くりこみ群，２０４１年現在

服部哲弥

於 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 1-309 教室

	最終講義の目次	今日の目次
1.	どんな問題が世の中にあったか	老人の昔話
2.	どんな革命があったか	くりこみ群登場
3.	その中のどんなことに関わったか	まじめな話
4.	どこで取り残されたか	２０４１年現在

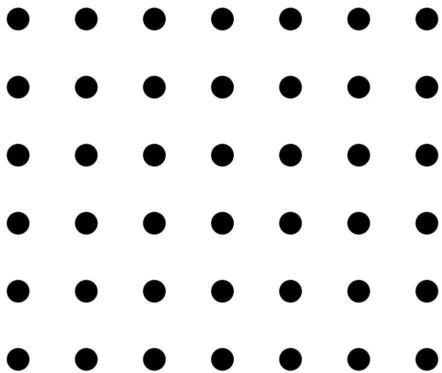
１．老人の昔話

スピン系の平衡系統計力学（と場の量子論）

・スピン系：成分は分子１つの状態を表し，添字は分子の場所．我々は添字の空間に住む．

添字が $\mathbb{Z}^d$ の確率変数 ϕ ＝**sample(配位) が** $\mathbb{Z}^d$ **上の関数**

index set



・平衡系統計力学： $e^{-H(\phi)/T}$

関数の集合の上の確率測度の族

$$E_N[\cdot] = Z_N(T)^{-1}\int \cdot e^{-H_N(\phi)/T} d^N\phi \qquad (N\text{: 粒子数})$$

無限自由度：熱力学極限 $N \to \infty$

目標：熱力学＝温度パラメータ T 依存性

H_N が$\mathbb{Z}^d$ **の距離を尊重**　＝　伝言ゲーム.

例： $H_N = \sum_{|x-y|=1} (\phi_x - \phi_y)^2 + \cdots$

H 低いほど高確率→揃う？No!　エントロピー S

$$\int \cdot(E) e^{-H/T} d\phi = \int \cdot(E) e^{S(E)-E/T} dE$$

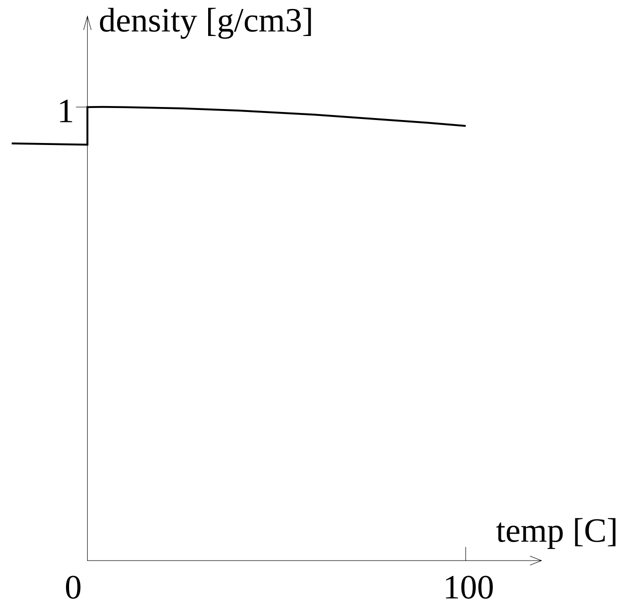
+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+		+	-	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+

H=0, 1 config　　　H=4, N configs

・**温度** T ＝「風が吹けば桶屋が儲かる」の解釈を変えるパラメータ

低温 $T \ll 1$:「因果応報」　H の低いところ

高音 $T \gg 1$:「捕らぬ狸の皮算用」　大きい H も



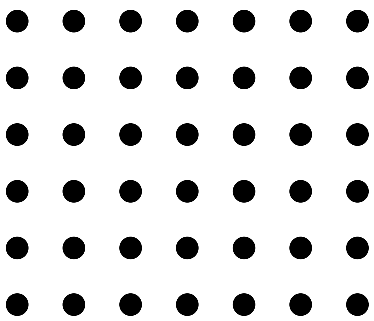
途中の T の現実：相転移. $T = 0°C$ で水が氷に.
有限自由度 ⇔ 積分記号下の微分

⇒　無限自由度ゆえの特異性, 現実を無限系と思うほうが良い見方

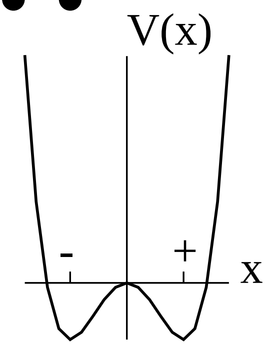
・**協力現象**：多数の自由度の「伝言」で大きな効果

・モデル化

$$e^{-H_N(\phi)/T} d^N\phi;\ H_N = \sum_{|x-y|=1} (\phi_x - \phi_y)^2 + \sum_x V(\phi_x)$$



+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	-	-	+
+	+	-	-	-	-	+
+	+	-	+	-	+	+
+	-	-	+	-	-	+
+	+	-	-	-	+	+



