

解析学I前期試験問題兼解答用紙

1998/07/13 服部哲弥

学籍番号 _____ 氏名 _____

学籍番号が 96CA 以外で始まる者は学籍番号を囲み, 96CA で始まる者は名前に飾りをつけないこと. 解答はこの用紙の答の欄に直接記入せよ. 早く終わった者は答案を提出して退出してよい. 以下では \emptyset は空集合を表す. また, 集合 A の補集合を A^c と書く.

問 1 (30). δ は定数で $0 < \delta < 1/2$ とする. 無限数列 $1, \delta, \delta^2, \dots$ の任意の部分無限数列の和を S とするとき, 全ての S を集めた集合 A は, ルベグ測度 0 であることを示せ.

問 2 (30 = 10 × 3) . 測度論に関する下記の問題文とその解答例について , 後の問に答よ .
問題文 .

$\mu(\Omega) < \infty$ なる測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において , 可算和について閉じている集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ を考える (即ち , \mathcal{A} に属する任意の可算個の集合の合併が \mathcal{A} に属するとする) . $K = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおくと , $\mu(B) = K$ となる $B \in \mathcal{A}$ が存在することを証明せよ . また , 任意のそのような B と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cap B^c) = 0$ が成り立つことを証明せよ .
解答例 .

K の定義から , \mathcal{A} に属する集合の列 $A_n, n = 1, 2, 3, \dots$, で $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = K$ となるものがある . $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が求める性質を持つことを証明する .

\mathcal{A} は可算和に関して閉じているから $B \in \mathcal{A}$ である . 従って K の定義から $\mu(B) \leq K$ である . 他方 , 任意の n に対して $A_n \subset B$ だから , 測度の単調性より $\mu(B) \geq \mu(A_n)$ が任意の n に対して成り立つ . 故に $\mu(B) \geq K$ でもある . よって $\mu(B) = K$ が成り立つ .

$\mu(B) = K$ かつ $\mu(A \cap B^c) > 0$ となる $A, B \in \mathcal{A}$ があると仮定する . \mathcal{A} は可算和について閉じているから , 有限和についても閉じている . よって $A \cup B \in \mathcal{A}$. 他方 , 測度の加法性から $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B)$ であるが , 仮定から $\mu(A \cap B^c) > 0$ なので , $\mu(A \cup B) > \mu(B) = K$ となる . これは K の定義と矛盾する . よって $A \in \mathcal{A}$ ならば $\mu(A \cap B^c) = 0$ である .

問 .

- (i) 問題文最初の仮定 $\mu(\Omega) < \infty$ は解答例で暗黙のうちに用いられている . この仮定を用いて導かれた最初の部分に下線を引け (解答例の該当部分に下線を書き込め) .
- (ii) その部分を導くのに仮定を用いていると考えるに至った推論の過程を , 教員の立場で学生に分かりやすく説明するつもりで , 説明せよ .

(iii) 仮定 $\mu(\Omega) < \infty$ がなければ (1) で引いた下線部分が成り立たない場合があることを、具体的な例を与えることで示せ。

問 3 ($40 = 3 \times 10 + 10$) . 実数の集合 \mathbf{R} の区間 $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, を全て集めた集合族を \mathcal{I} と書く (但し, $(a, a] = \emptyset$ とし, また, $(a, \infty] = (a, \infty)$ などの意味とする.) \mathcal{I} は \mathbf{R} の部分集合の集合族である. \mathcal{I} の任意の要素 $(a, b]$ に対して $\mu((a, b]) = b - a$ となる測度, 即ち素朴な「長さ」の拡張概念となる測度 μ (ルベグ測度), が存在することが知られている. 講義でこのような測度を構成 (存在証明) した. これについて以下の問 (i)(ii) に答えよ.

(i) ルベグ測度の構成の手順を説明する次の文章の空欄 (10 箇所) に下の語群から適当なものを入れよ (異なる欄は異なる語が入る. 用いない語もある.)

\mathbf{R} 上の区間塊の族 $\mathcal{J} = \{\sum_{i=1}^n I_i \mid n \in \mathbf{N}, I_i \in \mathcal{I}, i = 1, 2, \dots, n\}$ は $\mathbf{R} \in \mathcal{J}$ であり, か

つ, 補集合と有限和の集合算について閉じているので, である. し

かし, 可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ について閉じていないので ではない.

$E \in \mathcal{J}$ に対して $E = \sum_{i=1}^n I_i$ なる $I_i = (a_i, b_i] \in \mathcal{I}, i = 1, 2, \dots, n$, をとり, $m(E) =$

$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ で m を定義すると, m は \mathcal{J} 上の になる. 即ち, m は非負で有限加法性を持つ集合関数である.

