解析学１試験問題兼解答用紙

1997/07/07 服部哲弥

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

学籍番号が 95CA··· **以外** の者は学籍番号を囲み，95CA··· の者は名前に飾りをつけないこと．
解答はこの用紙の答の欄に直接記入すること．早く終わった者は答案を提出して退出してよい．

以下では $\emptyset$ は空集合を表す．また，集合 A の補集合を A^c と書く．

問１． Ω は集合，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$，即ち Ω の集合族であって，しかも σ 加法族であるとする．また，μ は $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，即ち $\mathcal{F}$ 上で定義され $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に値をとる関数 (集合関数) であって，$\mu(\emptyset) = 0$ を満たしているとする．

(i) この集合関数 μ が測度であるとは，あと二つの性質を持つことであった．それは何か．次の語群の中から二つ選べ．答：$\boxed{}$，$\boxed{}$

語群：可換性，積分可能性，非可逆性，非可算性，非負性，普遍性，特殊性，一意性，一般性，抽象性，無限性，有限性，有限加法性，劣加法性，σ 加法性，σ 有限性，単調性，単調増大性，拡張性，完全性，完備性，連続性，解析性．

(ii) 下記二つの文中の空欄 (4 箇所) に適切な数式を入れて，それぞれ上記二つの性質の説明になるようにせよ．

- $\boxed{}$ を満たす任意の集合 $A \subset \Omega$ に対して，$\boxed{}$ が成り立つ．
- 全ての自然数 n に対して集合 $A_n \subset \Omega$ が $A_n \in \mathcal{F}$ を満たし，かつ，$k \neq \ell$ を満たす全ての自然数の組 k, ℓ に対して $\boxed{}$ ならば，$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \boxed{}$ が成り立つ．

問２． Ω を（十分大きな）集合，$A \subset \Omega$ と $B \subset \Omega$ は $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ が全て空集合でないように選んであるとする．

Ω の σ 加法族で最も小さいもの $\mathcal{F}_{min}$，即ち，どんな Ω の σ 加法族 $\mathcal{F}$ も $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_{min}$ を満たす $\mathcal{F}_{min}$，は $\mathcal{F}_{min} = \{\emptyset, \Omega\}$ である．以下に答えよ．

(i) A を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}_A$，即ち，$A \in \mathcal{F}$ を満たすどんな σ 加法族 $\mathcal{F}$ に対しても $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$ を満たす $\mathcal{F}_A$，を具体的に求めよ． 答：$\mathcal{F}_A = \left\{\boxed{}\right\}$

(ii) 同様に，A と B を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}_{AB}$ を求めよ．（16 個の集合よりなる集合族.）

答：$\mathcal{F}_{AB} = \left\{\boxed{}\right\}$

問 3． 以下の主張 (1, 2, 3) は σ 加法性を持たない有限加法的測度が存在することの証明である．空欄 (9 箇所) を正しく埋めることによって証明を完成せよ．

(主張 1) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の集合とする．$\mathcal{J} = \{A \subset \mathbf{N} \mid A$ または A^cが有限集合 $\}$ $(\subset 2^{\mathbf{N}})$ とおくと，$\mathcal{J}$ は $\mathbf{N}$ の有限加法族である．

(証明) まず，$\mathbf{N}^c = \emptyset$ かつ $\emptyset$ は有限集合だから $\mathbf{N} \in \mathcal{J}$ である．

次に，$A \in \mathcal{J}$ とすると，

$$\boxed{\quad}$$

最後に，$A \in \mathcal{J}$ かつ $B \in \mathcal{J}$ とする．$\mathcal{J}$ の定義から，

(case 1) A, B 両方とも有限集合であるか，

(case 2) A^c または B^c の少なくとも一方が有限集合である．

(case 1) のとき，$\boxed{\quad}$ も有限集合になるから $A \cup B \in \mathcal{J}$ である．

(case 2) のとき，さらに，A^c が有限集合である場合は，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$ だから，$\boxed{\quad}$ が有限集合になるので $A \cup B \in \mathcal{J}$ である．case 2 で B^c が有限集合である場合は，A と B を入れ替えた議論によって，やはり $A \cup B \in \mathcal{J}$ となる．

