $1_{\{F\in A\}}[(DF,u)_H-\gamma]=0$ μ-a.s. の証明. σ を $F=f\circ\delta_\sigma$ となるただ一つの時刻とすれば, 命題 5.18 より $DF=(\nabla f\circ\delta_\sigma)\int_0^\cdot 1_{[0,\sigma]}(s)\,ds=\int_0^\cdot 1_{[0,\sigma]}(s)\,ds$ なので

$$
\begin{aligned}
1_{\{F\in A\}}[(DF,u)_H-\gamma] &= 1_{\{F\in A\}}\left(\int_0^1 1_{[0,\sigma]}(s)\chi(Q_s)\,ds-\int_0^1\chi(Q_s)\,ds\right)\\
&= \int_0^1 1_{\{F\in A\}}1_{(\sigma,1]}(s)\chi(Q_s)\,ds
\end{aligned}
$$

となる. そして χ の定義より $\chi(Q_s)>0$ ならば $Q_s<R$ となり, これと命題 5.27 の (iii) より

$$
\begin{aligned}
\inf_{v\in[0,s]} f\circ\delta_w &= \inf_{v\in[0,s]}[f\circ\delta_v-f(0)]+f(0)\\
&\geq -\sup_{v\in[0,s]}|f\circ\delta_v-f(0)|+f(0)\geq -(f(0)-a)+f(0)=a
\end{aligned}
$$

が従う. これは $1_{\{F\in A\}}1_{(\sigma,1]}(s)\chi(Q_s)=0$ を意味するので主張が得られる. □

第6章　補遺

6.1　確率論の基礎事項

この節では, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間, $(B, \|\cdot\|_B)$ を可分 Banach 空間とする. そして B の共役空間を B^*, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で B^* と B の自然な双一次形式を表わす. また B の Borel 集合族を $\mathscr{B}(B)$ と表わす.

命題 6.1 ([8, Proposition 2.1])**.** $\sigma(B^*) = \mathscr{B}(B)$ が成り立つ.

定義 6.2 (特性関数)**.** $\mathscr{P}(B)$ で B 上の Borel 確率測度の全体を表わす. $\mu \in \mathscr{P}(B)$ に対して

$$\hat{\mu}(\ell) = \int_B \exp(\sqrt{-1}\langle \ell, w\rangle)\,\mu(dw), \quad \ell \in B^*,$$

とおき, **特性関数**という.

命題 6.3 ([8, Proposition 2.2])**.** $\mu, \nu \in \mathscr{P}(B)$ とする. $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ ならば $\mu = \nu$ である.

定義 6.4 (畳み込み)**.** $\mu, \nu \in \mathscr{P}(B)$ に対して

$$\mu * \nu(\Gamma) := \int_B \mu(\Gamma - w)\,\nu(dw), \quad \Gamma \in \mathscr{B}(B),$$

とおく. ここで $\Gamma - w := \{x - w \in B \mid x \in \Gamma\}$ である. $\mu * \nu$ を μ と ν の**畳み込み**という.

命題 6.5. $\mu, \nu \in \mathscr{P}(B)$ に対して $(\mu * \nu)^\wedge = \hat{\mu}\hat{\nu}$ が成り立つ.

命題 6.6. B 値確率変数 $\{X_j\}_{j=1}^n$ が互いに独立であることと全ての $\{\ell_j\}_{j=1}^n \subset B^*$ に対して

$$E\Big[\exp\Big(\sqrt{-1}\sum_{j=1}^n \langle \ell_j, X_j\rangle\Big)\Big] = \prod_{j=1}^n E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\langle \ell_j, X_j\rangle\right)\right]$$

が成立することは同値である.

命題 6.7 ([8, Theorem 3.1, 4.1])**.** 独立な B 値確率変数 $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ に対して $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ とおく. 各 X_j が対称分布をもつとき, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ は概収束する.

(ii) ある B 値確率変数 S が存在し, すべての $\ell \in B^*$ について $\{\langle \ell, S_n\rangle\}_{n=1}^\infty$ が $\langle \ell, S\rangle$ に確率収束する.

6.2　Hilbert-Schmidt 型作用素と核型作用素

n を自然数, H, K を可分 Hilbert 空間とし, $\mathscr{L}^n(H;K)$ で $H\times\cdots\times H$ から K への n 重線形写像の全体を表わす.

定義 6.8 (Hilbert-Schmidt 型作用素)**.** $T\in\mathscr{L}^n(H;K)$ で

$$\sup\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\|T(\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_n})\|_K^2\ \middle|\ \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}\text{は } H \text{ の完全正規直交系}\right\}<\infty$$

を満たすものを **Hilbert-Schmidt 型作用素**といい, その全体を $\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)$ とかく.

命題 6.9. $S,T\in\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)$ に対して

$$(S,T)_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}(S(\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_n}),T(\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_n}))_K$$

とおく. ここで $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は H の完全正規直交系である. この定義は $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ の選び方によらず, $\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)$ は $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}$ を内積として可分 Hilbert 空間になる.