+	+	+	+	+	+	+
+	-	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+

low temp

+	-	+	-	+	-	+
-	+	-	+	-	-	+
-	+	-	-	+	+	-
+	-	+	+	-	-	+
-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	-	+	+	+

high temp

・特異性　ー　臨界温度 T_c ではどうなるか？

- 協力現象＝無限自由度
  → $T \downarrow T_c$ で次第に遠くのスピンまで揃う
- スケーリング　相関距離 $\xi \sim (T - T_c)^{\nu}$
- 指数→ sample は ξ までの距離は自己相似
- 臨界現象は sample のギザギザの効果
  ←距離空間上の関数の上の確率

+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+
-	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-
-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	+
+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-
+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	+
-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+	-
-	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+	+	+	-	+

２．ここでやっとくりこみ群登場

K.G.Wilson, J.Kogut (1974)

Physics Reports **12** (1974) 75–200.

PHYSICS REPORTS (Section C of Physics Letters) 12, No. 2 (1974) 75–200. NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

THE RENORMALIZATION GROUP AND THE ϵ EXPANSION*

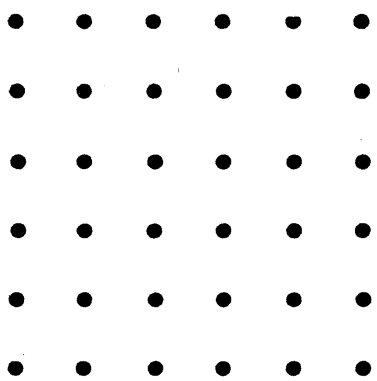
Kenneth G. WILSON
Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. 08540, USA
and Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, N.Y. 14850, USA†

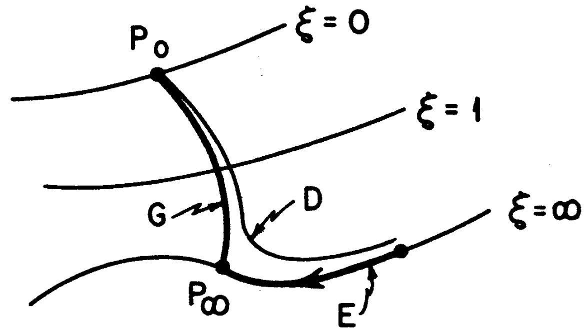
and

J. KOGUT‡
Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. 08540, USA

Received 2 July 1973

くりこみ群以前とくりこみ群以後





・くりこみ群：観測精度のスケール変換のパラメータ空間における表現

+ + + -	+ + - -	+ + - -
+ + + +	- - - +	- - - +
+ - + +	- + - -	- - - +

+	+	-
+	-	-
+	-	-

・くりこみ群の**メッセージ**：統計力学の臨界現象は力学系（くりこみ群）の軌道追跡で理解できる

・イメージ：ギザギザを見ないでその効果が分かる

補足：$\boxed{\text{Ising 模型の数学的構造と現実の相転移の関係？}}$

Universality 仮説：この数学的構造こそ，現実の臨界現象の本質をとらえている．

＝　H が自然界のものと違っても，**臨界指数**は合っている，という，手前味噌もいいところの作業仮説．

→　$\boxed{\text{くりこみ群の描像は（部分的に）それを説明する！}}$

くりこみ群の不十分な定義：**無限自由度**系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

1．距離空間上の関数の集合上の，距離を尊重する確率測度について，**観測精度のスケール変換**に対する変化を適切な**パラメータ空間**上の力学系として表現

2．追跡すべき軌道が**大局的**に素直

3．軌道の**固定点**近傍の振舞が対象の漸近的性質を決定

「くりこみ群，2041 年現在」
統計数理研究所リポート **48** (1993.10) 139–147.

「いくつかの一般的な理念は生き残るでしょう.

1. 無限自由度系の特徴的な現象である協力現象を扱うこと.
2. スケール変換に対する系の応答を調べること.
3. 諸量の漸近的振る舞いの指数が計算できること.
4. Universality.
5. $\mathbb{Z}^d$ の場合，上方及び下方臨界次元の存在.」

cf. 大局的.　未：普遍性，臨界次元

３．まじめ（だけど退屈）な話

$\mathbb{Z}$ 上の path 上の確率測度（確率連鎖）のくりこみ群

・くりこみ群の**うまくいく部分をもっともやさしい**モデルで説明

$w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$：**距離空間に値をとる関数**

距離構造の尊重：一歩ごとに隣に移る (path)

