解析学１試験問題兼解答用紙

1997/12/15 服部哲弥

学籍番号 ____________________ 氏名 ______________________________

学籍番号が 95CA$\cdots$ 以外の者は学籍番号を囲み，95CA$\cdots$ の者は名前に飾りをつけないこと．解答はこの用紙の所定の欄に直接記入せよ．早く終わった者は答案を提出して退出してよい．

以下では集合 A の補集合を A^c，集合 A, B に対して $A \cap B^c$ を $A \setminus B$ と書く．また，$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R^2}$, はそれぞれ整数，有理数，実数，２次元実平面，を表す．

問 1 (3×13)．　$(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間（実数上の完備測度で，区間 $(a, b]$ に対して $\mu_1(\,(a, b]\,) = b - a$ となる測度）とする．$x > 0$ で定義された実数値関数 f が可測関数であることと，$\{x > 0 \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}_1$ が全ての実数 a に対して成り立つことが，同値であることが知られている．以下の問に答えよ．

(i) 次の文章は $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + 1)$ が可測関数であることの，上記の同値条件を用いた証明である．空欄 2 カ所に正しい値（該当する開区間の左端の点の値）を入れよ．

$a > 0$ ならば，開区間 $\{x > 0 \mid f(x) > a\} = (\boxed{}, \infty)$ は $\mathcal{F}_1$ の要素である．また，$a \le 0$ ならば $\{x > 0 \mid f(x) > a\} = (\boxed{}, \infty)$ は $\mathcal{F}_1$ の要素である．よって全ての実数 a に対して $\{x > 0 \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}_1$ だから $f(x) = \log(x+1)$ は可測関数である．($(b, \infty) = \displaystyle\bigcup_{n=[b]+1}^{\infty} (b, n]$ なので，開区間 (b, ∞) は $\mathcal{F}_1$ の要素になることに注意.）

(ii) 次の文章の空欄 2 カ所を適切な数式で埋めよ．

f が非負可測関数のとき，

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \text{ のとき}, \\ (k-1)2^{-n}, & (k-1)2^{-n} < f(x) \le k2^{-n} \text{ のとき}, \ (k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n n), \\ n, & f(x) > n \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定義される関数列 f_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は $n \to \infty$ のとき f に各点収束する非負増大単関数列になる．例えば $f(x) = \log(x+1)$ $(x > 0)$ とおくと，$k = 1, 2, 3, \cdots, 2^n n$ に対して，$\boxed{} < x \le \boxed{}$ のとき $f_n(x) = (k-1)2^{-n}$ となる．

(iii) 次の計算は，$n \ge 2$ のとき，前問で求めた単関数 f_n の，$0 < x \le e^2 - 1$ での積分 $I_n = \displaystyle\int_{(0, e^2-1]} f_n \, d\mu_1$ を求める計算である．ここで e は自然対数の底 $(e = 2.718281828\cdots)$．正しい計算になるように空欄 8 カ所を埋めよ．

$f(x) = \log(x + 1)$ は $x > 0$ で非負で単調増加であり，$0 < x \le e^2 - 1$ は $0 < \log(x + 1) \le \log e^2 = 2$ と同値である．従って，上記 f_n の定義において，$k =$

$1, 2, \cdots, 2{\cdot}2^n$ に対応する x の範囲が $(0, e^2-1]$ に一致する．また， $f_n(x) = (k-1)2^{-n}$ と $(k-1)2^{-n} < \log(x+1) \leq k2^{-n}$ が同値である．この範囲を x について解くと，

$$\exp(\boxed{\qquad\qquad}) - 1 < x \leq \exp(\boxed{\qquad}) - 1$$

となる $(\exp(x) = e^x)$．従って， $N = 2^n$ とおいて I_n を計算すると，$n \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{(0,e^2-1]} f_n \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{2N} (k-1)\frac{1}{N} \left(\exp(\boxed{\qquad}) - \exp(\boxed{\qquad\qquad})\right) \\
&= \frac{1}{N}(\boxed{\qquad\qquad\quad}) \sum_{k=1}^{2N} (k-1) \, \exp((k-1)/N) \,.
\end{aligned}$$

ここで，公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{M} g(k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} g(\ell+1)$ を用いて和の変数を k から ℓ に変更し，さらに，$a = \exp(1/N) = e^{1/N}$ とおいて，公式 $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M-1} \ell a^\ell = \frac{Ma^M}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2}(a^M - 1) \quad (a \neq 1)$ を用いると，

