

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 9 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340020

研究課題名(和文)くりこみ群に基づく確率解析の基盤研究

研究課題名(英文)Basic research for renormalization group oriented stochastic analysis

研究代表者

服部 哲弥 (HATTORI, Tetsuya)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：10180902

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円、(間接経費) 3,870,000円

研究成果の概要(和文)：ウェブで見られるランキングの時間発展のモデルとなる確率順位付けモデルの位置ジャンプ率結合経験分布の大数の法則(流体力学的極限)と軌道についてのカオスの伝搬を一定の仮定の下で証明した。結果はオンラインストアのロングテール構造の解析に適用できる。成果は学術論等の専門的な場での発表の他に「Amazonランキングの謎を解く」(服部哲弥著,化学同人出版)で紹介した。

研究成果の概要(英文)：We defined a class of stochastic ranking models, which mathematically models the rankings found on the web, e.g., as sales ranks of online bookstores, and proved existence of hydrodynamic limits and propagation of chaos. The result has implications on the analysis of so called long-tail structure of online retails. The results are reported in the book 'Solving the mystery of Amazon ranking' (in Japanese), as well as in scientific papers for journals on mathematics.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数理科学 確率過程論 粒子系 流体力学極限 確率順位付けモデル

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究の研究代表者による前年度までの科研費基盤研究(B)「くりこみ群に基づく新しい確率解析の構築のための基盤研究」(2005~2008年度)の含意の一つに、数学の外にある現象や科学的知見の中から既存の数理モデルとは異なる数学的広がりを持つクラスを発見しその数学的性質を研究するという方法論の重要性の認識がある。本研究はこれを受けて、くりこみ群の研究の成果をふまえてもくりこみ群には必ずしもこだわらずに、広く現実世界の現象を、特に確率論的な側面について、研究することに意義があった。

世紀の変わり目を過ぎた頃から、小型コンピュータの高性能化と量的浸透、および、ウェブと総称されるネットワークインターフェース技術の革新が大規模な小売業を支えられる水準に達し、オンラインリテールが急速に展開した。その中で、ランキングと呼ばれる、大規模な商品等のリアルタイムの順序付けが宣伝の手段として定着した。大規模な順位の数値は大規模で安価でなければならないことからアルゴリズムの詳細によらない普遍性を持ち、確率論的な研究の対象となる。これが本研究課題の一つとなった確率順序付けモデルの研究である。

確率順序付けモデルのアルゴリズムは先頭に跳ぶ規則として半世紀以上前から研究があったが、軌道の時間発展がランキングとして注目され、それがオンラインリテールの売上のロングテール構造を表すという形で実用上の意味を持つことになったのは21世紀になってからの新しい現象であるため、深い研究の動機という点で新しい意義が生じた。また、対応する数学である流体力学極限も前世紀中盤以降に発展した、数学としては新しい内容であるため、数学と社会現象を論理の線で結ぶことに今日的な意義が生じた。

(2) 個々の研究対象とは別に研究組織の観点から、研究代表者が本研究課題採択と同時に現任地への異動があったことを特筆すべきである。このため、本研究課題に関する研究体制の再構築、特に新任地において理工学研究科以外の数学研究者が多く集まる日吉キャンパス来往舎における数学研究者の連携の強化が現任地の数学研究活動水準向上に大きな意味を持つ。本研究課題はそのことに寄与することも目指した。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、確率モデルのくりこみ群による解析という枠組みから出発して、しかし、くりこみ群に必ずしもこだわらずに、既存の確率モデルとは異なる数学的広がりを持つクラスを発見し、その性質を研究することである。研究を通して、他分野からの刺激を数

学の新しい概念として結実させ、確率論研究の広がりを目指しつつ、研究の体制づくりを行うことを目指してきた。本研究課題応募時以降の、研究代表者の現任地への異動に伴う研究環境の大きな変化を考慮して、現任地における確率論研究者の連携強化を中心とする研究体制づくりと、ランダム系、整数論、関数論との接点、無限粒子極限の研究、および、経済学や数理統計学を含む数理科学への確率論の応用も主要な研究対象に加えた。