\mathbf{R} の部分集合 A に対して $\Gamma(A) = \text{} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset A, E_n \in \mathcal{J} (n = \right.$

$1, 2, 3, \dots\}$ とおくと, Γ は $\Gamma(\emptyset) = 0$ を満たし, 非負性, 単調性, \square , の諸性質を持つ. このことを Γ は \square であるという.

Γ は σ 加法性を持つとは限らないが, 定義域を制限することで, σ 加法性を持つようにできる. \mathbb{R} の任意の部分集合 A に対して $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(\square) = \Gamma(\square)$ を満たす $E \subset \Omega$ を全て集めた集合族を \mathcal{F} とおくと, \mathcal{F} が σ 加法族になることが若干の議論によって示すことができる. この性質を持つ集合 E を $(\Gamma-)\square$ と呼ぶ. そして, Γ の定義域を \mathcal{F} に制限した集合関数を μ とおく ($\mu = \Gamma|_{\mathcal{F}}$) と, μ が \mathcal{F} 上の \square になることも同時に示される. $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ も成り立つ.

m は \mathcal{J} 上 σ 加法的なので, $\mu|_{\mathcal{J}} = m$ が成り立つことも証明できる. m が \mathcal{J} 上 σ 加法的であることを証明する際に実数の位相的性質を用いるので, この部分の証明が最も一般化しにくい.

以上によって, 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている測度であることが分かる. μ をルベーグ測度と呼ぶ.

語群

有限加法族, σ 有限性, σ 加法族, 有限加法的測度, 内測度, 外測度, 超測度, 測度, 積分可能性, 劣等性, 劣加法性, 普遍性, 特殊性, 一意性, 可算集合, 非可算集合, 非可測集合, 可測集合, \max , \min , \sup , \inf , \limsup , \liminf , \lim , A , E , $E^c \cap A$, $E \cap A^c$

(ii) 上記の説明文の中で下線を引いた主張 (可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ について閉じていない) について, その主張を示す具体例をあげよ.

問 4 (20) . 本年度の解析学 I これまでの講義にほぼ半分以上出席した諸君は下記左欄の (i)(ii) , それ以外の出席の少ない諸君は右欄の (i)(ii) , にそれぞれ解答せよ . (i)(ii) に関して説得力 (正直に書いているように見えるか) , および , (ii) の自由記述に関して独自性 (他の人が書いていないことを書いているか) , を採点基準とする (なお , このページのみ回収させていただきます .)

出席派

↓

(i) 講義に関する下の項目のうち当てはまる (良かった) 項目には ○ , 良くなかった項目には × をつけよ (「普通」ならば何も付けない) .

- 明瞭な話し方か .
- 板書は早すぎなかったか .
- 黒板は読みやすかったか .
- 進度が遅すぎないか .
- 内容が多すぎないか .
- 質問の受け答えは適切か .
- 講義に刺激されたか , 興味が持てたか .
- (担当教員の) 準備は十分なされているようだったか .

(ii) その他の意見 (余白に自由記述) .

欠席派

↓

(i) 解析学 I の勉強について下の項目のうち当てはまる項目に ○ , 当てはまらない項目に × をつけよ (どの項目も印を付ける) .

- 十分に勉強したか .
- 講義録を勉強したか .
- 教科書を勉強したか .
- 過去問を勉強したか .
- 入試問題集のプリントを勉強したか .
- 後期も出席せずに勉強する予定か .

(ii) 出席しなかった主な理由を書け (余白に自由記述) .

解析学I 前期試験略解

1998/07/14 服部哲弥

問 1 (30) . (解答例 .)

$A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^k \mid a_k \in \{0, 1\} (k = 0, 1, 2, \dots), \sup\{k \geq 0 \mid a_k = 1\} = \infty \right\}$ と書ける . n をかたてな自然数とすると , $0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \delta^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta^k = \frac{\delta^n}{1-\delta}$ だから , 級数の n 項目以降の和を先にとることにより ,

$$\begin{aligned} A &\subset \left\{ x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^k \mid 0 \leq x \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}, a_k \in \{0, 1\} (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \right\} \\ &= \bigcup_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{0, 1\}^n} \left\{ x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^k \mid 0 \leq x \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる . 右辺の和の中の各集合は閉区間 $\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^k, \frac{\delta^n}{1-\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \delta^k \right]$ だから , その長さ (ルベグ測度) は $\frac{\delta^n}{1-\delta}$ に等しい . 特に , 長さは $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ によらない . また , 右辺の和は 2^n 個の項にわたる . 従って , ルベグ測度を μ , ルベグ外測度を Γ と書くと ,

$$0 \leq \Gamma(A) \leq \sum_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \{0, 1\}^n} \frac{\delta^n}{1-\delta} = \frac{(2\delta)^n}{1-\delta},$$

が任意の n に対して成り立つ . $0 \leq \delta < 1/2$ ならば右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから , この式が任意の n に対して成り立つためには $\Gamma(A) = 0$ でなければならない . ルベグ測度は完備なので , このことから A がルベグ可測で , かつ , $\mu(A) = \Gamma(A) = 0$ となる .