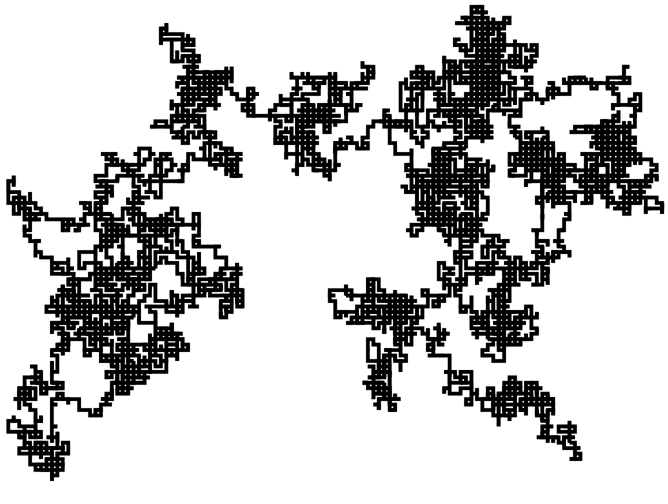
$$\Omega = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z} \mid |w(i+1)-w(i)| = 1,\ i = 0, 1, \cdots\}$$

Path 集合 Ω 上の**確率測度**（確率連鎖）

・ギザギザを見ないでその効果（**指数**）が分かる

$\mathrm{E}[\ w(k)^s\ ] \sim k^{\nu s}$. CLT, LIL, Hölder, ...

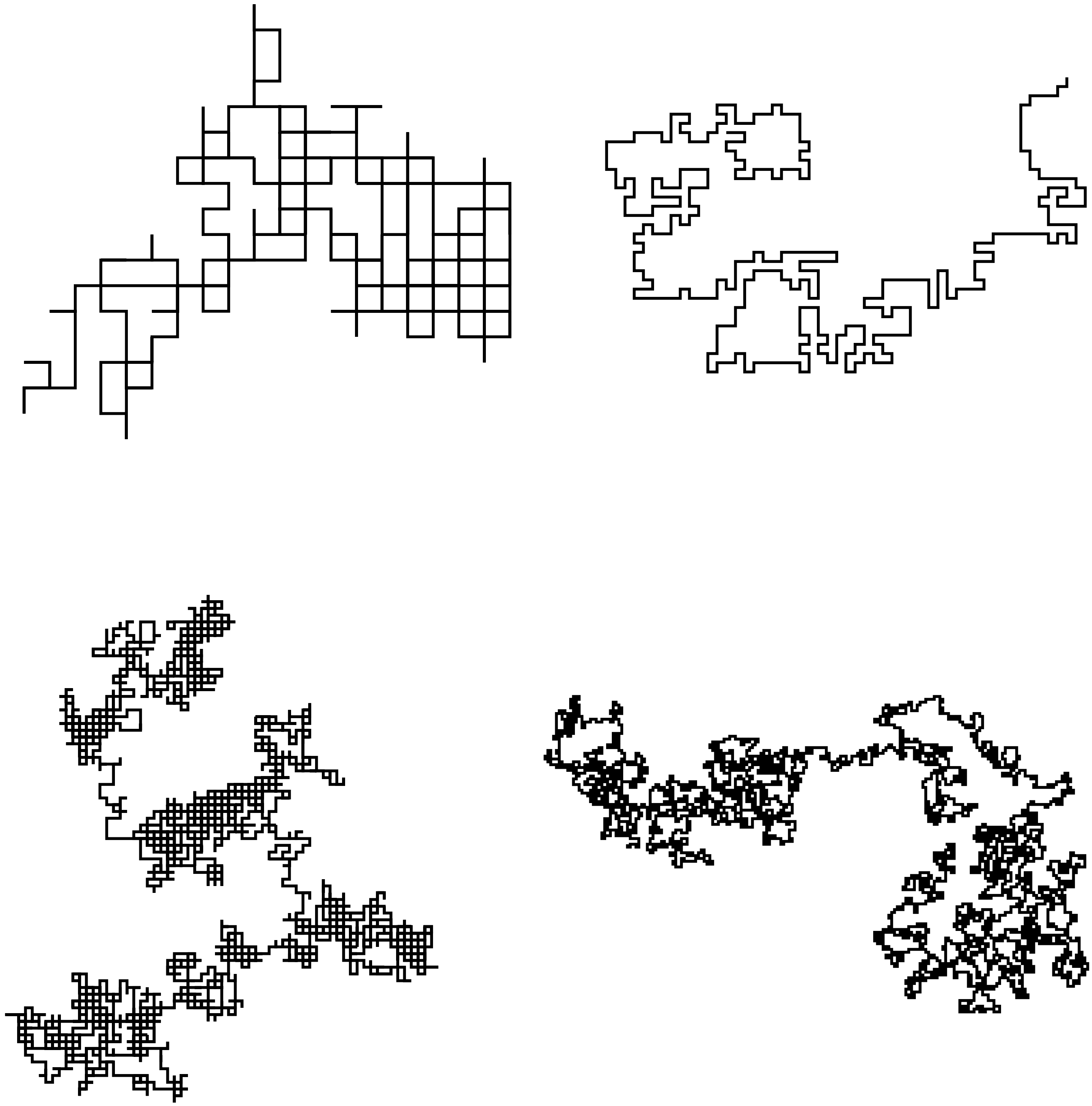
・ギザギザ：あらゆるスケールの構造（自己相似性）



・微分不可能な関数の解析学 (K.G.Wilson ノーベル賞講演)