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{N}(\boxed{\qquad}) \sum_{\ell=0}^{2N-1} \ell \, a^\ell \\
&= \frac{1}{N}\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}$$

となるが，$a = e^{1/N}$ を代入し，$a^{2N} = e^2$ に注意して計算すると，結局

$$I_n = \boxed{\qquad} - \frac{e^{1/N}(e^2-1)}{N\,(e^{1/N}-1)}$$

となる．但し $N = 2^n$．

(iv) 前問で求めた I_n について， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を計算することによって次の空欄を埋めよ．

$$\int_0^{e^2-1} \log(x+1) \, dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{\qquad}.$$

問 2 (3×10)． 2 次元 Lebesgue 測度 ($\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度) μ_2 は 1 次元 Lebesgue 測度 μ_1 2 個の直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$ の完備化に等しい．このことを説明する次の文章の空欄１０カ所に下の語群から適当なものを入れよ.（語群には複数回用いる語も全く用いない語もある.）

$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可測集合族を $\mathcal{F}_1$ と書き，$\mathcal{I} = \{E \times F \mid E, F \in \mathcal{F}_1\}$ とおく．$\mathcal{I}$ の要素を矩形集合と呼ぶ. $\mathcal{I}$ の要素の有限個の直和（共通部分を持たない和集合）全てを

要素に持つ集合族を $\mathcal{J}$ とおくと $\mathcal{J}$ は $\boxed{\qquad\qquad}$ になる．$\mathcal{J}$ で定義された集合関数 m を，$\mathcal{I}$ の要素に対して $m(E\times F)=\mu_1(E)\,\mu_1(F)$ $(0\times\infty=0$ の約束とする$)$ とし，$\mathcal{I}$ の要素の直和に対しては和でもって m の値を決めることにすると，m は σ 加法性を持つ σ 有限な有限加法的測度になる．従って $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ により $\sigma[\mathcal{J}]$ の上の測度 μ に一意的に拡張できる．ここで $\sigma[\mathcal{J}]$ は $\mathcal{J}$ を含む $\boxed{\qquad}$ の σ 加法族を表す．すぐ分かるように $\sigma[\mathcal{J}]=\sigma[\mathcal{I}]$ である．この μ が $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ である．

さて，$\mathbf{R^2}$ の長方形（$\{(x,y)\mid a<x\le b,\ c<y\le d\}$ という形の集合）全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{I}_2$ とするとき，再び $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ を用いると，上の場合と同様に，$\mathcal{B}_2=\sigma[\mathcal{I}_2]$ 上の測度であって，長方形に対してはその面積を与えるものがただ一つある．$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ はこの測度の完備化である．

$\mathcal{F}_1$ は区間を含むので $\mathcal{I}\supset\mathcal{I}_2$．従って，$\sigma[\mathcal{J}]=\sigma[\mathcal{I}]\boxed{\quad}\sigma[\mathcal{I}_2]=\mathcal{B}_2$ である．また，拡張の一意性から $\mathcal{B}_2$ 上では $\mu_2=\mu_1\times\mu_1$ である．$\mathcal{F}_1$ は区間が生成する σ 加法族 $\sigma[\mathcal{I}_1]$ の完備化だから測度 $(\mathbf{R^2},\sigma[\mathcal{I}],\mu_1\times\mu_1)$ はその作り方から $(\mathbf{R^2},\mathcal{B}_2,\mu_1\times\mu_1)$ の完備化に含まれる．従って，両者の完備化は一致する．

以上により，2 次元 Lebesgue 測度 μ_2 は直積測度 $\mu_1\times\mu_1$ の完備化に等しい．

ところで，上記で 2 度用いた $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ は，有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の σ 加法性を持つ有限加法的測度 m から σ 加法族 $\mathcal{F}$ 上の測度 μ を構成できることを主張しているが，具体的には次の方法による．Ω の部分集合 A に対して

$$\Gamma(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\mid E_n\in\mathcal{J}\ (n=1,2,3,\cdots),\ A\boxed{\quad}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\}$$