以上によって $\mathcal{J}$ は有限加法族である． □

(主張 2) $A \in \mathcal{J}$ に対して

$$m(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in A} 2^{-k}, & A \text{ が有限集合のとき}, \\ \displaystyle 5 - \sum_{k \in A^c} 2^{-k}, & A^c \text{が有限集合のとき}, \end{cases}$$

とおく．ここで和の記号 $\displaystyle\sum_{k \in A}$ は，有限集合 A の要素についての（有限）和を表す．要素がない，つまり，$A = \emptyset$，のときは和は 0 とする．このとき $m : \mathcal{J} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は有限加法的測度になる．

(証明) $m(\emptyset) = 0$ であることと，任意の $A \in \mathcal{J}$ に対して $m(A) \geq 0$ であることは m の定義式から明らか．よって m の $\boxed{\quad}$ 性を証明すればよい．

$A \cap B = \emptyset$ を満たす $A \in \mathcal{J}$ と $B \in \mathcal{J}$ をとる．A または A^c が有限集合，B または B^c が有限集合，であるから，以下の (i)–(iv) の 4 通りの可能性がある．

(i. A と B が有限集合の場合．) $A \cup B$ は有限集合になるから，m の定義によって $m(A \cup B) = \displaystyle\sum_{k \in A \cup B} 2^{-k}$ となるが，$\boxed{\quad} = \emptyset$ なので，和は，k が A の要素になるときと B の要素になるときについて，別々に取ればよい．よって

$$m(A \cup B) = \sum_{k \in A} 2^{-k} + \sum_{k \in B} 2^{-k} = m(A) + m(B)\,.$$

即ち，この場合は $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(ii. A と B^c が有限集合の場合．)

$\boxed{}$

よって，この場合も $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(iii. A^c と B が有限集合のとき．) (ii) の場合の証明で A と B を入れ替えた議論によって，この場合も $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(iv.) 最後に，A^c と B^c が有限集合になることはあり得ないことに注意する．実際，もし，A^c と B^c が有限集合だとすると，

$\boxed{}$

よって，A と B の選び方 $A \cap B = \emptyset$ に矛盾する．

以上により，$A \cap B = \emptyset$ を満たす $A \in \mathcal{J}$ と $B \in \mathcal{J}$ をとれば，必ず $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となることが分かった．即ち，m の $\boxed{}$ 性が証明された．証明の最初に注意したように，これは m が有限加法的測度であることを意味する．$\square$

(主張 3) m は σ 加法性は持たない．（即ち，$A \in \mathcal{J}$ および $A_n \in \mathcal{J}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をうまく選んで，$k \neq \ell$ なる自然数の組 k, ℓ に対して全て $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ が成り立ち，しかも，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ が成り立っているにも関わらず，$\displaystyle m(A) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ となることがある．）

(証明)