・マルコフ性と別の枠組み（非マルコフ）

マルコフ連鎖を遷移確率の差分拡散方程式で理解するように,「ギザギザ方向の力学系」で理解する確率連鎖



指数の恩恵．図を書くアルゴリズム

$5000^{3/4} = 600 \Rightarrow$ int x[5000],y[5000]; char traj[600][600];

・統計力学との対応

$e^{-H_N/T}$: configuration を sample とする測度

端点固定の path 集合 $\tilde{\mathcal{W}}_n$ に対して歩数 L の母関数

$$\sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} b_n(w) z^{L(w)},\ z = e^{-1/T} \Rightarrow L = H$$

Path 上の確率測度が対応（後述）

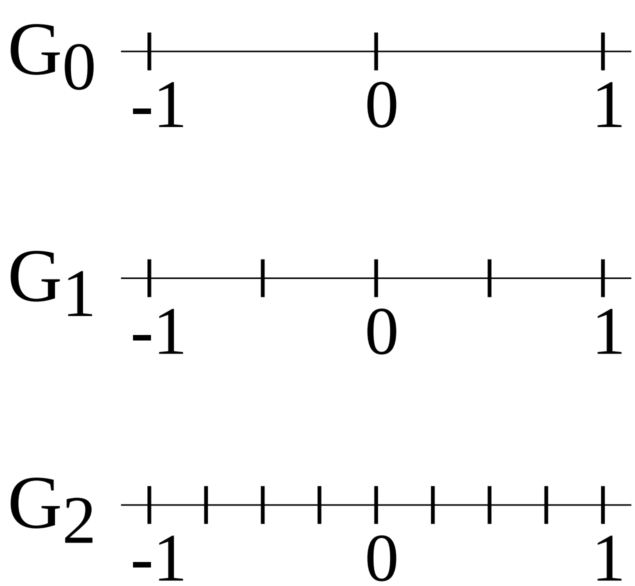
無限自由度： $L \to \infty \ \Leftrightarrow \ n \to \infty$ 漸近的性質

（タウバー型定理）

$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$. G_n 上の path の集合 $\mathcal{W}_n =$

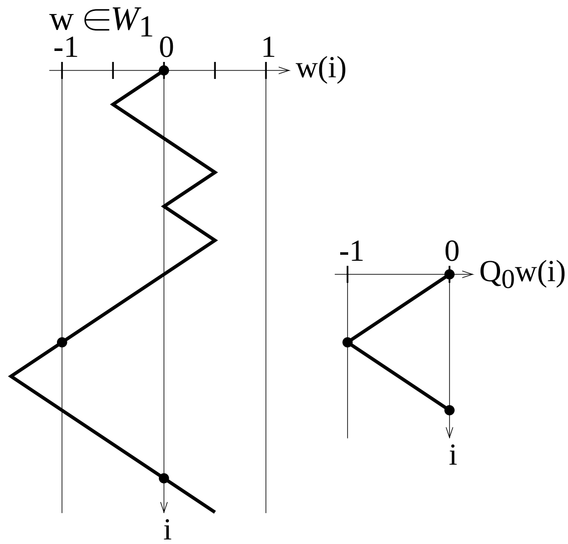
$$= \{ w : \mathbb{Z}_+ \to G_n \mid w(0) = 0,\ |w(i) - w(i+1)| = 2^{-n} \}$$