とおくと Γ は外測度になる．次に，$E\subset\Omega$ が外測度 Γ に関して可測集合であるとは $\Gamma(E\cap A)+\Gamma(\boxed{\qquad\quad})=\Gamma(A)$ が全ての $A\subset\Omega$ に対して成り立つことと定義する．可測集合の全体（集合族）を $\mathcal{F}$ とおき，Γ を $\mathcal{F}$ に制限したものを μ と書くと μ は測度になる．外測度と可測集合の定義から直ちに $\mathcal{F}\supset\mathcal{J}$ を得るが，さらに，m が σ 加法性を持つことから μ は $\mathcal{J}$ では m に一致する．即ち，このようにして得られた測度 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は有限加法的測度 $(\Omega,\mathcal{J},m)$ の拡張になっている．

このような測度の構成方法は一見技巧的であるが，Lebesgue の原論文を読むと，極めて自然な方法であることが分かる．実際，多くの非可算集合上の具体的かつ有用な測度の例は，この方法で構成されている．

語群

$\subset$	σ 加法族	最小	$E\cap A^c$	直積測度 $\mu_1\times\mu_1$	Hopf の拡張定理
$\supset$	有限加法族	最大	$E^c\cap A$	2 次元 Lebesgue 測度 μ_2	Fatou の補題

問 3 $(6\times($正答数 $-$ 誤答数$)_+)$.　次の文章は，可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上で定義された 2 つの実数値可測関数 $f\colon\ \Omega\to\mathbf{R}$, $g\colon\ \Omega\to\mathbf{R}$ に対して，集合 $\{x\in\Omega\mid f(x)>g(x)\}$ が

可測集合になることの証明である．この定理は可測関数の和や積が再び可測関数になることを示すためにも必要な，重要な基本性質である．この文章を読んで，後の問に答えよ．

全ての有理数の集合を $\mathbf{Q}$ とすると，

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \left(\{x \in \Omega \mid f(x) > r\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) < r\}\right),$$

である．この式の右辺において，f, g は可測関数なので $\{x \in \Omega \mid f(x) > r\}$，$\{x \in \Omega \mid g(x) < r\}$ はともに可測集合であり，$\mathbf{Q}$ は可算集合だから，$\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}$ も可測集合である．

問：証明の中で r は有理数 $\mathbf{Q}$ の範囲で和をとっているが，$\mathbf{Q}$ を他の集合に取り替えても証明がそのまま成り立つ場合がある．以下の選択肢 A から F までのうちで，$\mathbf{Q}$ を置き換えても上記証明がそのまま成り立つものを全て選び，A から F までの記号で答えよ．答 $\boxed{}$

選択肢

$A = \mathbf{R}$ （実数全体）	$D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ （有理数でない実数）
$B = \mathbf{Z}$ （整数全体）	$E = \sqrt{2}\mathbf{Q} = \{\sqrt{2}x \mid x \in \mathbf{Q}\}$
$C = \{\frac{q}{2p} \mid p, q \in \mathbf{Z},\ p \neq 0\}$	$F = \{\frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbf{Z},\ p \neq 0,\ \lvert p\rvert \leq 100\}$

問 4 (4×6)．　実数値関数列の極限や実数値関数項の級数のルベーグ積分に関する公式（定理）は全て Fatou の補題を用いて証明できる．次の文章は，この重要な補題に関する例題である．空欄 6 カ所を正しく埋めよ．

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の可測集合 $E \subset \Omega$ 上で定義された非負実数値可測関数列 f_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, が与えられたとき，Fatou の補題はこの関数列の下極限 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ の積分 $\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$ と積分値 $\int_E f_n \, d\mu$ の（数列としての）下極限 $\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$ の大小関係を与える定理である．両者は積分と極限を入れ替えただけだが，値は等しいとは限らない．このことを示すために次の例を考える．

$(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とし，区間 $E = (0, 1] \subset \mathbf{R}$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 + (-1)^n, & 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 3 + (-1)^{n-1}, & \dfrac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$
$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

を考える．f_n たちは明らかに非負実数値可測関数である．このとき，$0 < x \leq \frac{1}{2}$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x) = \boxed{},$$

また，$\dfrac{1}{2} < x \le 1$ ならば $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{}$ となるので，

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \boxed{}$$

である．他方，f_n を $(0,1]$ で積分すると $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \boxed{}$ となるので，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \boxed{}$$

である．

仮に不等号の向きを度忘れしても，この例を思い出せば，Fatou の補題は

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \ \boxed{}\ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$$

であることが分かる．

問 5 (15)． 以下の採点表に従って講義を採点せよ．

(i) 講義に関する下の項目のうち良かった項目には ◯ ，良くなかった項目には × をつけよ（「普通」ならば何も付けない）．

□明瞭な話し方か.
□早口過ぎないか.
□黒板は読みやすかったか.
□各回の講義内容の，全体の中での位置づけを明確にしたか.
□質問の受け答えは適切か.
□準備は十分なされているようだったか.
□内容をわかって講義しているようだったか.
□十分中身のある内容だったか.
□内容を詰め込みすぎないようにしていたか.
□講義に刺激されたか，興味が持てたか.

