くりこみ群解析による高次元gasket上のself-avoiding pathの漸近的性質

広島大学理学部数学科談話会 20010724

服部哲弥 （名大多元）

津田稔朗 （第一生命，1999.3 立教）

１．問題．

dSG (d次元pre-gasket) $d = 2, 3, 4, \cdots$

$d = 2$: SG (pre-**S**ierpiński **g**asket)

$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^2$.

原点 O $F_0 = \triangle Oab$

$G_n = \{F_n$の頂点$\}$,

$B_n = \{$ 辺 $\}$

$F_n = (G_n, B_n)$

$F = (G, B)$, $G = \displaystyle\bigcup_n G_n$, $B = \displaystyle\bigcup_n B_n$

$d = 2, 3, 4, \cdots$ $d\mathrm{SG} \subset \mathbb{R}^d$:

$F_0 = Ov_1v_2 \cdots v_d$ d次元単体

$F_n = d+1$個の F_{n-1} をつないで１辺 2^n の d次元単体

O $2^n v_1$ $\cdots 2^n v_d$

W_0: SAP on dSG (**S**elf-**A**voiding **P**ath)
$w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$ に対して
$L(w) = \inf\{i \mid w(j) = w(i),\ j \geqq i\} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$

$W_0 = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to G \mid$
(path) $\overline{w(i)w(i+1)} \in B,\ i = 0, 1, \cdots, L(w)-1,$
(**self-avoiding**) $w(i_1) \neq w(i_2),\ i_1 < i_2 \leqq L(w)\}$

Q. Path の漸近的性質.
k 歩でどれくらい遠くまで届くか？
k 歩の path の本数 $N(k) = \sharp\{w \in W_0 \mid L(w) = k\}$
Mean square displacement の指数 ν：

$$E_k[|w(k)|^s] = \frac{1}{N(k)} \sum_{w:\ L(w)=k} |w(k)|^s \approx k^{\nu s},\ s > 0.$$

$(|w(k)| \approx k^{\nu})$

$\mathbb{Z}^N$ 上の SRW (simple random walk):
$|w(k)| \approx k^{1/2}$ ($\nu = 1/2$) （マルコフ性）
$\mathbb{Z}^N$ 上の SAP:
$N \geqq 5$: SRW と同じ ($\nu = 1/2$) (Hara–Slade)
$1 < N < 4$: SRW と違うと思われているが**未解決**
$N = 1$: $|w(k)| = k$ ($\nu = 1$) （違うが簡単）

dSG: $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}^2$ の「間」
$d = 2, 3$: SRW と異なる ν （Hattori-Hattori-Kusuoka）

問．dSG, $d = 2, 3$, の成果を一般化できるか？

まずは dSG, $d = 4, 5, 6, \cdots$?　答．**難しい．**　問．何故?
dSG, $d = 2, 3$, の解析：
- SAP のくりこみ群解析（**一般化が難しい**）
- くりこみ群解析の結果をSAP の漸近的性質に翻訳（**比較的一般性ある議論**）

目標：dSG 上の SAP について「後半部分の一般論」
（くりこみ群についての仮定からSAP の漸近的性質を得るような定理　→　くりこみ群に何を求めれば十分かが明確になる期待）

２．くりこみ群．

数学的定義はまだない　→　これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない

ここだけの，不十分な定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

- 距離空間に値を取る確率過程の距離空間のスケール変換に対応する変化を「適切な」パラメータ空間上の力学系として表現
- 元の問題で決まる初期条件 (canonical surface) の下での軌道が大局的に「素直」
- 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること

パラメータ空間？　フラクタル構造を生かすべき
歩数が大きいときの漸近形 $|w(k)| \approx k^{\nu}$
→大きくかけ離れた path は少ないだろう
(large deviation)
→到達点を固定して歩数の母関数を考える
(Tauberian)
→到達点を動かしたときの母関数の変化
(recursion ＝くりこみ群)

Recursion が閉じるために **SAP を分類**

(A) SAP が一つの単位単体を通る通り方
添字集合

$$\mathcal{I}_d = \{(i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k \mid \\ k = 1, 2, 3, \cdots,\ 0 < i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_k\,, \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k + k \leqq d + 1\}$$

命題 1 *SAP* w の単位単体の通り方は,
ある $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して

$$\Delta_I = \{\overline{Ov_1 v_2 \cdots v_{i_1 - 1} v_{i_1}}, \overline{v_{i_1+1} \cdots v_{i_1+i_2}}, \cdots, \\ \overline{v_{i_1 + \cdots i_{k-1}+1} \cdots v_{i_1+\cdots i_k}}\}$$

と合同

例.

