# くりこみ群，２０４１年現在

# Renormalization group, A.D. 2041

服部　哲弥　(Tetsuya HATTORI)

宇都宮大学工学部　(Utsunomiya University)

## 1　無限との会話

私は，今の解析学および理論物理学は１９００年を中心にした革命期の後の洗練期に入ったと思っています．次の革命期は今から５０年後，仮に２０４１年としましょう，を中心にした時期だと思います．このことは大学１年の終わり頃はじめて頭に浮かびました．一度だけ，初めてこのことを思った頃名前ももう忘れた同級生に話をして,「私はそれまで何を研究すればよいだろう」と言ったところ,「進歩を早めるという仕事がある」と励まされました．２０４１という数字は確定値とは思いたくありませんからこれを早めたいと思います．

私の思う２０４１年の解析学および理論物理学の革命とは，２０世紀の言葉で近似的に言えば無限自由度系の解析であり，さらに２０世紀で言うくりこみ群の２１世紀における姿が今の微積分学のような基礎技術になるということです．２０４１年に確立する解析の基礎技術としてのくりこみ群を２１世紀のくりこみ群と呼びます．くりこみ群の説明が以下の主題です．

くりこみ群とは，無限自由度系を解析する一手段であって，スケール変換に対する系の応答の表現です．無限自由度系とは関数空間のような無限次元空間$\Omega$の上の測度の集合$\mathcal{G}$です．典型的にはスピン系の平衡系統計力学やユークリッド場の量子論のような canonical ensemble 型のアプローチを考えますが，拡散過程（random walk）や self-avoiding walk のような確率過程などもっと広い分野に適用されるべき概念です．$\mathbf{R}^{\mathbf{d}}$の拡散過程は拡散方程式に対応しますが，もっと広い範囲の偏微分方程式についての研究も含まれると想像します．スケール変換は$\Omega$の元，即ち関数，の定義域または値域$G$に対する変換です．Canonical ensemble の場合，$\Omega$から実数への関数の組を考えて，その結合母関数から自然に定義される測度の集合を$\mathcal{G}$とします．母関数の変数の定義域$\tilde{\mathcal{P}}$が系$\mathcal{G}$を parametrize します．$G$に何らかの意味でスケール不変性，即ちある定数$\lambda > 1$に対して$\lambda G \simeq G$，があるとき，スケール変換に対する系の応答が$\tilde{\mathcal{P}}$上の写像$T$として表現されます．$T$が定義する力学系をくりこみ群と呼び，これを調べることで特に無限自由度系に特徴的な性質を解析しようというのがくりこみ群の解析です．無限自由度系に特徴的な性質の重要な一例としてスピン系の平衡系統計力学における臨界点の存在とその近傍での非解析性があげられます．

この文章の目的はくりこみ群の**描像自体**にあります．２１世紀のくりこみ群は何が解析できるべきなのか，現在の数学や物理学との関連は何か，などです．特定の問題へのくりこみ群の描像の適用の成果はこの文章の課題ではありません．語られることのより少ないと思われる前者に関して，できるだけ具体例によらずに説明します．記事の背景にある具体的なイメージについては解説記事 [1, 2, 3, 4, 5, 6] およびその引用文献などを参照して下さい．

## 2　２０世紀のくりこみ群

２０世紀のくりこみ群の成果は２１世紀のくりこみ群が包含しなければならない内容です．２１世紀を語ると言っても現在だけが手がかりですから，２０世紀のくりこみ群について語ることから始めます．

距離空間$G$を考えます．具体的にはユークリッド空間$\mathbf{R}^{\mathbf{d}}$などを考えますが，後で書くような何らかの意味でのスケール変換に対して不変であるとします．$G$上の系を考えます．例えば

(1)　$G$ に値をとる関数 $X:\ \mathbf{R}_+ \ni t \mapsto X(t) \in G$ （確率過程），または，
(2)　$G$ 上の関数 $\sigma:\ G \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ （スピン系），
の集合Ωの上の測度の集合

$$\mathcal{G} = \{\mu_\beta:\ \mathcal{F} \ni A \mapsto \mu_\beta(A) \in \mathbf{R}_+ \mid \beta \in \tilde{\mathcal{P}}\}\,,$$

です（$\mathcal{F} \subset 2^\Omega$は可算加法族）．確率論では$X$を sample path，統計力学では$\sigma$を configuration と呼ぶことがあります．無限自由度系と言ったのはΩとして無限次元空間を考えることを指します．無限自由度にこだわるのは，くりこみ群が解析すべき問題として念頭にある特徴的な現象が，無限自由度の協力現象に由来する非解析性だからです．[1]．$\tilde{\mathcal{P}}$は系を parametrize しますが，通常小さな自然数$k$に対して，$\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{k}}$をうまく選んで，$\tilde{\mathcal{P}}$を$\mathcal{P}$とその補空間に分解し，補空間は解析すべき結果に影響しないことを別途示す戦略が取られます．

$\tilde{\mathcal{P}}$あるいは$\mathcal{P}$の具体的な取り方は解析の成功のために重要な要素だと思います．臨界現象の研究の言葉では正準集合 (canonical ensemble) という定式化が行われ，くりこみ群が分かりやすいイメージを持ちます．簡単のため$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ としてスピン系の言葉で説明します[2]．Ω上の実関数の組

$$H_i:\ \Omega \ni \sigma \mapsto H_i(\sigma) \in \mathbf{R}\,,\ i = 1,\cdots,k\,,$$