## 3. 研究の方法

本研究課題は研究対象を広く探すことを目指したので、成果は多岐にわたるが、その中から、確率順位付けモデルの研究に即して要約する。

確率順位付けモデルは、粒子1つに1つの確率過程が対応する多粒子系で、順位をその値とし、各粒子に対して対応するポワソン過程に基づいて先頭に跳ぶ(確率過程の値が1になる)ことと、各粒子は自分より下位の粒子が先頭に跳ぶときに順位を1ずつ下げる(値が1増える)ことだけで値が時間的に変化する。ポワソン過程の強度は時刻依存性を許し位置依存性を持たない場合は粒子間で独立である。粒子系としては自分より下位の粒子が先頭に跳ぶ場合のみ順位を下げることで従属性を持つ。さらに強度が位置依存性を持つ場合も定式化可能で、この場合は実質的にポワソン過程そのものが従属性を持つ。

(1) この系について、位置と強度関数の結合経験分布の粒子数についての大数の法則とカオスの伝搬すなわち指定した粒子の組の極限が独立な確率過程に収束することなどが数学的側面からの目標となる。

強度が位置依存性を持たない場合は、適切な補助的な量を考察すれば独立確率変数の大数の法則に帰着し、従属性は極限が従う1階準線形偏微分方程式系の非線形性に帰着するが、実際には極限は指数関数と時間積分であらわに書けるので結論を得る。

強度が位置依存性を持つ場合は、非局所性のため空間積分項を含む偏微分方程式系となるが、準線形偏微分方程式で有効な特性曲線の方法が適用可能で、時空2変数非線形関数方程式に帰着する。適当な仮定の下で関数論的な照明が可能である。しかし、収束定理は本質的に従属確率変数の大数の法則となり、方法が見通せるのは技術的な仮定の下でのみである。

(2) 得られた数学的結果を実際にウェブで見られるランキングの時間変化に応用するために、ランキングデータをとる。長期間にわたり継続的に大きなデータをとるために、ウェブへの安定したアクセスと継続的処理

のための専用のコンピュータが欠かせない。解析の最初の2段階は以下である。

いわゆるロングテールと呼ばれる構造の検証のために、強度の分布をパレート分布としてパラメータの当てはめを行う。

強度に共通の時間依存性を仮定すれば定理で得られた極限の強度積分と時間積分を分離できる。これによってたとえば売上の昼夜依存性の解析が可能になる。

#### 4. 研究成果

成果は多岐にわたるが、本研究課題の展開の中から、確率順位付けモデルと名付けた多自由度確率過程(粒子系)の流体力学的極限の研究について要約する。他の成果については、次項の成果リストを参照いただきたい。

(1) 強度が位置依存性を持たない場合については流体力学的極限(大数の法則)の証明に成功した。成果については、数篇の学術論文等の他に「Amazon ランキングの謎を解く」(服部哲弥, 化学同人出版, 2011)を出版して全体構想の確立, 言い換えると, 理論から応用までの「細い糸」を通し, 広く社会に数学的方法の意義を問うた。

なお, カオスの伝搬と大数の法則からの揺らぎを定量する汎関数中心極限定理は永幡幸生によって証明されている。

強度が位置依存性を持つ, 本質的に従属性が問題になる場合は, ジャンプ率が有界などの限定された条件の下でのみ大数の法則とカオスの伝搬が証明できた。

ただし, 応用上の出発点であるウェブのランキングに基づくオンラインリテールのロングテール構造の解析ではパレート分布という強度が非有界な場合を扱う必要があり, 今後の課題となる。

データ解析の観点からは, オンライン小売業のアマゾンの和書ランキングと巨大掲示板2ちゃんねるのスレド一覧の順位変化のデータを解析した。予備的な結果と言うべきだが, 前者について, 同オンライン和書部門は一部巷間で噂されたようなロングテール型ではなく, 少数のベストセラーに支えられていることが示唆された。後者については, 一部疑われるかもしれないネット活動の昼夜逆転はなく, 日中, 特に夕刻就寝前までの時間に活発であり, 通常の意味での深夜は活動が落ちるといふ, 一般社会活動と同様の結果を得た。