- $d = 2$: $\mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$
  $\{\overline{Ov_1}\}$ (１歩で通り抜ける) か
  $\{\overline{Ov_1 v_2}\}$ (２歩で通り抜ける)
- $\mathcal{I}_3 = \{(1), (2), (3), (1, 1)\}$
  $(1, 1)$ は２度通り抜ける

◇

(B) F_n 上の SAP の分類
自己および相互回避 path の組も必要
$W_I^{(n)}$, $I \in \mathcal{I}_d$

例.　(定義に代えて...) $d = 3$
F_n の頂点 $v_{n,i} = 2^n v_i$, $i = 1, \cdots, d$

$\{(1)\}$:　$O \to v_{n,1}$　　$(\times\ v_{n,2}, v_{n,3})$

$\{(2)\}$:　$O \to v_{n,1} \to v_{n,2}$　　$(\times\ v_{n,3})$

$\{(3)\}$:　$O \to v_{n,1} \to v_{n,2} \to v_{n,3}$

$\{(1,1)\}$:　$O \to v_{n,1}$ と $v_{n,2} \to v_{n,3}$ の組 (互いに交わらない)

$\Diamond$

w SAP または SAP の組, $\quad I \in \mathcal{I}_d$
$s_I(w)$: w が I 型で通る単位三角形の個数
SAP の総歩数 L との関係：
$I = (i_1, \cdots, i_k)$, $\ w = (w_1, w_2, \cdots, w_k) \in W_I^{(n)}$

$$\sum_{i=1}^{k} L(w_i) = \sum_{J \in \mathcal{I}_d} |J| s_J(w)$$

ここで $J = (j_1, \cdots, j_\ell)$ に対して $|J| = j_1 + \cdots + j_\ell$

• $(s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $(W_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する母関数 $\vec{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$

$$X_{n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}$$

$$\vec{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

命題 2

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{\Phi} \circ \vec{X}_n, \qquad \vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x} \tag{1}$$

$\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ は 2 次以上の項からなる正係数多項式.

証明. $\quad w \in W_I^{(1)}$ のある単体の通り方が $J \in \mathcal{I}_d$ 型のとき $W_J^{(n)}$ の要素で置き換えると $W_I^{(n+1)}$ の path を得る. $\square$

くりこみ群：(1) が定義する ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ 上の力学系
くりこみ群が有限次元← dSG が finitely ramified

例.　2SG $\mathcal{I}_2 = \{(1),(2)\}$
F_n の O から $v_{n,2}$ までの SAP で $v_{n,1}$ を通るものの集合 $W_n^{(1)}$，通らないものの集合 $W_n^{(2)}$.
1 歩で通り抜ける単位三角形 $s_{(1)}(w)$ 個，2 歩で通るもの $s_{(2)}(w)$ 個

$$\vec{\Phi}(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy)$$

◇

くりこみ群の不変部分集合：SAP らしさを意味すると思われる不変部分集合 ($d=2,3$ の経験則)
$I=(i_1,\cdots,i_k), J=(j_1,\cdots,j_\ell) \in \mathcal{I}_d$ に対して $I \oplus J$ を，$i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_\ell$ の非減少列への並べ替え.

$$\Xi_d = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid I \oplus J \in \mathcal{I}_d \text{ なる全ての } I,J \in \mathcal{I}_d \text{ に対して } x_{I\oplus J} \leqq x_I x_J\}$$

命題 3 Ξ_d は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合.

例.　$\Xi_3 = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2\}$　◇

３．主結果．
くりこみ群の言葉で書いた仮定

dSG 上の SAP の漸近的性質を保証するくりこみ群の軌道の性質を定式化する.

$\vec{x}_c$ が self-avoiding fixed point (**SAFP**) とは：

(FP1) $\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$.
(FP2) $\vec{\Phi}$ の Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ について，$\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能,
最大固有値 $\lambda > 1$, ｜その他｜< 1.
λ に対応する左固有ベクトル $\vec{v}_L$ は全成分正.
右固有ベクトルについて $v_{R,(1)} > 0$.
(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ ならば， Φ_I に「$m_{(1)} > 0$, $x_{c,J} = 0 \to m_J = 0$」なる項 $\displaystyle\prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ がある.
(FP4) $\vec{x}_c \in \Xi_d \setminus \{\vec{0}\}$.