を考え，これらの結合母関数から自然に定義される測度をもって系$\mathcal{G}$を構成します：

$$\mu_\beta(A) = \sum_{\sigma\in A} \exp(-\sum_{i=1}^{k} \beta_i\, H_i(\sigma))\,,\ A \in \mathcal{F}\,.$$

$\sigma \in A \subset \Omega$についての「和の記号」は，有限体積近似，及び必要ならば離散近似，によって有限自由度系で定義します．これにより，後述のスケール変換が well-defined になります．もう少し詳しくいうと，定点 $O \in G$ と正定数 $M,\epsilon$に対して，$G(M,\epsilon) \subset G$ を $d(x,O) \le M$, $x \ne y \Rightarrow d(x,y) > \epsilon$ を満たすように，及び後述のスケール変換が可能なように，適当にとり，$\displaystyle\sum_{\sigma\in A}$を$\displaystyle\int \prod_{x\in G(M,\epsilon)\cap A} d\sigma(x)$ で置き換えた上で後述のくりこみ群を定義し，必要に応じて解析の最後で$\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}$や$\displaystyle\lim_{M\to\infty}$を取ります[3]．結合母関数の変数$\beta$の張る空間が$\tilde{\mathcal{P}}$です[4]．

次はスケール変換です．スケール変換にも種類がありますが，ここでは実空間の decimation のイメージで説明します．$\lambda > 1$ を定数として $G$ のスケール変換$\Lambda:\ G \ni x \mapsto \lambda x \in G$ を考えます．スケール変換Λは１：１と仮定し，$\Lambda(G) = \{\lambda x \mid x \in G\}$ を $G$ と同一視します．ΛをΩの上の線形演算子$\Lambda^*$に持ち上げます．即ち$\sigma \in \Omega$に対して

$$\Lambda^*(\sigma):\ \Lambda(G) \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$$

とおき，$\Lambda(G)$ と $G$ の同一視により$\Lambda^*(\Omega) \simeq \Omega$と見ます[5]．スケール変換に対する系の応答とはΩの上の測度$\mu_\beta \in \mathcal{G}$の$\Lambda^*(\Omega)$ に関する周辺分布$\mu_\beta {\Lambda^*}^{-1}$をとることです．$\Lambda^*(\Omega) \simeq \Omega$の同一視により，この周辺分布は再びΩの上の測度になります．特にそれが$\mathcal{G}$の元になるように$\tilde{\mathcal{P}}$を取ります．即ち同一視の下で

$$\mu_{T\beta} = \mu_\beta {\Lambda^*}^{-1}$$

を満たす写像$T:\ \tilde{\mathcal{P}} \to \tilde{\mathcal{P}}$が作れることになります．この写像$T$を系のくりこみ群と呼びます．

今度は力学系 $\{T^N\}$ の解析です．無限自由度系のスケール変換に対する応答を見るのだから，$T$の不変部分空間であって元の問題を含む$\tilde{\mathcal{P}}$は一般に無限次元空間になります．たとえ有限次元でも離散力学系

[1] スピン系の統計力学，特に臨界現象や相転移の教科書を参照して下さい．
[2] Canonical ensemble はユークリッド場の理論では経路積分 (path integration) に対応し，後述の Hamiltonian はそこでは action (Lagrangian を時間積分したもの) に対応して同じ説明が成立します．また，確率過程の言葉で書いても殆ど同様です．このような対応はくりこみ群描像の，既存の分野を越えた普遍性を示唆します．
[3] $G,\Omega$は以上がうまく行くように取られているとします．
[4] $\beta$は場の量子論では結合定数 (coupling constant) と呼ばれます．統計力学では逆温度，外場，化学ポテンシャルなど個々の成分の物理的内容に応じて呼びわけられます．
[5] このこともΩの取り方を制約します．

は chaos で知られる複雑な振る舞いをし得るので問題をくりこみ群に翻訳してもそれだけで解けたとは言えません．通常，$T$について不変な部分空間$\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ をうまく見つけて問題を２段階に分けます．$\tilde{\mathcal{P}}$全体を$\beta$で陽に parametrize せず，$\mathcal{P}$の補空間では$T$が縮小写像になっていることを一般的に証明するのが普通です．つまり，$T^N\tilde{\mathcal{P}}$は $N \to \infty$ で$\mathcal{P}$につぶれることを示し，それに応じて各 trajectory の漸近挙動は$T$を$\mathcal{P}$に制限したときの漸近挙動と一致することを示します．$\mathcal{P}$は陽にユークリッド空間 $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$の部分空間で parametrize して$T^N$ の各 trajectory は固定点に収束することを示します．$k$は小さくないと困りますが，出発点の $\{H_i\}$ の選び方がこれを支配します．くりこみ群の定義から，対応$\mu_\beta \simeq \mu_{T^N\beta}$があるから，$T^N\beta$が固定点に収束するならばその近くだけ調べればよいことになります．

最後に元の問題への再翻訳が残っています．具体的には例えば臨界指数 (exponent)，場合によってはその ‘log correction’，の計算ですが，ここでの通常の戦略は少数次元部分空間$\mathcal{P}$だけが exponent に影響することを示して，さらに$\mathcal{P}$内部では固定点を定める方程式と，$T$の trajectory の固定点への漸近のスピード即ち固定点の周りで$T$を線形化することによって得られる$T$の固有値に基づいて exponent などを計算するものです．とはいえ，現実的な系ではこれらを実行するために場合によってはクラスター展開などのモデルに依存した複雑な計算を必要としており，統一的な視点はまだ得られていません．