命題 6.10. $\mathscr{L}_{(2)}^{n+1}(H;K)\simeq\mathscr{L}_{(2)}^1(H;\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K))$ が成り立つ.

例 6.11. $k\in K, h_1,\ldots,h_n\in H$ に対して

$$[h_1\otimes\cdots\otimes h_n\otimes k](\xi_1,\ldots,\xi_n):=\left(\prod_{j=1}^{n}(h_j,\xi_j)_H\right)k,\quad \xi_j\in H,$$

と置くと, $h_1\otimes\cdots\otimes h_n\otimes k\in\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)$ となる.

実際, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を H の完全正規直交系とすれば

$$\begin{aligned}\|h_1\otimes\cdots\otimes h_n\otimes k\|_{\mathscr{L}_{(2)}^n(H;K)}^2&=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|k\prod_{l=1}^{n}(h_j,\varphi_{j_l})_H\right\|_K^2\\&=\|k\|_K^2\prod_{l=1}^{n}\left(\sum_{j_l=1}^{\infty}(h_l,\varphi_{j_l})_H^2\right)=\|h_1\|_H^2\cdots\|h_n\|_H^2\|k\|_K^2\end{aligned}$$

となる.

定義 6.12 (核型作用素)**.** $T\in\mathscr{L}^2(H;K)$ で

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|T(\varphi_j,\psi_j)\|_K\ \middle|\ \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty},\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}\text{は } H \text{ の完全正規直交系}\right\}<\infty$$

を満たすものを**核型作用素**といい, その全体を $\mathscr{L}_{(1)}^2(H;K)$ とかく.

定義 6.13 (トレース)**.** $\mathrm{tr}:\mathscr{L}_{(1)}^2(H;K)\to K$ を

$$\mathrm{tr}\,T:=\sum_{j=1}^{\infty}T(\varphi_j,\varphi_j),\quad T\in\mathscr{L}^2(H;K)$$

で定める. ここで $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は H の完全正規直交系である. この定義は $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ の選び方によらない.

命題 6.14. $S, T \in \mathscr{L}^2_{(1)}(H; K)$ とすれば, $S + T \in \mathscr{L}^2_{(1)}(H; K)$ であり,

$$\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr} S + \operatorname{tr} T$$

が成り立つ.

命題 6.15. $S, T \in \mathscr{L}^1_{(2)}(H; K)$ に対して

$$S \otimes T(\xi, \eta) := (S(\xi), T(\eta))_K, \quad \xi, \eta \in H,$$

とおくと $S \otimes T \in \mathscr{L}^2_{(1)}(H; \mathbf{R})$ となる.

証明. $S \otimes T$ の 2 重線形性は明らかである. $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}, \{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を H の完全正規直交系とする. このとき

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |S \otimes T(\varphi_j, \psi_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} |(S(\varphi_j), T(\psi_j))_K| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|S(\varphi_j)\|_K \|T(\psi_j)\|_K \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|S(\varphi_j)\|_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(\psi_j)\|_K^2 \right)^{1/2} = \|S\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)} \|T\|_{\mathscr{L}^1_{(2)}(H;K)}
\end{aligned}$$

となる. □

参考文献

[1] Nicolas Bouleau and Francis Hirsch. Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, Vol. 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 131–161. Springer, Berlin, 1986.

[2] Carme Florit and David Nualart. A local criterion for smoothness of densities and application to the supremum of the Brownian sheet. *Statist. Probab. Lett.*, Vol. 22, No. 1, pp. 25–31, 1995.

[3] Avner Friedman. *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

[4] A. M. Garsia, E. Rodemich, and H. Rumsey, Jr. A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 20, pp. 565–578, 1970/1971.

[5] Zhi-yuan Huang and Jia-an Yan. *Introduction to infinite dimensional stochastic analysis*, Vol. 502 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, chinese edition, 2000.

[6] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, Vol. 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

[7] Peter Imkeller and David Nualart. Continuity of the occupation density for anticipating stochastic integral processes. *Potential Anal.*, Vol. 2, No. 2, pp. 137–155, 1993.

[8] Kiyosi Itô and Makiko Nisio. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.*, Vol. 5, pp. 35–48, 1968.

[9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, Vol. 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[10] Paul Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pp. 195–263, New York, 1978. Wiley.

[11] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[12] David Nualart and Josep Vives. Continuité absolue de la loi du maximum d'un processus continu. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 307, No. 7, pp. 349–354, 1988.

[13] David Nualart and Moshe Zakai. The partial Malliavin calculus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, Vol. 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 362–381. Springer, Berlin, 1989.

[14] Ichiro Shigekawa. Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 20, No. 2, pp. 263–289, 1980.

[15] Ichiro Shigekawa. *Stochastic analysis*, Vol. 224 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Translated from the 1998 Japanese original by the author, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[16] Hiroshi Sugita. On a characterization of the Sobolev spaces over an abstract Wiener space. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 25, No. 4, pp. 717–725, 1985.

[17] Hiroshi Sugita. Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol. 25, No. 1, pp. 31–48, 1985.

[18] Shinzo Watanabe. *Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Vol. 73 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1984. Notes by M. Gopalan Nair and B. Rajeev.

[19] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.