SAFP $\vec{x}_c$ に対して，$\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が

(DA1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = \vec{x}_c$
(DA2) $x_{c,I} \neq 0 \quad \to \quad x_I \neq 0$

を満たすとき， $\vec{x}_c$ **の domain of attraction** にあると言う．$\mathcal{D}om(\vec{x}_c)$： そのような $\vec{x}$ の集合.

Restricted model

$$\mathcal{K}_{res} = \{(1), (11), \cdots, (1 \cdots 1)\} \subset \mathcal{I}_d$$

（単位単体を毎回１歩で通り抜ける path）

命題 4 ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{res}}$ は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合.

$$ {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}} = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid x_J = 0,\ J \notin \mathcal{K}\}$$

対応する SAP の部分集合

$$W_{\mathcal{K},I}^{(n)} = \{w \in W_I^{(n)} \mid s_J(w) = 0,\ J \notin \mathcal{K}\}$$

$\mathcal{K} = \mathcal{I}_d$ のときは元の full model
対応する母関数 $X_{\mathcal{K},n,I}$　$\rightarrow$　くりこみ群ＯＫ
Canonical surface　（軌道の大局的な追跡）
総歩数の母関数 $\vec{Z}_n = (Z_{n,I}\ ,\ I \in \mathcal{I}_d)$

$$Z_{n,I}(\beta) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} e^{-\beta L(w)} = X_{n,I}(\vec{x}_{can}(\beta));$$

$x_{can,I}(\beta) = e^{-\beta|I|}$.　$\rightarrow$　$\vec{x}_{can}(\beta) \in \Xi_d$, $\beta \in \mathbb{R}$.
(Restricted model も同様 $\vec{Z}_{\mathcal{K}_{res},n}$)

(CS1) $\beta_c \in \mathbb{R}$ が full model の臨界点とはSAFP $\vec{x}_c$ に対して $\vec{x}_{can}(\beta_c) \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$

(CS2) $\beta_{c,res} \in \mathbb{R}$ が restriced model の臨界点とは $\vec{x}_{can,\mathcal{K}_{res}}(\beta_{c,res}) \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$

仮定の下での SAP の漸近的性質

定理 5 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が *full model* の臨界点，$\vec{x}_c$ が対応する固定点 *(CS1)* ならば

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,I}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta > \beta_c\,, \\ x_{c,I}\,, & \beta = \beta_c\,. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{d} Z_{n,(i)}(\beta) = \infty, \quad \beta < \beta_c\,.$$

特に，臨界点は（存在すれば）ただ一つ．
Restricted model も同様.

cf. SAFP の唯一性は $d \geqq 4$ では分かっていない．
$W_I^{(n)}$ 上の確率測度 $\mu_{\vec{x},n,I}$：

$$\mu_{\vec{x},n,I}[\{w\}] = \frac{1}{X_{n,I}(\vec{x})} \prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad w \in W_I^{(n)},$$

定理 6 $\vec{x}_c$ が *SAFP* で $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ とする．

(i) $x_{c,I} \neq 0$ ならば，スケールされた一般化歩数 $(\lambda^{-n} s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での結合分布は $n \to \infty$ で $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上のボレル測度に弱収束．λ は *(FP2)* .

(ii) $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c) \cap \Xi_d$ かつ $x_{c,I} \neq 0$ ならば $w \in W_I^{(n)}$ のスケールされた長さ $\lambda^{-n} L(w)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での分布の弱収束極限は C^∞ 密度関数を持つボレル確率測度 $\overline{p}^*_{\vec{x},I}$ に弱収束．密度関数は $I = (1)$ のとき $(0,\infty)$ で正.

（端点を固定したときの歩数分布の漸近形←くりこみ群の分析→ Tauber 型評価で一様分布の結果）
$W^{(0)}$：原点 O から出発する SAP の集合
$N(k)$： O から出発する歩数 k の SAP の本数

定理 7 *Full model* の臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在すれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c\,.$$

Restricted model についても同様.

$\tilde{P}_k$：原点 O から出発する歩数 k の SAP の集合上の一様分布． E_k： $\tilde{P}_k$ に関する期待値.