２１世紀のくりこみ群について私が信じている作業仮説の要約です．

1. 距離空間$G$上の無限自由度系，例えば拡散，スピン系，場の量子論を考え，canonical ensemble で記述する．有限自由度離散化を行っておき，くりこみ写像不変な空間$\tilde{\mathcal{P}}$で系を parametrize する．

2. $G$ のスケール変換に対する系の応答を$\tilde{\mathcal{P}}$上の写像$T$に対応させる（くりこみ群）．

3. 適当な少数次元の不変部分空間$\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ をとって$T^N\tilde{\mathcal{P}}$ は $N \to \infty$ で$\mathcal{P}$に漸近し，かつ，そのときの漸近挙動は$T$を$\mathcal{P}$に制限したときの漸近挙動と一致することを示す．$\mathcal{P}$の中では$T^N$ の各 trajectory はどれかの固定点に収束することを示す．

4. 元の系への翻訳．固定点を定める「代数」方程式，及び固定点への収束を表す行列の固有値から「物理量」の漸近的性質に関する exponent や ‘log correction’ を求める．

以下の節で以上の点に関するいくつかの考察を加えます．

# 3　視点の移動

２１世紀のくりこみ群を語るには,「現在」の成果を「２１世紀」からながめて，その位置づけや評価をする必要があります．私自身がやってきたことは全体の中のほんの一部ですから適切な評価ができる保証はありません．基準となるべき２１世紀はまだ存在しませんから，判断は原理的に明確になり得ません．現在行われているくりこみ群の一部，スピン系や格子ゲージ系の block spin くりこみ群，は ‘physicists’ nightmare’ と呼んだ人がいるほどの複雑さであり，そのような労作を「単なる一例」と表現することからくる誤解や反発の問題があります．しかし，２１世紀を語るならば視点の移動は避けられない作業です．現在の研究を現在に即して尊敬することと次の発展のために遠慮しないことは分けて考えたい．くりこみ群は２０世紀で終わる学問ではなく２０４１年にむけての学問であり，２０世紀のくりこみ群は一つ一つが２１世紀のくりこみ群にとっては「簡単」だが実質的内容のある例題です．

２１世紀のくりこみ群と２０世紀のくりこみ群は見かけも難しい部分も全然違います．微積分法以前と以後での面積の計算の仕方の違いに例えることが出来るでしょう．例えば放物線で囲まれた図形の面積は微積分法以前から「取りつくし法」というたいへん巧妙な方法で計算されていたという話を読んだことがあります．これを「簡単な一例」と呼んだら「そんなに言うなら自力で思いついて見ろ」とたたかれそうなほど巧妙な方法だったと記憶しています．しかし，微積分法以後は放物線で囲まれた図形の面積はあくまで「簡単な一例」なのです．そう例えれば，暴言と誤解されかねない発言を納得して頂けるでしょうか？

最も難しい数理物理学の成果とも言われる場の量子論のくりこみ群の歴史を日本医科大学の渡辺浩さんは次のように分類しました：

phase 1.　伝統的くりこみ理論（発見の時代）.
phase 2.　摂動論的くりこみ群（定式化の時代）. Kadanoff, Wilson, Galabotti-Nicolo, Feldman 等.
phase 3.　厳密くりこみ群（数学的実現の時代）. Gawedzki-Kupiainen, Magnen-Senor, Balaban 等.
phase 4.　Large coupling problem（成熟期）. 未解決.

渡辺さんは「現在」を phase 3 とし，この時期の作業を「漸近的自由なパラメーター領域[6]」での解析と理解して，残された問題を解決する立場を取っています．Phase 4 の未解決の問題としては非可換ゲージ理論の confinement や可換ゲージ理論とフェルミオンの結合系 (QED) の存在（あるいは不存在），を挙げています．摂動論的くりこみ群（定式化の時代）は２系統に分けて，
2(a).　実空間での block-spin くりこみ群．Kadanoff, Wilson 等.
2(b).　運動量空間での無限小変換くりこみ群．Callan, Symanzik 等.
という感覚もあると思います.

分類の細部はさておき，２０世紀のくりこみ群で証明の進んでいるのは「漸近的自由なパラメーター領域」での解析即ち，予めくりこみ群の結果が陽な形で予想されていて，かつ厳密な解析が可能な，結果として特別ないくつかのモデルがあって，モデル毎に予め予想される極限との差を強引に不等式によって抑え込む証明をします．そういう具体例では$\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$も $\{H_i\}$ も$\mu_\beta$を定義する「和」も簡単かつ陽な予想があって実際それでうまく行きました．しかし，くりこみ群解析が成功するという２１世紀の目で見たときどのような性質が系に要請されるのかは，はっきりしません.