従って m は σ 加法性は持たない． □

問 4． 下記の文章はルベーグ測度正の疎な (開区間を含まない) 閉集合の存在を証明する記述である．空欄 (4 箇所) を適切に埋めて記述を完成せよ．

$[0, 1]$ を実数の閉区間 $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とし，$[0, 1] \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ を満たす実数の集合の列 $A_1, A_2, \cdots,$ を次のように定義する．A_1 は区間 $[0, 1]$ の中央の長さ 4^{-2} の区間を取り除いた集合，即ち，二つの区間の直和集合 $A_1 = [0, 2^{-1}(1 - 4^{-2})] \cup [2^{-1}(1 + 4^{-2}), 1]$ とする．A_2 は A_1 の二つの区間の各々の中央の長さ 4^{-3} の区間を除いた集合，従って，2^2 個の区間の直和集合とする．一般に，A_n は A_{n-1} の 2^{n-1} 個の区間の各々の中央の長さ 4^{-n-1} の区間を除いた 2^n 個の区間の直和集合とする．集合 A_{n-1} から A_n を作るときに取り除いた部分は長さ $\boxed{\qquad}$ の区間 2^{n-1} 個だから，合計で長さ $\ell_n = \boxed{\qquad}$ である．従って，A_n の全長は $\displaystyle 1 - \sum_{k=1}^{n} \ell_k = \boxed{\qquad\qquad}$ である．$\displaystyle A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ で集合 A を定義する．作り方から，A は疎な閉集合である．一次元 Lebesgue 測度は $\mathbf{R}$ 上の測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{F}, \mu)$ であって，$a \leq b$ ならば $[a, b] \in \mathcal{F}$ であって，しかも $\mu([a, b]) = b - a$ を満たす．測度の性質を用いれば，上に求めた A_n の長さから $\mu(A) = \boxed{\quad}$ となる．

問 5． 講義を採点せよ．（例えば，講義を面白く感じた部分と退屈に感じた部分，理解できた部分と分からなかった部分，などや，話し方や黒板の使い方，速度の遅速，など．万が一，出席不十分または出席しても講義に身を入れなかった場合は，その理由と教員に可能な改善策を解答せよ．説得力 (正直に書いているように見えるか) および現実性 (講義改善の参考になるか) を採点基準とする．）

解析学１試験解答

1997/07/08 服部哲弥

問 1 $(30 = 5 \times 6)$　Ω は集合，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$，即ち Ω の集合族であって，しかも σ 加法族であるとする．また，μ は μ: $\mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，即ち $\mathcal{F}$ 上で定義され $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に値をとる関数 (集合関数) であって，$\mu(\emptyset) = 0$ を満たしているとする．

(i) この集合関数 μ が測度であるとは，あと二つの性質を持つことであった．それは何か．語群の中から二つ選べ．答：$\boxed{\text{非負性}}$，$\boxed{\sigma\ \text{加法性}}$

(ii) 下記二つの文中の空欄 (4 箇所) に適切な数式を入れて，それぞれ上記二つの性質の説明になるようにせよ．

- $\boxed{A \in \mathcal{F}}$ を満たす任意の集合 $A \subset \Omega$ に対して，$\boxed{\mu(A) \geq 0}$ が成り立つ．
- 全ての自然数 n に対して集合 $A_n \subset \Omega$ が $A_n \in \mathcal{F}$ を満たし，かつ，$k \neq \ell$ を満たす全ての自然数の組 k, ℓ に対して $\boxed{A_k \cap A_\ell = \emptyset}$ ならば，$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$ が成り立つ．

問 2 $(20 = 1 \times (\text{正解数}-\text{誤答数})_+)$　Ω を（十分大きな）集合，$A \subset \Omega$ と $B \subset \Omega$ は $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ が全て空集合でないように選んであるとする．以下に答えよ．

(i) A を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}_A$，即ち，$A \in \mathcal{F}$ を満たすどんな σ 加法族 $\mathcal{F}$ に対しても $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$ を満たす $\mathcal{F}_A$，を具体的に求めよ．　答：$\mathcal{F}_A = \left\{\boxed{\emptyset,\ A,\ A^c,\ \Omega}\right\}$

(ii) 同様に，A と B を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}_{AB}$ を求めよ．

答：$$\mathcal{F}_{AB} = \left\{\boxed{\begin{array}{c} \emptyset,\ A \cap B,\ A \cap B^c,\ A^c \cap B,\ A^c \cap B^c,\ A,\ B,\ (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c), \\ (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B),\ A^c \cup B^c,\ A^c \cup B,\ A \cup B^c,\ A \cup B,\ A^c,\ B^c,\ \Omega \end{array}}\right\}$$

問 3 $(45 = (5 \times 3) + (2+2+5+5+1) + 15)$ 以下の主張 (1, 2, 3) は σ 加法性を持たない有限加法的測度が存在することの証明である．空欄 (9 箇所) を正しく埋めることによって証明を完成せよ．