定理 8 $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおくと，*full model* の臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ があれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = s\nu \quad s \geqq 0.$$

Restricted model に関しても同様.

Mean square displacement の指数が ν.

４．証明の概略．

何が言えたのか？

定理８： dSG 上の SAP が漸近的性質を持つための十分条件をくりこみ群の言葉で記述した.

- くりこみ群の大局的軌道解析
- SAP の漸近的性質への翻訳　→　**解決**

現状：前半（定理８の仮定）は，各 d 毎に証明.

$d = 2, 3$ →既知 (HHK'90, HK'92, HHK'93).

$d = 4$ →今回 restricted model.

前半 (くりこみ群解析) が一般化のための本質的困難である！

仮定から漸近的性質を得ること

定理５：$\vec{\Phi}$ の各成分は２次以上の多項式.

- β が小→ $\vec{x}$ が小→

$\log X_{n,I}(\vec{x}) \approx -2^n \log 1/(\max_J x_J) \to -\infty$

- β が大→ $\to \infty$
- β に関する単調性と臨界点 β_c の定義.

定理６：スケールされた一般化歩数 $(\lambda^{-n} s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での分布 $p_{\vec{x},n,I}$ の母関数は

$$\int_0^\infty e^{\vec{t}\cdot\vec{\xi}} p_{\vec{x},n,I}[d\vec{\xi}] = \frac{X_{n,I}(\vec{x}(\vec{t}))}{X_{n,I}(\vec{x})}, \quad \vec{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}.$$

Recursion で定義される多変数正則関数の一般的な議論によって右辺が広義一様収束（証明略）.

密度の存在，滑らかさ，正値性：総歩数の分布の分散が正 ＋ recursion → 極限特性関数の遠方での減少.

定理 7 の上からの評価：

$$\nu(w) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \mid \\ w(k) \in G_n\,,\ k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}$$

$$\zeta_n = \sum_{w \in W^{(0)};\ \nu(w) \leqq n} e^{-\beta_c L(w)}$$

→ $f_1(\vec{0}) = 1$ なる正係数多項式 f_1 が存在して $\zeta_{n+1} \leqq f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))\zeta_n$
＋ $\vec{Z}_n(\beta_c)$ が bdd. (CS1) ＋ $L(w) > 2^{\nu(w)-1}$ →

$$N(k)e^{-\beta_c k} \leqq \sum_{\nu(w) \leqq 1 + \frac{\log k}{\log 2}} e^{-\beta_c L(w)} \leqq \zeta_{1+\frac{\log k}{\log 2}}$$

定理 7 の下からの評価：
スケールされた総歩数の分布 $\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の収束の速さに関する評価（Tauber 型） →

$$\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\lambda^{-n}k - 2d_n, \lambda^{-n}k]) \geqq c_n \epsilon.$$

path を延ばすことで，単射
$\{w \in W_{(1)}^{(n)} \mid L(w) \leqq k\} \to \{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$

$$\begin{aligned}
&Z_{n,(1)}(\beta_c) c_n \epsilon \\
&\leqq \sum_{w \in W_{(1)}^{(n)};\ k-2d_n\lambda^n \leqq L(w) \leqq k} e^{-\beta_c L(w)} \\
&\leqq e^{2\beta_c d_n \lambda^n} e^{-\beta_c k} N(k).
\end{aligned}$$

定理 8：

(i) 期待値 E_k の分母 $N(k)$ $\quad\to\quad$ 定理 7

(ii) 長い path と短い path の大偏差的評価

$$\sum_{\substack{w \in W^{(0)}; \\ \nu(w) \leqq n, \\ L(w) \geqq \lambda^{n+(m/2)}}} e^{-\beta_c L(w)} \text{ などが小さい}$$

$\to E_k[\|w\|^{s d_w}]$ についての対応する評価

$$\|w\| = \max\{|w(k)| \mid k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}.$$

(iii) Reflection principle.

$\to \|w\|$ に関する評価と $|w(k)|$ に関する評価が comparable

$d=4$ restricted model が仮定を満たすこと

$\mathcal{I}_4 = \{(1),(1,1),(2),(3),(4),(1,2)\}$

Restricted model

$s_J(w)=0,\ J \notin \mathcal{K}_{res} = \{(1),(11)\}$

命題 9

(i) $\vec{\Phi}$ は $x_I,\ I \in \{(1),(11),(2),(3),(4),(12)\}$ の 6 変数の 6 成分正係数多項式．各項の次数は 2 以上 5 以下.