説明の都合上いったん細かい方向に増やしていく

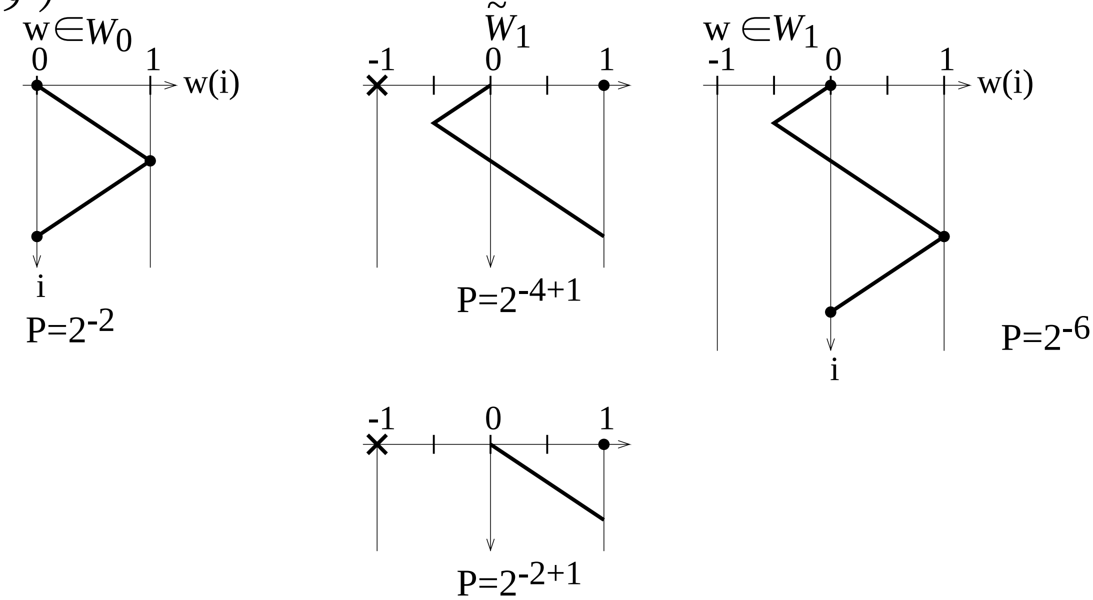


Decimation $Q_n: \mathcal{W}_{n+1} \to \mathcal{W}_n$：精度のスケール変換

$$(Q_n w)(i) = w(T_{n,i}(w));\ T_{n,0}(w) = 0,\ T_{n,i+1}(w) =$$
$$= \inf\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i}(w))\}\}$$



・歩数の母関数と**くりこみ群**（を先に定義して**Path 集合上の確率測度**はそこから自然に定める）
Q_n^{-1}: decimation の逆　ー各 1 歩に**細かい構造**を追加
$\tilde{\mathcal{W}}_1$（G_0 上の path で，　$0 \to 2$ で -2 を通らないもの）と相似（歩幅固定に戻す）



総歩数 L の母関数

$$\Phi_1(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_1} b_1(w) z^{L(w)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

・条件 (i) $c_2 > 0$, (ii) $(\forall k)\ c_k \geqq 0$, (iii) $\exists k \geqq 3;\ c_k > 0$, (iv) 収束半径 $r > 0$.　　（注： $c_0 = c_1 = 0$）

$\tilde{\mathcal{W}}_n$ （G_n 上の path で， $0 \to 2^n$ で -2^n を通らないもの）における総歩数 $L = T_{0,1}$ の母関数

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L(w)} \mathrm{bn(w)}$$

$n \geqq 2$ はくりこみ群で定める：細かい構造 $\tilde{\mathcal{W}}_1$ の付加による歩数の母関数の変化

$$\boxed{\Phi_n(z) = \Phi_1(\Phi_{n-1}(z))}$$

くりこみ群： Φ_1 が定める力学系

命題. (i) $\exists! x_c \in (0, r)$; $\Phi_1(x_c) = x_c$. (ii) $\lambda = \Phi'(x_c) > 2$.
(SRW: $x_c = 1/2$, $\lambda = 4$)
$\tilde{\mathcal{W}}_n$：G_0 上の path で，$0 \to 2^n$ で -2^n を通らないもの

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} b_n(w) z^{L(w)}$$

・ $\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = b_n(w) {x_c}^{L(w)-1}$ は $\tilde{\mathcal{W}}_n$ 上の確率

定理. $\displaystyle\sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} e^{-s\lambda^{-n}L(w)} \mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = \frac{1}{x_c} \Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s} x_c)$ を母関数とするスケールされた歩数分布が $n \to \infty$ で弱収束する.（＋種々の詳しい性質.）

・前ページの言ったことの「気持ち」
○くりこみ群 (関数 Φ_1) は path 集合 $\tilde{\mathcal{W}}_n$ 上の確率を決める いろいろ作れる
○ 歩数 $L = k \sim \lambda^n$ で位置 $x = 2^n \to x \sim k^\nu$; $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$
(「ギザギザ」の度合いを示す指数！)
○つまりくりこみ群が確率連鎖を定め，その連鎖の漸近的性質（指数）もくりこみ群から定まる
→次ページ以下できちんと言い直す

$(\tilde{\mathcal{W}}_n, \mathrm{P}_n)$: 端点固定，有限，不定長の path の上の測度
$\downarrow$
・ 拡張定理によって確率連鎖（無限長 path 上の測度で，k 歩目の位置 W_k が可測）が構成できる．
$(\tilde{\mathcal{W}}^r_n, \mathrm{P}_{r,n})$: $0 \to -2^n$ で 2^n を通らないもの
定理． $\mathrm{P}[\ W_j = w(j),\ j \leqq k\ ] =$
$\frac{1}{2} P_n [\{w' = (w'(0), \cdots, w'(L(w'))) \in \tilde{\mathcal{W}}_n \mid w'(j) = w(j)\ ,\ j \qquad k\}]$

$+ \frac{1}{2} P_{r,n} [\{w' = (w'(0), \cdots, w'(L(w'))) \in \tilde{\mathcal{W}}^r_n \mid w'(j) = w(j)\ ,\ j \qquad k\}]$
が， $|w(j)| < 2^n$ $(0 \leqq j < k)$ を満たす自然数 $n = n(w)$ に対して成り立つような $\{W_k\}$ が存在する．

定理（重複対数の法則）． $\{W_k\}$ について重複対数の法則が成り立つ．即ち，$C_\pm > 0$ が存在して

$$C_- \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{k^\nu (\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C_+ .$$