無限次元パラメータ空間から出発してくりこみ群で写像すると，像は少数次元空間に近づき，さらにその中の固定点に収束する，というのがくりこみ群の解析の成功ということでした．この現象は中心極限定理と大数の法則を連想させます．期待値と分散が有限な確率測度の族を考え，一つ分布を選んでその分布に従う独立同分布確率変数の平均を考えると，和を取る個数を増やしていくとき適当な意味で正規分布の族，即ち，期待値と分散の２次元パラメータ空間にまず近づき（中心極限定理），最後は確定値に収束します（大数の法則）．この描像は現在の確率過程論の一つの典型的描像に見えます．時間 $t$ の方向に眺めたとき，一歩一歩の効果（「時間微分」）が時間と共に累積されていくことを，和を取る個数（時間積分範囲）を増やすことと見立てて極限定理を導くという描像です．これに対してくりこみ群の描像はスケール変換に対する応答，つまりスケール変換方向を「時間」とみた力学系の「時間」発展，の分析という特徴があります．２０世紀的視点では前者がマルコフ性，後者は強マルコフ性の極めて特別な使い方，を柱にしているという見方もできると思います．普通の意味の時間の方向に眺める現在の確率過程論では Gauss 測度あるいは Brown 運動に対しては極めて強力で精密な結果を得ますが，これを裏から見るとむしろ Gauss 測度の特徴を利用した手段のように見えます.

フラクタル上の拡散過程はスケール変換の方向に眺めるくりこみ群の描像で構成されており，できあがった過程はユークリッド空間の Brown 運動と異なる漸近的振る舞いを持ちます．その意味で，２１世紀のくりこみ群は２０世紀の確率過程論が取り尽くしていないものを引き上げる２１世紀の解析学の期待を担うものです．今日ユークリッド空間上のスピン系や確率過程でくりこみ群が厳密に exponent まで出し得ているのは本質的に Gauss 測度あるいは Brown 運動に収束する場合だけです．これは２０世紀のくりこみ群が極めて不十分な水準にいるということです.

同志社大学の中村佳正さんは可積分系と確率モデルの関連として確率モデルの解析で平均場近似型の取扱いをすると可積分系が出てくることがあるという指摘をしました．スピン系の統計力学では，平均場理論はスピン波の自由度が互いに分離するという意味で「可解模型」になります．特に upper critical dimension（第 4節参照）より高い次元では平均場理論の exponent が正しい値になります．また，$\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$上の self-avoiding walk と呼ばれる確率過程については平均場近似に相当する結果は Flory による exponent の近似値として知られています．これについては upper critical dimension より高い次元 $d > 4$ で正しい値になるだけではなく，lower critical dimension $d = 2$ で可解模型が予想する値が Flory の近似値と一致しています．この意味で確率モデルの**平均場理論**と可積分系の関連は示唆的です.

K. G. Wilson はノーベル賞講演の中でくりこみ群は「平均場理論からの補正」を計算したいのだという言い方をしています．その意味では，可積分系とくりこみ群は相補的な役割を果たすように思います.

[6]Gauss 測度近傍のこと.

２１世紀には無限個の自由度がうまく分離するとき可積分系になって平均場理論が exact，そのような分離が見えないときくりこみ群，というふうに整理されていくかも知れません．もっとも，その頃には可積分系もくりこみ群もそれぞれ現在とは全く違う意味を表す言葉になっているでしょう．そうなるためには２０世紀のくりこみ群はもっと「分かりやすく」（代数的に）ならないといけない．くりこみ群解析の成功の根底にある代数構造の抽出を含むような代数学の革命が期待されます．

Gauss 測度のようなよく分かる固定点以外の固定点の場合 (non-trivial fixed point)，及び固定点から大きくずれたところ (large coupling) については，フラクタル上の系のような「くりこみ群解析に向いている」人工的な系でしか解けていません．くりこみ群解析に向いているという意味は，最初からくりこみ群の少数次元不変部分空間$\mathcal{P}$が明かなもの，例えば decimation に対する finitely ramified fractal や block spin に対する hierarchical model，を指します[7]．Barlow-Bass が扱った Sierpinski carpet の上の拡散は，Sierpinski carpet が infinitely ramified fractal なので，パラメータ空間が無限次元で，ユークリッド空間上の Brown 運動と異なる結果という意味で驚異的ですが，図形の持つ幾何的な対称性を徹底的に利用していて，各個撃破の例と言うのが適切です．理論物理学で言うくりこみ群は多くの場合根拠のはっきりしない近似や人工的な系からの類推でものを言います．

しかし，いくつかの一般的な理念は生き残るでしょう．

1. 無限自由度系の特徴的な現象である協力現象を扱うこと．
2. スケール変換に対する系の応答を調べること．
3. 諸量の漸近的振る舞いの指数 exponent が計算できること．
4. Universality．
5. $\mathbf{R}^{\mathbf{d}}$ ($\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$) 上の系の場合，上方及び下方臨界次元 (upper & lower critical dimensions) の存在．

Universality とは，臨界現象の研究において系が無限自由度で無限個のパラメータを含むにも関わらず，exponent が離散的な値しか取らず，ハミルトニアンを少し変えても exponent は変わらないという作業仮説です．言い換えれば，$\mathcal{P}$として少数次元空間がとれるという期待です．無限次元空間上の測度という巨大な問題から普遍的な解析手段を抽出できる期待は universality に基づきます．