問 2 (30 = 10 × 3) .

- (i) 仮定から $\mu(A \cap B^c) > 0$ なので , $\mu(A \cup B) > \mu(B) = K$ となる . これは K の定義と矛盾する .
 (ii) (推論例 .)

仮定が成り立っていない , つまり , $\mu(\Omega) = \infty$ とすると , $K = \mu(B) = \infty$ となるかもしれない . もしそうなっていると , $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B) = \infty$ となるので , 解答例の通り進むと , $\mu(A \cap B^c) > 0$ であっても $\mu(A \cup B) = \mu(B) = \infty = K$ となる . これでは K の定義と矛盾しないので , 解答例の下線部に基づく背理法の議論が成立しない .

(iii) (解答例.)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を 1 次元ルベーク測度空間とする (特に $\Omega = \mathbb{R}$ である.) $\mathcal{A} = \{[n, \infty) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とおく. 即ち, \mathcal{A} は最小値が自然数であるような半無限区間を全て集めた集合族とする. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ と \mathcal{A} が可算和に関して閉じていること, および $K = \infty$ は容易. ところが $A = [0, \infty), B = [1, \infty)$ とおくと, $A, B \in \mathcal{A}$ かつ $\mu(B) = \infty = K$ であるが, $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(B)$ となつて, 下線部の不等号は成り立たない.

問 3 ($40 = 3 \times 10 + 10$).

(i) \mathbb{R} 上の区間塊の族 $\mathcal{J} = \{\sum_{i=1}^n I_i \mid n \in \mathbb{N}, I_i \in \mathcal{I}, i = 1, 2, \dots, n\}$ は $\mathbb{R} \in \mathcal{J}$ であり, かつ, 補集合と有限和の集合算について閉じているので, **有限加法族** である. しかし, 可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ について閉じていないので **σ 加法族** ではない.

$E \in \mathcal{J}$ に対して $E = \sum_{i=1}^n I_i$ なる $I_i = (a_i, b_i] \in \mathcal{I}, i = 1, 2, \dots, n$, をとり, $m(E) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ で m を定義すると, m は \mathcal{J} 上の **有限加法的測度** になる. 即ち, m は非負で有限加法性を持つ集合関数である.

\mathbb{R} の部分集合 A に対して $\Gamma(A) = \inf_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset A, E_n \in \mathcal{J} (n = 1, 2, 3, \dots) \}$ とおくと, Γ は $\Gamma(\emptyset) = 0$ を満たし, 非負性, 単調性, **劣加法性**, の諸性質を持つ. このことを Γ は **外測度** であるという.

Γ は σ 加法性を持つとは限らないが, 定義域を制限することで, σ 加法性を持つようにできる. \mathbb{R} の任意の部分集合 A に対して $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) = \Gamma(A)$ を満たす $E \subset \Omega$ を全て集めた集合族を \mathcal{F} とおくと, \mathcal{F} が σ 加法族になることが若干の議論によって示すことができる. この性質を持つ集合 E を (Γ) -**可測集合** と呼ぶ. そして, Γ の定義域を \mathcal{F} に制限した集合関数を μ とおく ($\mu = \Gamma|_{\mathcal{F}}$) と, μ が \mathcal{F} 上の **測度** になることも同時に示される. $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ も成り立つ.

m は \mathcal{J} 上 σ 加法的なので, $\mu|_{\mathcal{J}} = m$ が成り立つことも証明できる. m が \mathcal{J} 上 σ 加法的であることを証明する際に実数の位相的性質を用いるので, この部分の証明が最も一般化しにくい.

以上によって, 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている測度であることが分かる. μ をルベーク測度と呼ぶ.

(ii) (解答例.)

$A_n = (2^{-2n-1}, 2^{-2n}]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, とおくと, 各 A_n は区間なので \mathcal{J} に入っているが, その可算和は有限個の区間の和では表せないので \mathcal{J} に入らない.

問 4 (20). 都合により解答例を省略します.