ν はくりこみ写像 Φ_1 の固定点 x_c での微分係数 $\lambda = \Phi'(x_c)$ を用いて $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ で与えられる．

Φ_1（path の構造）＋ recursion（くりこみ群） $\to$ あらゆるスケールの構造「複雑なギザギザ」，漸近指数がくりこみ群だけで得られる cf. SRW の場合定理 B-C-2 (e.g. Feller)

要約. 1変数関数 Φ_1 に対応する $\mathbb{Z}$ 上を動く確率連鎖に対して一般化した重複対数の法則が得られる.
Φ_1 はべき級数展開が2次以上の項からなって係数が全て正ならば良い.
重複対数の法則は平方根の代わりに ν 乗に一般化されるが，ν は Φ_1 の固定点での微分係数だけで定まる.
・マルコフ性以外で，豊富な確率連鎖を組織的かつ具体的に作り出す新しい方法

・W_k の分布？LIL $\to$ LLN だが，指数は「普通」の CLT と異なる（非マルコフ　$\to$　新しい枠組）
モーメント（displacement の指数）

定理（Hattori–Hattori, 2003) $\exists$ 確率連鎖（無限長 path 上の確率測度の族）P_u, $u \in [0,1]$;
1. $u=1$: 1 次元単純ランダムウォーク
2. $u=0$: $\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding path（直進）
3. Displacement の指数 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_u[\,|W_k|^s\,]$ $= s\nu_u$, $s \geqq 0$, が u について連続

証明. SAP の歩数の母関数 $\Phi_{0,1}(z) = z^2$
SRW の歩数の母関数 $\Phi_{1,1}(z) = \Phi_1(z) = \dfrac{z^2}{1-2z^2}$
内挿は容易！ $\Phi_{u,1}(z) = \dfrac{z^2}{1-2u^2z^2}$
$\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$, $\lambda_u = \Phi'_{u,1}(x_{c,u})$, $x_{c,u} = \Phi_{u,1}(x_{c,u})$
Displacement の指数を得るには反射原理が必要
・くりこみ群を第一原理とすることで見つけた
・Sierpiński gasket でもできる

難関 (1) くりこみ群が無限次元 (infinitely ramified) $\mathbb{Z}^d$
難関 (2) スケール不変でない場合大局的な軌道の追跡.
有限次元でも難しい. dSG 上の SAP(Hattori–Hattori–Kusuoka ’90–’93, Hattori–Tsuda ’02)

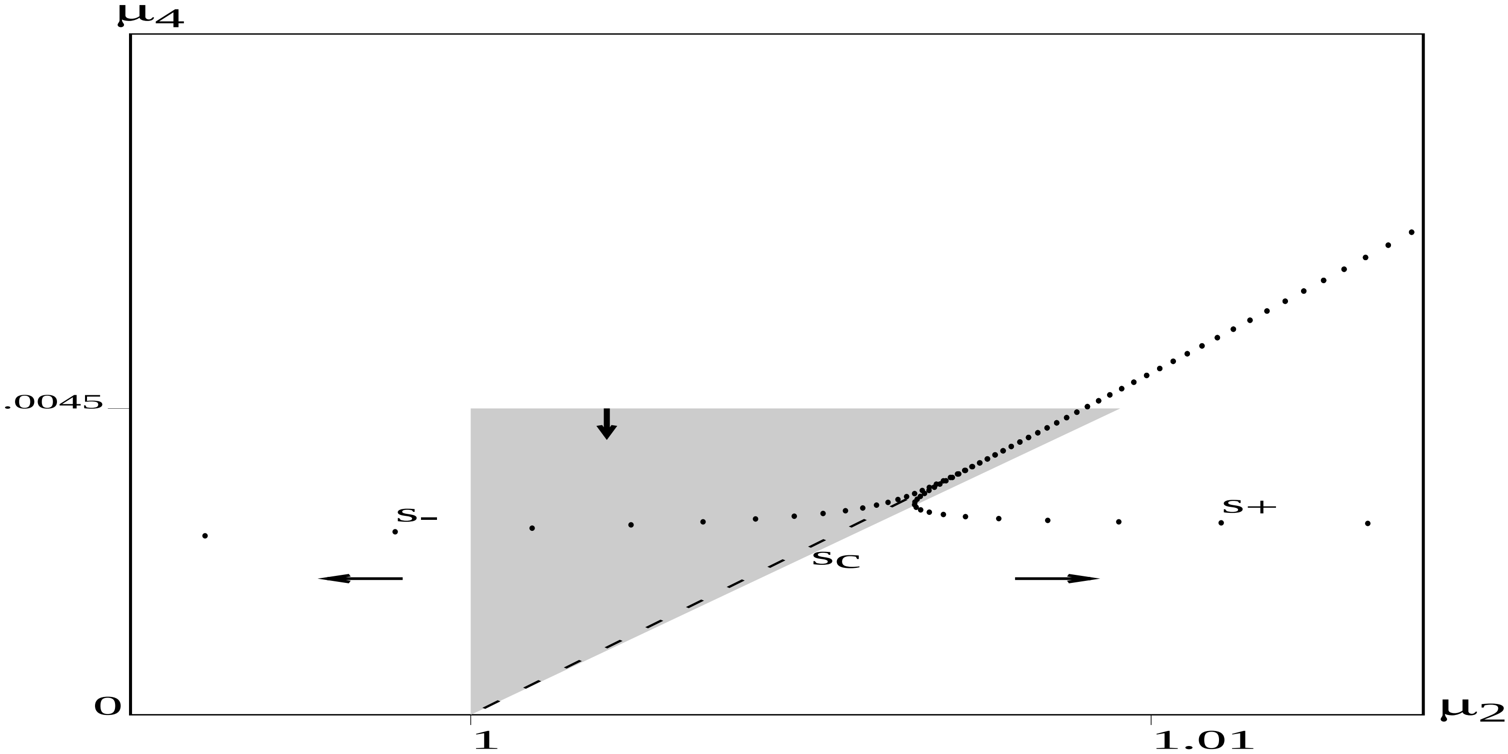
成功例 (1) Hierarchical Ising 模型 良い無限次元
(Hara–Hattori–Watanabe ’01)
成功例 (2) 等方性の回復／漸近一次元拡散
(Hattori–Hattori–Watanabe,
Barlow–Hattori–Hattori–Watanabe ’94–’97)