$d$ 次元ユークリッド空間の統計力学では上方臨界次元 $d_u$ と呼ばれる定数があって $d > d_u$では臨界点直上から出発する trajectory が収束する固定点は Gauss 測度に対応していることが一般的に期待され，一部のモデルでは示されています．次元 $d$ が高いと各スピン毎に直接影響を受ける「近く」のスピンの個数が増えるので周囲の影響が局所的に平均化され，スケール変換をしても殆ど測度の分散だけに影響し，測度の形を変えない，つまり，中心極限定理的な状況になっていているという期待があり，実際その通りのことが有限の $d_u$で起こっています．逆に下方臨界次元未満 $d < d_l$では臨界点が「低温極限」$\beta = \infty$ に追いやられてしまうことも知られています．これらの臨界点の次元依存性はくりこみ群の結果の翻訳の問題としても重要だし，くりこみ群自体の成功と関わります[8]．

系は測度，即ち重みという正の量の足し算なので，不等式で押さえ込む手法が利用できます．物理的には熱統計力学系を考えているということに対応します．ここにはまだ言葉になっていない普遍的な解析学があり得るということです．

# 4　２１世紀のくりこみ群

２１世紀のくりこみ群の技術的内容を考えるにあたって canonical ensemble の定式化が次の意味で示唆的です．くりこみ群を固定点の周りで線形化するといくつかの方向に不安定で，残りの方向に安定になっています．不安定な方向を relevant，安定な方向を irrelevant と呼びます．$\mathcal{P}$に制限すれば固有値は少数個であり，これが exponent を定めると考えます．Canonical ensemble の定式化を行うとパラメータ $\beta \in \mathcal{P}$が実関数 $\{H_i\}$ の母関数の変数になります．もし，$H_i$達が下に有界，従って正，にとれるならば Perron-Frobenius の定理によって最大固有値の方向が relevant になります．これは統計力学で言う温度パ

[7] くりこみ群向きの人工的な系としては，他に極めて高い次元からの「展開」，系が trivial になる次元を $d$ とするとき $d \pm \epsilon$次元を考えて，$\epsilon$で「展開」するなどあります．

[8] 下方臨界次元と上方臨界次元の間の次元における臨界現象，特に exponent の値，は２０世紀の物理としても不十分な状態です．不幸なことに実際の世の中，３次元，は多くの系にとって「間」の次元です．確率過程についても，３次元 self-avoiding walk は正確なことが分かっていません．

ラメータ，場の量子論では action の質量項の役割にほぼ相当し，これが relevant になるのは自然です[9]．そこで固定点においてこの方向に「直交」する方向に制限して考えます (critical surface)．くりこみ群解析の結果を元の問題に再翻訳するときに特に必要なのは critical surface の中から出発したときの固定点への収束と，固定点においてくりこみ写像を線形化したときの relevant（不安定）な方向への固有値です．固定点への収束を言うためにはくりこみ群を critical surface に制限したときの固定点の安定性が必要です．しかも，局所的な線形化された問題ではなく元の問題 (canonical surface) を含む程度に大局的な非線形の問題を扱う必要があります (large coupling)．この意味で力学系という観点からは，２１世紀のくりこみ群は不動点定理の定量化と Perron-Frobenius 根以外の方向の非線形的な分析を包含しています．

くりこみ群の解析結果を元の問題に翻訳する点についても canonical ensemble は示唆的な定式化です．くりこみ群の trajectory は parameter $\beta$の変化を追跡しますが，canonical ensemble で分布の Laplace 変換を考えるとちょうど$\beta$の変化が Laplace 変換の変数に対応します．従って，くりこみ群の解析結果の再翻訳は分布の Laplace 変換の漸近形から分布自体の漸近形を得る操作を含みます．これは，２０世紀の物理では canonical ensemble から micro canonical ensemble への熱力学的対応，数学では large deviation あるいは Tauber 型定理，として理解されています．背景となる物理学的根拠は熱力学的安定性，即ち比熱の正値性ですが，これは自由エネルギーが凸関数であることを意味し，後者はある Tauber 型定理の仮定として用いられています．

ところで「フラクタル上の漸近的に一次元的な拡散過程」では遷移確率の空間に対してくりこみ群を考えていて，canonical ensemble は出てこないのではないかという質問を横浜市立大学の藤井一幸さんから受けました．実はスピン系の統計力学や場の量子論でも似た事情はあります．第 2節で考察すべき測度を

$$\mu_\beta(A) = \sum_{\sigma\in A} \exp(-\sum_{i=1}^{k} \beta_i\, H_i(\sigma))\,,$$

と書き，和の記号を定義するために一旦有限自由度系で近似してから無限体積極限や連続極限を取ると説明しました．これは力任せの定義と言うべきもので，たいへん適用範囲の広い定式化だけれども数学的に煩雑なものです[10]．この表式は測度の定義としてみたとき$\sigma\in\Omega$の a priori measure として一様分布を採用して，これに Hamiltonian を導入して$\mu_\beta$を定義しています．もし,（特に極限操作との関係で）一様分布よりも適切な measure $P_\gamma$が定義されていれば,

$$\mu_\beta(A) = \int_A \exp(-\sum_{i=1}^{k'} \beta_i\, H'_i(\sigma))\, P_\gamma(d\sigma)\,,$$

のように分けて考えることもできます[11]．まず$\beta = 0$ とおいて$\gamma$の張る空間におけるくりこみ群を調べ，それから$\beta$の張る空間でのくりこみ群を考えるという２段階に分けることができるとき，このような書き方が特に有効です.「フラクタル上の漸近的に一次元的な拡散過程」では $P_\gamma$を random walk の確率とし，Hamiltonian は概略 path の長さにとって，主定理の証明をする際に分枝過程の極限定理としてくりこみ群の解析の第２段階を行います．