(ii) 解析学 I の講義の総合評価（10 点法，10 が最良）＿＿＿＿＿.
(iii) 解答者の解析学 I の講義の理解程度（10 点法，10 が最良）＿＿＿＿＿.
(iv) 解答者の解析学 I の講義の授業態度の自己評価（10 点法，10 が最良）＿＿＿＿＿.
(v) その他の意見（余白に自由記述）．

解析学１試験解答

1997/12/15 服部哲弥

問 1 (3×13). $(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間（実数上の完備測度で，区間 $(a,b]$ に対して $\mu_1(\,(a,b]\,) = b-a$ となる測度）とする．$x > 0$ で定義された実数値関数 f が可測関数であることと，$\{x > 0 \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}_1$ が全ての実数 a に対して成り立つことが，同値であることが知られている．

(i) 次の文章は $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x+1)$ が可測関数であることの，上記の同値条件を用いた証明である．空欄 2 カ所に正しい値（該当する開区間の左端の点の値）を入れよ．

$a > 0$ ならば，開区間 $\{x > 0 \mid f(x) > a\} = (\boxed{e^a - 1}, \infty)$ は $\mathcal{F}_1$ の要素である．また， $a \le 0$ ならば $\{x > 0 \mid f(x) > a\} = (\boxed{0}, \infty)$ は $\mathcal{F}_1$ の要素である．よって全ての実数 a に対して $\{x > 0 \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}_1$ だから $f(x) = \log(x+1)$ は可測関数である．

(ii) 次の文章の空欄 2 カ所を適切な数式で埋めよ．

f が非負可測関数のとき，

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \text{ のとき}, \\ (k-1)2^{-n}, & (k-1)2^{-n} < f(x) \le k2^{-n} \text{ のとき}, \ (k = 1,2,3,\cdots,2^n n), \\ n, & f(x) > n \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定義される関数列 f_n, $n = 1,2,3,\cdots$, は $n \to \infty$ のとき f に各点収束する非負増大単関数列になる．例えば $f(x) = \log(x+1)$ $(x > 0)$ とおくと， $k = 1,2,3,\cdots,2^n n$ に対して，$\boxed{e^{(k-1)2^{-n}} - 1} < x \le \boxed{e^{k2^{-n}} - 1}$ のとき $f_n(x) = (k-1)2^{-n}$ となる．

(iii) 次の計算は，$n \ge 2$ のとき，前問で求めた単関数 f_n の， $0 < x \le e^2 - 1$ での積分 $I_n = \displaystyle\int_{(0,e^2-1]} f_n \, d\mu_1$ を求める計算である．ここで e は自然対数の底 $(e = 2.718281828\cdots)$．正しい計算になるように空欄 8 カ所を埋めよ．

$f(x) = \log(x+1)$ は $x > 0$ で非負で単調増加であり，$0 < x \le e^2 - 1$ は $0 < \log(x+1) \le \log e^2 = 2$ と同値である．従って，上記 f_n の定義において，$k = 1,2,\cdots,2 \cdot 2^n$ に対応する x の範囲が $(0, e^2 - 1]$ に一致する．また， $f_n(x) = (k-1)2^{-n}$ と $(k-1)2^{-n} < \log(x+1) \le k2^{-n}$ が同値である．この範囲を x について解くと，

$$\exp(\boxed{(k-1)2^{-n}}) - 1 < x \le \exp(\boxed{k2^{-n}}) - 1$$

となる $(\exp(x) = e^x)$．従って， $N = 2^n$ とおいて I_n を計算すると，$n \geq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{(0,e^2-1]} f_n \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{2N} (k-1) \frac{1}{N} \left(\exp(\boxed{k/N}) - \exp(\boxed{(k-1)/N})\right) \\
&= \frac{1}{N} (\boxed{\exp(1/N) - 1}) \sum_{k=1}^{2N} (k-1) \exp((k-1)/N) \, .
\end{aligned}
$$