(ii)

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}(x,y,0,0,0,0)\\
&= x^2+3x^3+6x^4+6x^5+12x^3y+30x^4y\\
&+18x^2y^2+78x^3y^2+96x^2y^3+132xy^4+132y^5,\\
&\Phi_{(1,1)}(x,y,0,0,0,0)\\
&= x^4+2x^5+4x^3y+13x^4y+32x^3y^2+88x^2y^3\\
&+22y^4+220xy^4+186y^5.
\end{aligned}$$

(iii) 以下を満たす正係数多項式 $\Phi_{I,i}$, $I=(1),(11)$, $i=0,1,2,3,4,$ が存在する.

$\Phi_{(1),0}$ は $x_{(1)}^2$ を項として持つ．$\Phi_{(11),0}$ は $x_{(1)}^4$ を項と

して持つ．さらに，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(1)}(\vec{x}) = \Phi_{(1),1}(\vec{x})\, x_{(1)} + \frac{1}{2}\Phi_{(1),2}(\vec{x})\, x_{(2)} \\
&\ + \frac{1}{3}\Phi_{(1),3}(\vec{x})\, x_{(3)} + \Phi_{(1),4}(\vec{x})\, x_{(11)} + \Phi_{(1),0}(\vec{x}), \\
&\Phi_{(2)}(\vec{x}) = \Phi_{(1),1}(\vec{x})\, x_{(2)} + \Phi_{(1),2}(\vec{x})\, x_{(3)} \\
&\ + \Phi_{(1),3}(\vec{x})\, x_{(4)} + \Phi_{(1),4}(\vec{x})\, x_{(12)}\,, \\
&\Phi_{(11)}(\vec{x}) = \Phi_{(11),1}(\vec{x})\, x_{(1)} + \frac{1}{2}\Phi_{(11),2}(\vec{x})\, x_{(2)} \\
&\ + \frac{1}{3}\Phi_{(11),3}(\vec{x})\, x_{(3)} + \Phi_{(11),4}(\vec{x})\, x_{(11)} + \Phi_{(11),0}(\vec{x}), \\
&\Phi_{(12)}(\vec{x}) = \Phi_{(11),1}(\vec{x})\, x_{(2)} + \Phi_{(11),2}(\vec{x})\, x_{(3)} \\
&\ + \Phi_{(11),3}(\vec{x})\, x_{(4)} + \Phi_{(11),4}(\vec{x})\, x_{(12)}\,.
\end{aligned}$$

(iv) 各 $I \notin \mathcal{K}_{res}$ に対して自然数 $m = m_I$, $m' = m'_I$ が存在して，$\Phi_{(1)}, \Phi_{(11)}$ はそれぞれ $x_{(1)}^{m} x_I$, $x_{(1)}^{m'} x_I$ を含む．

(v) $I \notin \mathcal{K}_{res}$ ならば，Φ_I の各項はある $J \notin \mathcal{K}_{res}$ に対して x_J の正べきを含む．さらに，$\Phi_{(3)}$ と $\Phi_{(4)}$ の各項は，合計 2 次以上の $J \notin \mathcal{K}_{res}$ なる x_J 達を含む．$\Phi_{(2)}$ は $x_{(1)}^3 x_{(11)} x_{(12)}$ を，$\Phi_{(12)}$ は $x_{(1)}^4 x_{(2)}$ を含む．

このことから以下を得る．証明は具体的かつ長い．

定理 10

(i) $\Phi_{(1)}(x,y,0,0,0,0) = x$, $\Phi_{(11)}(x,y,0,0,0,0) = y$ は $\Xi_4 \setminus \{\vec{0}\}$ にただ一つの解 $\vec{x}_c = (x_c, y_c, 0,0,0,0)$ を持つ．$x_c = 0.326490898\cdots$, $y_c = 0.027929572\cdots$.

(ii) $\vec{x}_c$ は *SAFP*，即ち *(FP1) – (FP4)* を満たす．

(iii) *Restricted model* の臨界点 $\beta_{c,res}$ が存在する．（即ち，*(CS2), (DA1) – (DA2)* が成り立つ．）

$d=4$restricted model のくりこみ群解析（定理 10）　＋「後半部分の一般論」（定理 8）　によって，$d = 4$ restricted model の mean square displacement 指数が解決する．

定理 11

(i) 原点から出発する長さ k の *restricted SAP* の本数 $N_{res}(k) = N_{\mathcal{K}_{res}}(k)$ は

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N_{res}(k) = \beta_{res}$$

を満たす.