確率過程に対するくりこみ群の適用に関してはスピン系に翻訳する道も考えられます．確率過程の時間変数 $t$ についての Laplace 変換を行うと，少なくとも拡散過程の場合は自由場の理論と測度の期待値のレベルで対応がつきます (Feynman-Kac formula)：

$$E^{(p,\beta)}[\sigma(x)\sigma(y)] = p\int \mu_\beta^y(X[0,t]\ni x)\exp(-pt)\,dt\,.$$

スピン系へ翻訳すると parameter 空間が一次元増えます．

---

[9]例外もあります．Kosteritz-Thoules 型相転移を行う２次元 XY 模型の低温側は固定点がびっしり並んでいると見られています．

[10]「何十ページにもわたる不等式の連続」というため息と，多くのまじめに取り組もうとしている研究者に二の足を踏ませることの，原因の一つだと思います．

[11]この形に書くと２０世紀のくりこみ群で Gauss (Wiener) 測度の近傍（「漸近自由な領域」）が解析しやすい理由が分かるかと思います．

第 2節では decimation と呼ばれるスケール変換の方法を説明しました．新しい１自由度が $G$ の距離で計ったとき近くに「住む」複数の自由度の代表になっているというのが「協力現象」を解析する精神的根拠です．何らかの意味で「近くに住む」自由度を消して「粗い」自由度だけを残す操作ならば，くりこみ写像の資格があると見るべきです．$G$ がユークリッド空間のときは decimation ではなく，並進対称性という強い性質を考慮したより強力なスケール変換が用いられます．Wilson に始まる blockspin くりこみ群と Callan, Symanzik に始まる運動量空間での連続くりこみ群があります．

Blockspin くりこみ群は $G = \mathbf{R}^{\mathbf{d}}$（正しくはその格子近似 $G(M,\epsilon) = \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$）を直方体分割して分割された各 cell 毎にその中に住む自由度の値の平均値を自由度として残す操作を行います．運動量空間での表現というのは $G = \mathbf{R}^{\mathbf{d}}$の場合 $x \in G$ についてのフーリエ展開を考えると$\Omega$上のユニタリー変換に持ち上がるので，これを用いて canonical ensemble の「和」の定義に出てくる基底 $\{\sigma(x) \mid x \in G(M,\epsilon)\}$ を変換することで行います．スケール変換はフーリエ展開の変数（運動量あるいは波数）$k$の大きいところに対応する自由度$\tilde{\sigma}(k)$ を消去（積分）する操作と見ることができます．この方法の特徴は無限体積極限 $M \to \infty$ をとるとフーリエ変換の変数が連続な値を取ることになり，無限小スケール変換に対する系の応答を見る可能性が生じることです.「フラクタル上の漸近一次元的拡散」では decimation を用いました．各手法の統一的記述ないしは問題に応じてどれを選ぶべきかを決める手続きの可能性は知られていません．

スケール変換$\Lambda^*$は$\lambda$に比べて近い距離のところの自由度（スピン変数）を無視しますから，退化演算子になります．その意味でこの一連のくりこみ操作を粗視化 (coarse graining) とも言います．周辺分布を取るとき，残った１自由度$\sigma(\lambda x)$ 辺り無限個の自由度を積分すると発散します．スピン系の統計力学では「単位体積あたり」有限個しか自由度がないので問題ありませんが，場の量子論や連続確率過程では問題を起こします．この操作を well-defined にするには単位体積あたりの自由度を有限にします．$G$ の代わりに $G(M,\epsilon)$ を用いるということです．スケール不変性の要請から$\lambda G(M,\epsilon) \subset G(\lambda M,\epsilon)$ を満たすように選ぶ必要があります.「フラクタル上の漸近的に一次元的な拡散」では連続過程，即ち $G$ に値を取る連続関数の上の測度を構成するのに $G_0$上の random walk をとる離散化を行いました．

くりこみ群は離散近似した系の連続極限をとるときの極限構成にも有効です．くりこみ群の trajectory を解析した上で trajectory に逆らって進むスケール縮小 $\lim_{N\to\infty} T^{-N}$を考えることに対応します．これは場の量子論の構成に利用することができます．

時空４次元の場の量子論で相互作用を持つもの[12]で，構成できると期待されている理論は固定点直上理論ではなく，漸近自由理論と呼ばれるものです．このような理論では exponent に log correction がつくことが期待されています．また，上方臨界次元直上の統計力学でも log correction がつくのが期待されています．これらはある意味でスケール変換の無限小の破れが自明でない効果を与えることだと見ることができます．これは２０世紀くりこみ群の重要な発見的成果でした.「フラクタル上の漸近一次元的な拡散過程」は直上理論以外の例であってかつ log correction の出てくるものという隠れた狙いがありました．

Gauss 測度以外の固定点（非自明固定点），例えば upper critical dimension より低い次元のスピン系の臨界現象や self-avoiding walk の統計力学，固定点から parameter が大きくずれている場合 (large coupling)，例えば 3 次元 Ising model と$\phi^4_3$-model が同じ universality class に属することや非可換ゲージ場の理論の confinement などがくりこみ群の目標でしょう．