(2) 現任地における研究交流体制の確立については, 初めに連携研究者として参加して頂き, 本研究課題の年次進行とともに順次分担者としてより密接に参加して頂くことになり, 連携の強化が目に見える形で実現した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

K.Hattori, M. Mizuno, Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket, Stochastic Processes and their Application 査読有, 124 (2014) 566-585.

南就将, 水野洸太, 南隆二, 異なる接触頻度を持つ個体からなる人口集団における感染症流行のモデル化について, Hiyoshi Review of Natural Science, Keio University 査読無, 53 (2013) 23-44.

厚地淳, 幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から: 複素葉層構造を中心に, 京都大学数理解析研究所講義録 査読無, 1855 (2013) 47-55.

T.Hattori, S.Kusuoka, Stochastic ranking process with space-time dependent intensities, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 査読有, 9(2) (2012) 571-607.

K.Yasuda, Markov processes on the adeles and Chebyshev function, Statistics and Probability Letters 査読有, 83 (2012) 238-244.  
DOI : 10.1016/j.spl.2012.09.008

服部哲弥, 確率的ランキング - 流行度の順位付けとロングテール分析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会誌 査読無, 57(6) (2012) 302-307.

服部哲弥, 確率的な順位付け, 数学セミナー 査読無, 605 (2012) 16-20.

N.Minami, New proofs of some basic theorems on stationary point processes, Hiyoshi Review of Natural Sciences, Keio University 査読無, 52 (2012) 37-47.

Y.Hariya, K.Hattori, T.Hattori, Y.Nagahata, Y.Takeshima, T.Kobayashi, Stochastic ranking process with time dependent intensities, Tohoku Mathematical Journal 査読有, 63(1) (2011) 77-111.

N.Minami, Energy level statistics: a formulation and some examples, RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有, B27 (2011)

79-97.

T.Hattori, Stochastic ranking process and web ranking numbers, in Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory, T.Hara, T.Matsui, F.Hiroshima, eds., Math-for-Industry Lecture Note Series 査読無, 30 (2011) 178-191.

[http://gcoe-mi.jp/publish\\_list/publication/id:2](http://gcoe-mi.jp/publish_list/publication/id:2)

K.Hattori, T.Hattori, Sales ranks, Burgers-like equations, and least-recently-used caching, RIMS Kokyuroku Bessatsu 査読有, B21 (2010) 149-162.

M.Takeda, A formula on scattering length of positive smooth measures, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 138 (2010) 1491-1494.

服部哲弥, Stochastic ranking process with time dependent intensities, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会統計数学分科会一般講演アブストラクト 査読無, (2010) 1-2.

K.Hattori, T.Hattori, Equation of motion for incompressible mixed fluid driven by evaporation and its application to online rankings, Funkcialaj Ekvacioj 査読有, 52 (2009) 301-319.

K.Hattori, T.Hattori, Existence of an infinite particle limit of stochastic ranking process, Stochastic Processes and their Applications 査読有, 119 (2009) 966-979.

M.Takeda, Y.Tawara,  $L_p$ -independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, Forum Math. 査読有, 21 (2009) 1067-1080

[学会発表](計 32 件)

服部久美子, Non-Markov processes on fractals, RIMS 研究集会 確率解析, 2014 年 03 月 19 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

厚地淳, 有理型関数の値分布と拡散過程, RIMS 研究集会 確率解析, 2014 年 03 月 19 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

南就将, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator,

日本数学会年会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学 (東京都豊島区)

厚地淳, Value distribution of leafwise holomorphic maps, 2013 年度多変数関数論冬セミナー, 2013 年 12 月 22 日, コラッセふくしま (福島県福島市)