(ii) *Restricted model* の *mean square displacement* の指数は，次の意味で

$$d_w = \frac{\log \lambda}{\log 2} = 1.6657696\cdots$$

である．即ち,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_{res,k}[|w(k)|^{s\,d_w}] = s, \quad s \geqq 0.$$

ここで $E_{res,k}$ は原点から出発する長さ k の *restricted SAP* の上の一様分布（各 *path* に $1/N(k)$ の確率を *assign* したもの）に関する期待値である.

dSG 上の SRW $|w(k)| \approx k^{\nu}$

$\nu = \dfrac{\log(d+3)}{\log 2}$

dSG 上の SAP $\nu = \dfrac{\log \lambda}{\log 2}$

$d = 2$: $\lambda = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$

$d = 3$: $\lambda = 2.7965\ldots$;

$g(x_c) = x_c > 0$;

$$\begin{aligned} g(x) = & -121 + 121x + 605x^2 + 813x^3 - 1432x^4 \\ & - 3656x^5 - 4424x^6 + 1680x^7 + 9468x^8 + 11788x^9 \\ & + 6692x^{10} + 1804x^{11} \end{aligned}$$

$$y_c = -\frac{h_2(x_c)}{2{x_c}^2 h_1(x_c)}$$

$$h_1(x) = -159 + 132x + 264x^2 + 196x^3$$

$$h_2(x) = 33 - 66x - 99x^2 + 88x^3 + 176x^4 + 88x^5 + 10x^6$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(p + r + \sqrt{(p-r)^2 + 4q^2});$$

$$p = 8x_c^3 + 6x_c^2 + 2x_c + 12x_c^2 y_c + 12x_c y_c^2$$

$$q = 4x_c^3 + 12x_c^2 y_c$$

$$r = 4x_c^3 + 88y_c^3$$

$d = 4$: $\lambda = 3.17282866849\cdots$

$x_c = g(x_c) > 0$;

$$
\begin{aligned}
g(x) =&\\
&- 3162456 + 3162456x + 27935028x^2 + 82351390x^3 + 534340195x^4 - 22712313853x^5\\
&- 22749190609x^6 + 173488539516x^7 + 520491536505x^8 + 159919155293x^9\\
&- 1067593750255x^{10} - 3355567112768x^{11} - 7117707818273x^{12} - 8049744033921x^{13}\\
&+ 3218074725393x^{14} + 29132597332920x^{15} + 58986824992938x^{16} + 74778447132144x^{17}\\
&+ 70897214418552x^{18} + 55063893147408x^{19} + 36096140965140x^{20}\\
&+ 19669482325692x^{21} + 7841354208804x^{22} + 1771680351168x^{23} + 149567809608x^{24},
\end{aligned}
$$

$x_c = 0.326490898\cdots$

くりこみ群が閉じるために必要な path の組分類

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $u, v \in G_n$ に対して $W^{(n,u,v)}$ を出発点と到達点が u, v である F_n 内のSAP ($w \in W_0$) の集合

$$W^{(n,u,v)} = \{w \in W_0 \mid w(0) = u,\ w(L(w)) = v,$$
$$w(i) \in G_n\,,\ i \in \mathbb{Z}_+\},$$

とする． $n \in \mathbb{Z}_+$ と $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して

$W_I^{(n)}$
$= \{(w_1, \cdots, w_k) \in W^{(n,O,v_{n,i_1})} \times W^{(n,v_{n,i_1+1},v_{n,i_1+i_2+1})}$
$\times W^{(n,v_{n,i_1+i_2+2},v_{n,i_1+i_2+i_3+2})}$
$\times \cdots \times W^{(n,v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}+k-1},v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_k+k-1})} \mid$
$i \neq j$ ならば w_i と w_j は交わらない，また各 j に対して
w_j は $v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j-1}$，$v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j}$，$v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j+1}$，
$\cdots$，$v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+i_j+j-1}$，をこの順に通るが
他の $\{v_{n,\ell} \mid \ell = 0, 1, 2, \cdots, d\}$ は通らない $\}$,

とおく.