ここで，公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{M} g(k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} g(\ell+1)$ を用いて和の変数を k から ℓ に変更し，さらに，$a = \exp(1/N) = e^{1/N}$ とおいて，公式 $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{M-1} \ell a^\ell = \frac{M a^M}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2}(a^M - 1) \ \ (a \neq 1)$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{N} (\boxed{a-1}) \sum_{\ell=0}^{2N-1} \ell \, a^\ell \\
&= \frac{1}{N} \boxed{(a-1) \left(\frac{2N a^{2N}}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2}(a^{2N} - 1) \right)}
\end{aligned}
$$

となるが，$a = e^{1/N}$ を代入し，$a^{2N} = e^2$ に注意して計算すると，結局

$$
I_n = \boxed{2e^2} - \frac{e^{1/N}(e^2 - 1)}{N\,(e^{1/N} - 1)}
$$

となる．但し $N = 2^n$.

(iv) 前問で求めた I_n について， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を計算することによって次の空欄を埋めよ．

$$
\int_0^{e^2-1} \log(x+1) \, dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{e^2 + 1} .
$$

問 2 (3×10)． 2 次元 Lebesgue 測度 ($\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度) μ_2 は 1 次元 Lebesgue 測度 μ_1 2 個の直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$ の完備化に等しい．このことを説明する次の文章の空欄１０カ所に下の語群から適当なものを入れよ．(語群には複数回用いる語も全く用いない語もある．)

$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可測集合族を $\mathcal{F}_1$ と書き，$\mathcal{I} = \{E \times F \mid E, F \in \mathcal{F}_1\}$ とおく．$\mathcal{I}$ の要素を矩形集合と呼ぶ．$\mathcal{I}$ の要素の有限個の直和（共通部分を持たない和集合）全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{J}$ とおくと $\mathcal{J}$ は $\boxed{\text{有限加法族}}$ になる．$\mathcal{J}$ で定義された集合関数 m を，$\mathcal{I}$ の要素に対して $m(E \times F) = \mu_1(E)\,\mu_1(F)$ $(0 \times \infty = 0$ の約束とする$)$ とし，$\mathcal{I}$ の要素の直和に対しては和でもって m の値を決めることにすると，m は σ 加法性を持つ σ 有限な有限加法的測度になる．従って $\boxed{\text{Hopf の拡張定理}}$ により $\sigma[\mathcal{J}]$ の上の測度 μ に一意的に拡張できる．ここで $\sigma[\mathcal{J}]$ は $\mathcal{J}$ を含む $\boxed{\text{最小}}$ の σ 加

法族を表す．すぐ分かるように $\sigma[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{I}]$ である．この μ が $\boxed{\text{直積測度 } \mu_1 \times \mu_1}$ である．

さて，$\mathbf{R^2}$ の長方形（$\{(x,y) \mid a < x \leq b,\ c < y \leq d\}$ という形の集合）全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{I}_2$ とするとき，再び $\boxed{\text{Hopf の拡張定理}}$ を用いると，上の場合と同様に，$\mathcal{B}_2 = \sigma[\mathcal{I}_2]$ 上の測度であって，長方形に対してはその面積を与えるものがただ一つある．$\boxed{\text{2 次元 Lebesgue 測度 } \mu_2}$ はこの測度の完備化である．

$\mathcal{F}_1$ は区間を含むので $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_2$．従って，$\sigma[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{I}] \boxed{\supset} \sigma[\mathcal{I}_2] = \mathcal{B}_2$ である．また，拡張の一意性から $\mathcal{B}_2$ 上では $\mu_2 = \mu_1 \times \mu_1$ である．$\mathcal{F}_1$ は区間が生成する σ 加法族 $\sigma[\mathcal{I}_1]$ の完備化だから測度 $(\mathbf{R^2}, \sigma[\mathcal{I}], \mu_1 \times \mu_1)$ はその作り方から $(\mathbf{R^2}, \mathcal{B}_2, \mu_1 \times \mu_1)$ の完備化に含まれる．従って，両者の完備化は一致する．

以上により，2 次元 Lebesgue 測度 μ_2 は直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$ の完備化に等しい．