南就将, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, 確率論シンポジウム, 2013 年 12 月 20 日, 京都大学 (京都府京都市)

南就将, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 2013 年 12 月 7 日, 京都大学 (京都府京都市)

厚地淳, A defect relation for leafwise holomorphic maps, 第 4 回東北複素解析セミナー, 2013 年 10 月 9 日, 東北大学情報科学研究科 (宮城県仙台市)

厚地淳, Value distribution of leaves of complex foliations in complex projective spaces, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2013 年 6 月 8 日, 龍谷大学深草キャンパス (京都府京都市)

N.Minami, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, Mathematical Physics of Disordered Systems - A Conference in Honor of Leonid Pastur, 2013 年 5 月 16 日, FernUniversitaet in Hagen (Germany)

K.Hattori, The scaling limit of a loop-erased random walk on the pre-Sierpinski gasket - the larger-loop-first model and the uniform spanning trees, Markov chains on graphs and related topics, 2013 年 2 月 15 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

厚地淳, 幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から - 複素葉層構造を中心に -, 確率論シンポジウム, 2012 年 12 月 18 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

服部哲弥, 流行度の順位付け, OR 学会待ち行列研究部会例会, 2012 年 11 月 17 日, 東京工業大学 (東京都目黒区)

厚地淳, Value distribution of meromorphic functions on foliated

manifolds II, 複素解析幾何セミナー, 2012年10月29日, 東京大学数理科学研究科(東京都目黒区)

K.Hattori, The scaling limit of a loop-erased random walk on the Sierpinski gasket, XVIIth International Congress on Mathematical Physics, 2012年8月10日, Aalborg Kongress og Kultur Center (デンマーク オールボー)

K.Hattori, The scaling limit of a loop-erased random walk on the pre-Sierpinski gasket, 8th World Congress in Probability and Statistics, 2012年7月10日, Grand Cevahir Hotel Convention Center (トルコイスタンブール)

服部哲弥, Amazon ランキングの謎を解く, 数学談話会, 2011年8月30日, 長岡高等専門学校(新潟県長岡市)

服部哲弥, Amazon ランキングの謎を解く, さいたま数理解析セミナー, 2011年7月29日, 埼玉大学サテライトキャンパス(埼玉県さいたま市)

服部哲弥, 確率的順位付け, 語ろう数理解析, 2010年11月20日, 芝浦工業大学(埼玉県さいたま市)

N.Minami, Statistics for the unfolded spectrum of lattice Anderson models, The Second Mathematical Conference in Kairouan, 2010年11月5日, Hotel Continental-Kairouan (Tunisia)

服部哲弥, Stochastic ranking process with time dependent intensities, 2010年度日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会一般講演, 2010年9月22日, 名古屋大学(愛知県名古屋市)

②1 南就将, ランダム・シュレーディンガー作用素の基礎, Summer School 数理物理 2010: ランダム・シュレーディンガー作用素, 2010年8月26,27,28日, 東京大学大学院数理科学研究科(東京都目黒区)

②2 服部哲弥, 確率ランキング模型 - A hydrodynamic limit of move-to-front rules and its application to web rankings, 待兼山コロキウム, 2010年7月15日, 大阪大学(大阪府豊中市)

②3 T.Hattori, Hydrodynamic limit of move-to-front rules and Amazon.co.jp ranking, ISM symposium on Stochastic

Models and Discrete Geometry, 2010年3月1日, 統計数理研究所(東京都立川市)

②4 服部哲弥, 時刻依存性のあるジャンプ率を持つ move-to-front 規則の無限粒子極限とその amazon.co.jp ランキングへの応用, 確率論シンポジウム, 2009年12月15日, 愛媛大学(愛媛県松山市)

②5 服部哲弥, 時刻依存性のあるジャンプ率を持つ move-to-front 規則の無限粒子極限とその amazon.co.jp ランキングへの応用, 無限粒子系, 確率場の諸問題, 2009年12月5日, 奈良女子大学(奈良県奈良市)