## 5　現在との会話

現在のくりこみ群や現在の実解析的な手法と密接な関係があることは今まで述べてきました．ここでは，書き残した印象を補足します．

力学系というと，カオスが連想されます．カオスが２１世紀の数学の鍵かもしれないと言った友人もいます．くりこみ群の解析が成功するのは巨大な自由度，即ち無限次元パラメータ空間，がくりこみ群で写像すると最終的には固定点に近づくこと，及び取り扱いたい量が少数次元部分空間へくりこみ群を制限した写像で決まることによります．くりこみ群はとても性質の良い力学系であるということです．この意

[12]場の量子論の教科書を参照下さい．

味ではカオスとは negative な関係が見えます．連想される分野が遠い関係に見えるというのは奇妙なことで，その真相は分かりません．

KAM の理論は力学系の問題の解決にくりこみ群の描像を持ち込んでいる側面があります．２１世紀のくりこみ群には解析的な収束性の問題を含めて期待しているので，示唆的です．但し，くりこみ群は canonical surface から固定点まで大局的な構造を解析するものです．その分力学系としては元の問題を反映した性質の大変よい力学系になっているべきです．

確率過程やスピン系以外の例として（非線形散逸系）偏微分方程式についてくりこみ群との関係を考えます．関数空間を張る適当な完全系で展開することを考えれば偏微分方程式も無限自由度系の問題です．時間発展の漸近的性質を支配する自由度だけを残す自由度の逓減が課題になりますが，これはくりこみ群における無限自由度系の少数次元化の問題と同じ性質の課題です．しかし，第 2節で説明したような測度，特に canonical ensemble，を扱う問題ではないため，第 2節のくりこみ群との技術的関連はこれだけでは見えません．

ところで，もし流体力学極限が何らかの広い意味で確率モデルから（非線形散逸系）偏微分方程式を導く極限であるならば，これを逆に見て，偏微分方程式が与えられたときこれを流体力学極限として持つ確率過程を見つけ，そこでくりこみ群分析をして結果を偏微分方程式の性質に再翻訳するというお話が考えられます．世の中の非線形散逸系，例えば生きとし生けるもの達，は原子レベルの激しい熱的攪乱の中でパターン形成と維持[13]を行うのですが，それがマクロスケールでは熱散逸を行いつつパターンを形成維持する決定論的偏微分方程式に従うように見えます．従って，一見迂遠に見える下部構造としての確率過程からの接近は単に問題を複雑にするだけという以上の何かがあると思います．確率過程のレベルでは第 2節のくりこみ群は自然な意味を持ちます．

パターン形成との関連ではスピン系の統計力学系の協力現象にも示唆があります．一次相転移というのがあって，これは第 2節のくりこみ群の話がそのままでは通用しません．一次相転移は correlation length が発散しないので，Hamiltonian による parametrization の意味では相転移点がくりこみ群の固定点の critical surface に乗らないということです．しかし，無限自由度の協力現象がなければ相転移は何次だろうと起きません．一つの見方は boundary condition の影響ということで，これは topological term の付加のような解決があるのかも知れません．これを裏から見ると自発磁化のパターンあるいは configuration の correlation の問題ともみえます．

平衡系統計力学が静的な問題なのに対して，ノイズつきの偏微分方程式は動的くりこみ群の問題です．もし，揺動散逸定理 (fluctuation dissipation theorem) の成立を要請すれば拡散項と noise 項は関連することになり，自然な noise の入れ方という視点が生じます．揺動散逸定理は線形応答理論，即ち統計力学系の平衡からのずれが微小であるときずれの一次について成り立つ関係式として理解されます．このように理解すると，ノイズつきの散逸系偏微分方程式の背後には平衡系統計力学があって，そこからの微小なずれを記述したものとしてノイズつきの偏微分方程式をとらえるという立場が考えられます．背後にある平衡系統計力学に対してくりこみ群解析を適用することで，偏微分方程式の漸近的性質についての解析を行えないかが興味になります．京都大学の高崎金久さんはくりこみ群の universality の描像を押し進めて揺動散逸定理を満たさないノイズでも漸近的性質は特別なノイズの場合に帰着する可能性を語っていました．

２０世紀の物理学から見たときのくりこみ群の技術的ポイントは例えば次のような点です．

1. Canonical ensemble を考えるとき，物理では $H_i$ は Hamiltonian を構成する各項で，その係数の比 $\beta_i/\beta_j$ は物理定数として決まっています (canonical surface)．くりこみ群では物理的に定まっている Hamiltonian を一旦バラバラにしてくりこみ写像で不変な空間 $\tilde{\mathcal{P}}$ の中に埋め込んで考えます．

2. 有限自由度近似でくりこみ群を定義してから「有限自由度の無限回の繰り返し」として無限自由度に迫ります．確率過程や場の量子論のような連続時空上の系に対しては離散近似します[14]．微分法

[13] 偏微分方程式の可積分系ではソリトンや衝撃波といった，「まとまった形」が解として登場します．まとまった形という意味でパターン形成との関連が散逸構造という視点を意識しつつ注目されていると理解します．

[14] この離散化を，細かい構造即ち Fourier 成分の大きいところ即ち高波長という類推で，‘ultra-violet cut off’ と呼びます．先程述べたようにこれ以外にくりこみ群を well-defined にするには全体を有限次元自由度系で近似してからくりこみ群を定義します．

の類推ではこれが差分をとってから極限を考える基本的な微分の定義に対応すると思います.