ところで，上記で 2 度用いた $\boxed{\text{Hopf の拡張定理}}$ は，有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の σ 加法性を持つ有限加法的測度 m から σ 加法族 $\mathcal{F}$ 上の測度 μ を構成できることを主張しているが，具体的には次の方法による．Ω の部分集合 A に対して

$$\Gamma(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid E_n \in \mathcal{J}\ (n = 1, 2, 3, \cdots),\ A \boxed{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$$

とおくと Γ は外測度になる．次に，$E \subset \Omega$ が外測度 Γ に関して可測集合であるとは $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(\boxed{E^c \cap A}) = \Gamma(A)$ が全ての $A \subset \Omega$ に対して成り立つことと定義する．可測集合の全体（集合族）を $\mathcal{F}$ とおき，Γ を $\mathcal{F}$ に制限したものを μ と書くと μ は測度になる．外測度と可測集合の定義から直ちに $\mathcal{F} \supset \mathcal{J}$ を得るが，さらに，m が σ 加法性を持つことから μ は $\mathcal{J}$ では m に一致する．即ち，このようにして得られた測度 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は有限加法的測度 $(\Omega, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている．

このような測度の構成方法は一見技巧的であるが，Lebesgue の原論文を読むと，極めて自然な方法であることが分かる．実際，多くの非可算集合上の具体的かつ有用な測度の例は，この方法で構成されている．

問 3 ($6 \times$ (正答数 − 誤答数)$_+$)．　次の文章は，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上で定義された 2 つの実数値可測関数 $f\colon\ \Omega \to \mathbf{R}$, $g\colon\ \Omega \to \mathbf{R}$ に対して，集合 $\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}$ が可測集合になることの証明である．この定理は可測関数の和や積が再び可測関数になることを示すためにも必要な，重要な基本性質である．この文章を読んで，後の問に答えよ．

> 全ての有理数の集合を $\mathbf{Q}$ とすると，
>
> $$\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{x \in \Omega \mid f(x) > r\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) < r\}),$$
>
> である．この式の右辺において，f, g は可測関数なので $\{x \in \Omega \mid f(x) > r\}$, $\{x \in \Omega \mid g(x) < r\}$ はともに可測集合であり，$\mathbf{Q}$ は可算集合だから，$\{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}$ も可測集合である．

問：証明の中で r は有理数 $\mathbf{Q}$ の範囲で和をとっているが，$\mathbf{Q}$ を他の集合に取り替えても証明がそのまま成り立つ場合がある．以下の選択肢 A から F までのうちで，$\mathbf{Q}$ を置き換えても上記証明がそのまま成り立つものを全て選び，A から F までの記号で答えよ．答 $\boxed{C,\ E}$
（実数の稠密な部分集合で可算集合であるものを選ぶことが必要十分条件である．）

問 4 (4×6).　実数値関数列の極限や実数値関数項の級数のルベーグ積分に関する公式（定理）は全て Fatou の補題を用いて証明できる．次の文章は，この重要な補題に関する例題である．空欄 6 カ所を正しく埋めよ．

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の可測集合 $E \subset \Omega$ 上で定義された非負実数値可測関数列 f_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, が与えられたとき，Fatou の補題はこの関数列の下極限 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ の積分 $\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$ と積分値 $\int_E f_n \, d\mu$ の（数列としての）下極限 $\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$ の大小関係を与える定理である．両者は積分と極限を入れ替えただけだが，値は等しいとは限らない．このことを示すために次の例を考える．

$(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間とし，区間 $E = (0, 1] \subset \mathbf{R}$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 + (-1)^n, & 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 3 + (-1)^{n-1}, & \dfrac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$
$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

を考える．f_n たちは明らかに非負実数値可測関数である．このとき，$0 < x \le \frac{1}{2}$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \ge n} f_k(x) = \boxed{2},$$

また，$\frac{1}{2} < x \le 1$ ならば $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{2}$ となるので，

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \, dx = \boxed{2}$$

である．他方，f_n を $(0, 1]$ で積分すると $\int_0^1 f_n(x) \, dx = \boxed{3}$ となるので，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \boxed{3}$$

である．

仮に不等号の向きを度忘れしても，この例を思い出せば，Fatou の補題は

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \ \boxed{\le}\ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$$

であることが分かる．

問 5 (15).　都合により解答例を省略します．