(主張 1) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の集合とする．$\mathcal{J} = \{A \subset \mathbf{N} \mid A$ または A^cが有限集合 $\}$ $(\subset 2^{\mathbf{N}})$ とおくと，$\mathcal{J}$ は $\mathbf{N}$ の有限加法族である．

(証明) まず，$\mathbf{N}^c = \emptyset$ かつ $\emptyset$ は有限集合だから $\mathbf{N} \in \mathcal{J}$ である．

次に，$A \in \mathcal{J}$ とすると，

A または A^c が有限集合である．つまり，$(A^c)^c$ または A^c が有限集合だから $A^c \in \mathcal{J}$ である．

最後に，$A \in \mathcal{J}$ かつ $B \in \mathcal{J}$ とする．$\mathcal{J}$ の定義から，

(case 1) A, B 両方とも有限集合であるか，

(case 2) A^c または B^c の少なくとも一方が有限集合である．

(case 1) のとき，$\boxed{A \cup B}$ も有限集合になるから $A \cup B \in \mathcal{J}$ である．

(case 2) のとき，さらに，A^c が有限集合である場合は，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$ だから，$\boxed{(A \cup B)^c}$ が有限集合になるので $A \cup B \in \mathcal{J}$ である．case 2 で B^c が有限集合である場合は，A と B を入れ替えた議論によって，やはり $A \cup B \in \mathcal{J}$ となる．

以上によって $\mathcal{J}$ は有限加法族である． □

(主張 2) $A \in \mathcal{J}$ に対して

$$m(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in A} 2^{-k}, & A \text{ が有限集合のとき}, \\ \displaystyle 5 - \sum_{k \in A^c} 2^{-k}, & A^c \text{が有限集合のとき}, \end{cases}$$

とおく．ここで和の記号 $\displaystyle\sum_{k \in A}$ は，有限集合 A の要素についての（有限）和を表す．要素がない，つまり，$A = \emptyset$，のときは和は 0 とする．このとき $m : \mathcal{J} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は有限加法的測度になる．

(証明) $m(\emptyset) = 0$ であることと，任意の $A \in \mathcal{J}$ に対して $m(A) \geq 0$ であることは m の定義式から明らか．よって m の $\boxed{\text{有限加法}}$ 性を証明すればよい．

$A \cap B = \emptyset$ を満たす $A \in \mathcal{J}$ と $B \in \mathcal{J}$ をとる．A または A^c が有限集合，B または B^c が有限集合，であるから，以下の (i)–(iv) の４通りの可能性がある．

(i. A と B が有限集合の場合．) $A \cup B$ は有限集合になるから，m の定義によって $m(A \cup B) = \displaystyle\sum_{k \in A \cup B} 2^{-k}$ となるが，$\boxed{A \cap B} = \emptyset$ なので，和は，k が A の要素になるときと B の要素になるときについて，別々に取ればよい．よって

$$m(A \cup B) = \sum_{k \in A} 2^{-k} + \sum_{k \in B} 2^{-k} = m(A) + m(B)\,.$$

即ち，この場合は $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(ii. A と B^c が有限集合の場合．)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$$

だから $(A \cup B)^c$ が有限集合になる．よって， m の定義から，

$$m(A \cup B) = 5 - \sum_{k \in (A \cup B)^c} 2^{-k}\,.$$

A と B の選び方（$A \cap B = \emptyset$）から $A \subset B^c$ なので，de Morgan の法則とあわせて，

$$B^c = (A \cap B^c) + (A^c \cap B^c) = A + (A^c \cap B^c) = A + (A \cup B)^c$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= 5 - (\sum_{k \in B^c} 2^{-k} - \sum_{k \in A} 2^{-k}) \\ &= (5 - \sum_{k \in B^c} 2^{-k}) + \sum_{k \in A} 2^{-k} = m(B) + m(A)\,. \end{aligned}$$