3. Coarse graining の操作において，新しい１自由度は近くに「住む」多くの元の自由度の代表を表現します．近くの自由度どうしは遠くの自由度に比べて「似た振る舞い」をしていると見ることができる系ではこの代表自由度は「協力現象」を表現すると考えられます．そしてくりこみ写像 $T$ を繰り返すほどより多くの自由度が一つの自由度で代表されることになるので $T$ の trajectory の漸近的振る舞い $T^N\beta$ を調べることが無限自由度の協力現象を解析する手段になる期待が持てます．これが Kadanoff や Wilson のくりこみ群の思想の出発点です.

4. くりこみ群で言う universality は operator の relevance という描像から exponent の離散性や普遍性を説明します.

最後の項の exponent の算出や universality という言葉からは回転群などのリー群の表現や指標を連想します．実際，conformal field theory では臨界現象の exponent を代数的方法で表現の指標として「導いて」います．例えばユークリッド平面上の複素関数について素朴な回転操作を考えると $2\pi$ の回転で系は元に戻ることから consistency の要請をおくと，この関数は $\exp(im\theta)$, $m \in \mathbf{Z}$, という形だけが許されることになります．$m$ は表現論における指標とみてもいいし，物理で言う spin とみてもよい．Conformal field theory ではさらに，２次元平面を複素平面とみなして，その上の正則関数の系に制限して考える (conformal invariance) ことで，回転に対する系の応答 (spin) の離散性をスケール変換に対する系の応答 (exponent) に結びつけます．$2\pi$ の回転で系が元に戻ることから関数は $\exp(im\theta)$, $m \in \mathbf{Z}$, という形に決まりますが，さらに $z = \sigma + i\theta$ に関して正則という要請をおくと $z^m$, $m \in \mathbf{Z}$, と決まります．このとき動径方向 $r = \exp(\sigma)$ を $\lambda$ 倍すると $z^m$ は $\lambda^m z^m$ となりますから，スケール変換に対する指標，exponent，は $m$ と決まります．これは大変おもしろい発展があるため流行しているようです.

しかし，正則性の要請をおくには何らかの意味で２次元系を扱わなければならないことと，正則性の要請を統計力学の言葉に置き換えると臨界点直上理論のみが扱えることが気になります．臨界現象は３次元にも２次元にもあるので共通の原理があると思いたい．また，臨界次元における exponent の log correction ををどうやって取り込むのか問題です.

Conformal field theory で回転の表現に引きずられてスケール変換に対する系の応答が exponent の離散化として制限されるのは，回転のようにスケール変換にも何らかの consistency が結果的にあると推測されます．スケール変換は拡大縮小操作ですから，conformal field theory の立場における exponent の離散性の導出は無限遠方の境界条件に由来しているはずです．今日の無限自由度系の物理学，特に臨界現象の統計力学，の教えによると少なくとも lower critical dimension より高い次元では exponent は無限遠方の境界条件の性質ではなく体積的な効果によって決まります．それが協力現象という言葉の意味です．高い次元では周囲のスピンの影響が大きいので，局所的な構造で決まり，遠方の影響は小さい．無限遠の境界条件から consistency condition を導くという立場は例えば３次元以上のスピン系の統計力学の exponent を理解するのが難しいと思います．低い次元では逆に遠方の影響，すなわち topological な性質が強く効きます．Conformal field theory や２次元重力理論はそのようなところを利用しているように見えます．高崎さんは自由度がゼロのために下の空間（第 2節の $G$）の位相構造が見えるという言い方をしました.

以上との対比で考えればくりこみ群で言う universality が consistency condition ではなく operator の relevance という描像から exponent の離散性や普遍性を説明することの概念上の重要性が見えると思います.

最後に強調します．２０４１年というのは「当分できない」という意味ではありません．若い方にとっては２０４１年は研究目標の問題です．この数字を１０年でも２０年でも早めたとすると，もっと大勢の方の問題になります．２０４１年，あるいはその２０年前，に突然革命的理論が天から降ってくるのではありません．それに先だって明確な問題意識と（後から振り返ってみたとき）決定的な成果が存在しているはずです．更にそれに先だって少なくとも漠然とした違和感と先駆的な典型例の蓄積が必要です．２０４１という数字は,「現在」が少なくともその先駆的時代に入っていることを表します．多くの分野で個別

こちらを ‘infra-red cut off’ と呼びます.

に暗黙のうちに蓄積された例題が，あるとき明示的な言葉で統一的に認識されたとき，２０世紀のくりこみ群を当たり前の結果として包含するほどの革命的進歩が起こると思います．それが２０４１年の革命であり，その成果が２１世紀のくりこみ群です.

## 参考文献


[1] 服部哲弥，原隆，田崎晴明「構成論的場の理論」月刊フィジックス 5 (1984) 613-617

[2] 服部哲弥「Network 上の自由場」上智大学講究録 23 (1986) 101-117

[3] 服部哲弥「フラクタル上の確率過程」数理科学 340 (1991) 42-48

[4] 服部哲弥「Sierpinski gasket 上の漸近的に一次元的な連続マルコフ過程の構成」京都大学数理解析研究所講究録 783 (1992) 46-64

[5] 服部久美子，服部哲弥，楠岡成雄「３次元 Sierpinski Gasket 上の self-avoiding paths」京都大学数理解析研究所講究録 783 (1992) 65-75

[6] 服部哲弥「フラクタル上の漸近的に一次元的な拡散過程」統計数理研究所共同研究レポート (1993) 掲載予定