②6 T.Hattori, Where is my book? - Burgers equation in an online bookstore ranking, International conference on mathematical quantum field theory and renormalization group, 2009年11月27日, 九州大学(福岡県福岡市)

②7 服部哲弥, Move-to-front 規則の「流体力学」極限はなぜ半世紀の間気づかれなかったか, 2009年度日本数学会秋季総合分科会統計数学分科会, 2009年9月24日, 大阪大学(大阪府豊中市)

②8 服部哲弥, Hydrodynamic limit of move-to-front rules and LRU caching, 2009年度京都大学数理解析研究所研究集会 繰り込み群の数理解析での応用, 2009年9月9日, 京都大学大学院理学研究科(京都府京都市)

②9 服部哲弥, 本のランキング, Burgers 型方程式, Least-recently-used キャッシング, 広島応用解析セミナー(第11回), 2009年9月1日, 広島大学大学院工学研究科(広島県東広島市)

③0 服部哲弥, Move-to-front 規則, Burgers 型方程式, そして web アクセスランキング解析, JST さきがけセミナー, 2009年8月7日, 北海道大学大学院理学研究科(北海道札幌市)

③1 服部哲弥, Move-to-front 規則とオンラインランキング, 東北大学数学教室談話会, 2009年7月13日, 東北大学大学院理学研究科(宮城県仙台市)

③2 服部哲弥, Move-to-front 規則の確率ランキング模型的考察, 慶應確率論セミナー, 2009年6月22日, 慶應義塾大学大学院理工学研究科(神奈川県横浜市)

[図書](計1件)

服部哲弥, 化学同人出版, 「Amazon ランキングの謎を解く - 確率的な順位付けが教える売上の構造」, 2011, 224 頁

〔その他〕

成果紹介に関連する URL

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/hattori.htm> (研究代表者日本語ホーム)

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/research.htm> (研究代表者英語ホーム, 含論文へのリンク)

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/amazonj.htm> (確率順位付け模型初等解説)

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/amazone.htm> (確率順位付け模型英語初等解説)

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/kaia11.htm> (研究代表者解説記事へのリンク)

集中講義

服部哲弥, 「確率的順位付け」2011年7月, 京都大学 理学部

論文誌編集

南就将, RIMS Kokyuroku Bessatsu B27 (2011)

南就将, 数理解析研究所講究録 1855 確率論シンポジウム (2013)

研究会世話人責任者

南就将, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題 (Spectra of Random Operators and Related Topics):

2013年12月5-7日, 京都大学

2012年12月5-7日, 京都大学

2011年12月1-3日, 京都大学

2010年12月8-9日, 慶應義塾大学

南就将, 確率論シンポジウム (Probability Symposium) 2012年12月18-21日, 京都大学数理解析研究所

プレプリント

N.Minami, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, arXiv: 1401.0853v1 (2014)

K.Yasuda, On the order of divergence of the sum of  $p$ -adic-valued independent identically distributed random variables, Professor Sergio Albeverio's Special Issue on Arabian Journal of Mathematics (2014)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

服部 哲弥 (HATTORI, Tetsuya)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号: 10180902

### (2) 研究分担者

南 就将 (MINAMI, Nariyuki)

慶應義塾大学・医学部・教授

研究者番号: 10183964

(平成21年度は連携研究者)

安田 公美 (YASUDA, Kumi)

慶應義塾大学・商学部・教授

研究者番号: 40284484

(平成22年度まで連携研究者)

厚地 淳 (ATSUJI, Jun)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号: 00221044

(平成23年度まで連携研究者)

服部 久美子 (HATTORI, Kumiko)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号: 80231520

(平成21年度および平成23年度から)

竹田 雅好 (TAKEDA, Masayoshi)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30179650

(平成21年度)

### (3) 連携研究者

鈴木 由紀 (SUZUKI, Yuki)

慶應義塾大学・医学部・専任講師

研究者番号: 30286645

(平成21年度から)

針谷 祐 (HARIYA, Yuu)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 20404030

(平成21年度)