最後の変形では A と B^c が有限集合であることを使った．

よって，この場合も $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(iii. A^c と B が有限集合のとき．) (ii) の場合の証明で A と B を入れ替えた議論によって，この場合も $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となる．

(iv.) 最後に，A^c と B^c が有限集合になることはあり得ないことに注意する．実際，もし，A^c と B^c が有限集合だとすると，

$A^c \cup B^c$ も要素が自然数の有限集合になるので要素の最大値がある．それを N とおくと，$N+1 \notin A^c \cup B^c$ だから de Morgan の法則より $N+1 \in (A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ となって，$A \cap B \ni N+1$ を得る．

よって，A と B の選び方 $A \cap B = \emptyset$ に矛盾する．

以上により，$A \cap B = \emptyset$ を満たす $A \in \mathcal{J}$ と $B \in \mathcal{J}$ をとれば，必ず $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となることが分かった．即ち， m の $\boxed{\text{有限加法}}$ 性が証明された．証明の最初に注意したように，これは m が有限加法的測度であることを意味する． □

(主張 3) m は σ 加法性は持たない．

(証明)

（解答例.） $\mathbf{N}^c = \emptyset$ だから $\mathbf{N} \in \mathcal{J}$ であって，定義から $m(\mathbf{N}) = 2$．一方，$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $A_k = \{k\}$ とおくと，$k \neq \ell$ のとき $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ であり，かつ，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbf{N}$ である．各 A_k は有限集合だから，定義より $m(A_k) = 2^{-k}$．仮に，σ 加法性が成り立つとすると，以上により，

$$5 = m(\mathbf{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

となって矛盾する．

従って m は σ 加法性は持たない． □

問 4 (5×4) 下記の文章はルベーグ測度正の疎な (開区間を含まない) 閉集合の存在を証明する記述である．空欄 (4 箇所) を適切に埋めて記述を完成せよ．

$[0,1]$ を実数の閉区間 $[0,1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とし， $[0,1] \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ を満たす実数の集合の列 $A_1, A_2, \cdots,$ を次のように定義する．A_1 は区間 $[0,1]$ の中央の長さ 4^{-2} の区間を取り除いた集合，即ち，二つの区間の直和集合 $A_1 = [0, 2^{-1}(1-4^{-2})] \cup [2^{-1}(1+4^{-2}), 1]$ とする．A_2 は A_1 の二つの区間の各々の中央の長さ 4^{-3} の区間を除いた集合，従って，2^2 個の区間の直和集合とする．一般に， A_n は A_{n-1} の 2^{n-1} 個の区間の各々の中央の長さ 4^{-n-1} の区間を除いた 2^n 個の区間の直和集合とする．**区間 $[a,b]$ の長さは $b-a$ であり，また，点を共有しない区間の和集合の長さは個々の区間の長さの和である．** 集合 A_{n-1} から A_n を作るときに取り除いた部分は長さ $\boxed{4^{-n-1}}$ の区間 2^{n-1} 個だから，合計で長さ $\ell_n = \boxed{2^{-n-3}}$ である．従って，A_n の全長は $1 - \sum_{k=1}^{n} \ell_k = \boxed{\frac{7}{8} + 2^{-n-3}}$ である．$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ で集合 A を定義する．一次元 Lebesgue 測度は $\mathbf{R}$ 上の測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{F}, \mu)$ であって，$a \leq b$ ならば $[a,b] \in \mathcal{F}$ であって，しかも $\mu([a,b]) = b - a$ を満たす．測度の性質

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ \mu(A_1) < \infty \implies \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

を用いれば，上に求めた A_n の長さから $\mu(A) = \boxed{\frac{7}{8}}$ となる．

この集合 A は，作り方から，疎な閉集合で，しかも，今見たように測度はゼロではない．閉集合なので境界点を全て含んでいるのに，なおかつ細切れ（疎）で，それでも長さがゼロでない，ということがあることが分かる．

問 5 (15) （原理的に解答例等は存在しません.）