補足.
Hierarchical Ising 模型 ー くりこみ群が良い無限次元（１変数解析関数の集合）

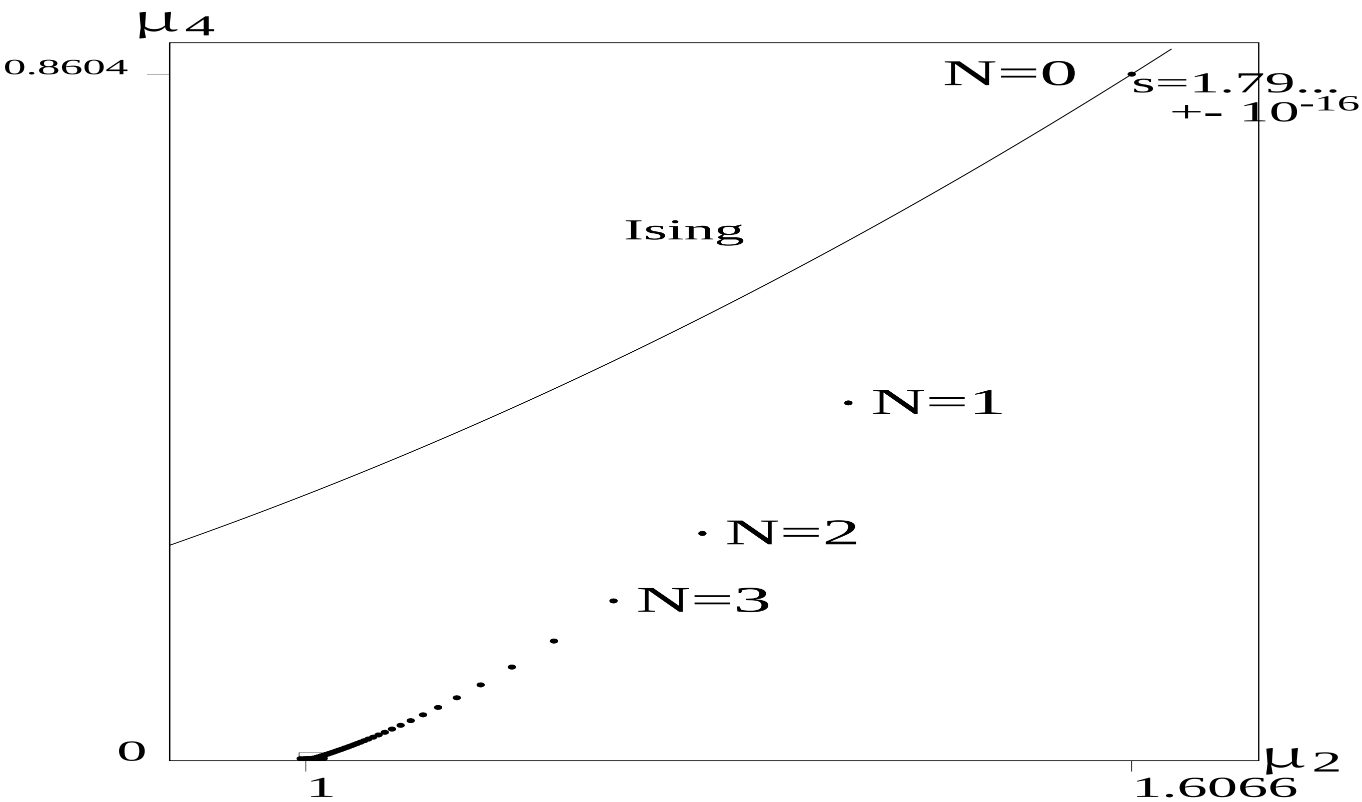
$$h_{n+1}(x) \propto e^{\frac{c^{-1}-2^{-1}}{2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\frac{x}{\sqrt{c}}+y)h_n(\frac{x}{\sqrt{c}}-y)\,dy$$