ヤコビ行列

$$\mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_J}(\vec{x}), \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,,\ \vec{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}.$$

右固有ベクトル

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_d} v_{L,I} \mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}_c) = \lambda v_{L,J}\,, \quad J \in \mathcal{I}_d\,.$$

Fröbenius の定理から全成分非負としてよい.

注. (i) Jacobi 行列の固有値の 1 つが 1 より大きい実数であることは容易に分かる．それ以外は 1 より小さいことは $d = 2, 3, 4$ でしか分かっていない.

(ii) $d = 3$ では $\vec{\Phi}$ の固定点は ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \setminus \{0\}$ に複数あることが分かっているが，SAP の漸近的性質に関係する固定点は Ξ_3 の中にある SAFP である.

$\diamond$

$d = 2, 3$ では SAFP $\vec{x}_c$ はただ一つ存在し，0 座標成分を持っている．それらの成分座標が 0 であるような集合は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合になる．その不変部分集合に対応する SAP が，元の SAP の漸近的性質にとって本質的であることが分かっている.

歩数分布の弱収束

$\vec{X}_n \to \vec{x}_c$ に注意すると

$$\mathcal{J}_n = \left(\frac{\partial X_{n,I}}{\partial x_J} \right) \approx M \mathcal{J}(\vec{x}_c)^n.$$

λ が $\mathcal{J}_n(\vec{x}_c)$ の最大固有値だから平均歩数行列の収束を得る.
母関数が広義一様収束すること.
$\vec{\Phi}$ のヤコビ行列 $\mathcal{J}$ の SAFP $\vec{x}_c$ での固有値について，最大のものが $\lambda > 1$ であること，および，λ に対応する左固有ベクトルが 0 成分を持たないこと，を用いて，

$$|\vec{z}|_* = \sum_{I \in \mathcal{I}_d} v_{L,I} \, |z_I|,$$

を定義すると，これが (FP2) の下でノルムになって，しかも，

$$|\mathcal{J}(\vec{x}_c) \, \vec{z}|_* \leqq \lambda |\vec{z}|_* , \quad \vec{z} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}.$$

λ 以外の固有値が絶対値 1 未満であることも使うと，$\vec{X}_n(\vec{x})$ の $\vec{x}_c$ への収束は n について指数関数的なことも分かり，また，$\vec{X}_n(\vec{x})$ のヤコビ行列を λ^{-n} 倍したものの収束も分かる．これらから広義一様収束を得る．即ち，$p_{\vec{x},n,I}$ の弱収束が言える.

命題 12 $b>0, n\in\mathbb{Z}_+, \xi\in\mathbb{R}$, に対して，$c_n = b\lambda^{-n}\sqrt{n}$ および $h_n(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}c_n}e^{-\xi^2/(2c_n^2)}$ とおく．このとき，十分大きな b に対して $\xi\in\mathbb{R}$ に関して一様に

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I} * h_n)(\xi) = \overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),I}(\xi),\quad I\in\mathcal{K}_{\vec{x}_c}.$$

$(\overline{p}_{\vec{x},n,I} * h_n)(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x},n,I}(d\eta)$ は *convolution*.

（証明の要点．定理 6 の極限分布の特性関数が遠方で減少することから $\overline{p}_{\vec{x},n,I}$ の特性関数もある範囲で減少する．離散分布なので遠方では減少しないが，h_n の特性関数がかかるので減少する.）

$d_n = \sqrt{2n\log\lambda}c_n = \sqrt{2\log\lambda}\,b\,n\,\lambda^{-n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, とおくと，命題 12 から

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Bigl|\int_{[\xi-d_n,\xi+d_n]} h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)\\
&-\overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),(1)}(\xi)\Bigr|\\
&\leqq \lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}\setminus[\xi-d_n,\xi+d_n]} h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)\\
&\leqq \lim_{n\to\infty} h_n(d_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 n}} = 0\,.
\end{aligned}$$

密度 $\overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),(1)}$ が正であること (定理 6) から，$\epsilon>0$ が存在して，十分大きい n に対して

$$\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\xi-d_n,\xi+d_n]) \geqq c_n\epsilon,\quad \xi\in[\lambda^{-1},\lambda].$$

十分大きな自然数 k に対して自然数 n を $\lambda^{-n}k\in[1,\lambda)$ となるように選ぶと上記から，

$$\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\lambda^{-n}k-2d_n,\lambda^{-n}k]) \geqq c_n\epsilon.$$