ガウス固定点 $h_G(x) \propto \exp(-\frac{1}{4}x^2)$
初期値 (canonical surface) $h_{\mathrm{I},s}(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s)+\delta(x+s))$
定理 (Hara – Hattori – Watanabe). hierarchical Ising model について, $c \geqq \sqrt{2}$ ならばある $s_c > 0$ が存在して, くりこみ群の軌道はガウス固定点に収束する
（$1 < c < \sqrt{2}$ ではそうならないことをふまえている）

・無限次元，大局的な軌道の厳密な追跡



$h_N = R^N h_0$ rigorous computer cals
(bounds within blobs)



補足の補足.

・hierarchical model のくりこみ群は偏微分方程式に埋め込める　→　くりこみ力学系としての PDE

PDE のくりこみ群？　－　背後に物理系（正値性）があるとき，そのことによって解かれるか？

PDE では同じ現象だから同じ手法ということはない

くりこみ群の背景のある PDE とそうでない PDE に仕分けすべき，と思われる

・背景が見える方程式と簡単ではない方程式を区別する要点は分かっていない

一見著しく異なる発見を一つの視点から導けるならば，そこに一つの数学的手段があることを期待させる．
くりこみ群は統計力学および場の量子論の理論物理学の分野で極めて多くの研究がなされた概念と計算手法を総称する用語である．しかし，くりこみ群なる解析手段の，満足な数学的定義はまだない，というのが講演者の認識である．
逆に言えば，ここに，これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない．

（服部哲弥，日本数学会 2001.10 統計数学分科会特別講演アブストラクト）

４．くりこみ群，２０４０年現在.

・２０世紀のくりこみ群

☆☆☆　描像（メッセージ）

　☆☆　数値計算等

　　☆　厳密な結果（くりこみ群に向いたモデル，または，ガウス固定点の近く）

くりこみ群向き：$\mathbb{Z}$, finitely ramified fractal, hierarchical model （くりこみ群が有限次元か質の良い無限次元）

ガウス固定点の近く：Gawedzki–Kupiainen, 臨界次元の「近く」の次元

△　３次元統計力学，４次元場の量子論

・くりこみ群の本質を損なわない**もっとも簡単なモデル**　→　**2100 年の大学の教科書**の題材！

2000 年始めにそれを語る意義：現代は状況証拠のたまった段階

　難しい，とふんぞり返っては誰も集まらない

　なんでもくりこみ群と言っては大きく育たない

くりこみ群の不十分な定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

1. 距離空間上の関数 (スピン) または距離空間に値を取る関数 (path) の集合上の，距離を尊重する確率測度について，観測精度のスケール変換に対する変化を適切なパラメータ空間上の力学系として表現
2. 追跡すべき軌道が大局的に (canonical surface から固定点近傍まで) 素直
3. 固定点近傍の振舞が漸近的性質 (指数) を決定

不満足なこと

「くりこみ群は終わった」という風潮？ $\Leftrightarrow$ ガウス固定点の近く，くりこみ群に向いたモデル

・どういう問題に対して有効？（モデルに要求される数学的仮定・設定は何か？）

・いつ，大局的な軌道は chaotic ではないか？

・パラメータの適切なとりかた（canonical な座標）？

大局的に $x_1 \gg x_2 \gg \cdots$，固定点の近くでただ一つの不安定方向 (温度)

・ガウス固定点から遠いところ，本来のモデル？

・Universality(普遍性)

$\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖ではくりこみ群の固定点での微分は制約なし．$\mathbb{Z}^d$, $d \geqq 2$ では，短距離的な相互作用（一歩で隣にしか移らない確率連鎖）という canonical surface は薄い部分空間なので，その要請からも強い普遍性が出るだろう

・臨界次元

次元計算 (power counting) の意味で，固定点近傍の陽な計算と幾何的な描像が対応する，という理解で十分？

「くりこみ群，2041 年現在」 統数研リポート **48** (1993.10) 139–147.
問題意識と（後から振り返ってみたとき）決定的な成果が存在しているはずです．更にそれに先だって …
違和感と先駆的な典型例の蓄積が必要です．2041 という数字は,「現在」が少なくともその先駆的時代に入っていることを表します． … 蓄積された例題が，あるとき明示的な言葉で統一的に認識されたとき，20 世紀のくりこみ群を当たり前の結果として包含する … その成果が 21 世紀のくりこみ群です．

くりこみ群，２０４１年現在

数理解析セミナー 2003.05.22
服 部 哲 弥 (名大 多元)

「ランダムウォークとくりこみ群」，共立出版（新しい解析学の流れ），2004.3.