流行度の順位付け

服部哲弥（慶應大・経済）

2012.11.17 OR学会待ち行列研究部会例会（東京工業大学）

START ↱

０．目次

・先頭に跳ぶ規則の流体力学的極限（位置ジャンプ率結合分布の，粒子数を大きくするスケール極限）の存在定理（数理）

・流行度の順位付け（ランキング）のモデルとして，先頭に跳ぶ規則を採用できる（提案）

・Amazon.co.jp のランキング，2ch.net のスレッド一覧への当てはめ「Amazon はロングテールに非ず」（応用）

服部哲弥「確率的ランキング　－　流行度の順位付けとロングテール分析」日本ＯＲ学会誌 57–6 (2012.6) 3–8.

１．先頭に跳ぶ規則の流体力学極限

先頭に跳ぶ (Move-To-Front) **規則：** M.L.Tsetlin (1963)

N **自然数**

N **個の粒子を一列に並べた系の並び方についてのランダムな時間発展**

③ ② ④ ① ⑤

① ③ ② ④ ⑤

② ① ③ ④ ⑤

① ② ③ ④ ⑤

③ ① ② ④ ⑤

どれかの粒子がランダムに先頭に跳び，追い越された粒子は順位を１ずつ下げる

図は，粒子 $1, 2, 1, 3$ **の順に跳んだときの並び方の時間発展**

積ん読，超整理法，最後に跳んだ順，…

確率順位付け模型

個々の粒子の順位（ランキング）の時間発展　　　　一般化の方向

ゼッケン番号 i の粒子の時刻 t での位置（ランキング）$X_i^{(N)}(t)$

$$t \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ X_i^{(N)}:\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$X^{(N)} = (X_1^{(N)}, \cdots, X_N^{(N)})$$

初期値： $X_i^{(N)}(0) = x_i^{(N)},\ i = 1, 2, \cdots, N$

時間発展（確率過程）：

(0) 先頭に跳ぶ規則：ある粒子が先頭 $(X_i^{(N)}(t) = 1)$ に跳び，追い越された粒子は順位を 1 ずつ下げる $(X_j^{(N)}(t) = X_j^{(N)}(t-) + 1)$

→先頭に跳ぶランダム時刻で決まる：

現実のランキングのモデルとして，できる限り簡単なものを選ぶ

ポワッソンのランダムな測度

(1) **先頭に跳ぶ時刻は i について独立**

（粒子間で勝手に先頭に跳ぶ：ポワッソンなので，跳ぶ時刻が一致する確率は 0）

(2) **時刻 t に位置 x にいる粒子 i は「$w_i^{(N)}(x,t)$ の頻度」で先頭に跳ぶ**

$w_i^{(N)}$ **：粒子 i 毎に選んだ 2 変数非負値関数（強度，ジャンプ率）**

(2-1) **位置依存性がないとき** $(w_i^{(N)} = w_i^{(N)}(t))$ **：**

時刻 t までに先頭に跳ぶ回数は強度 $w_i^{(N)}(t)$ のポワッソン過程

すなわち，粒子 i が時間 $(s,t]$ の間に先頭に跳ぶ回数は平均 $\displaystyle\int_s^t w_i^{(N)}(u)\,du$ のポワッソン分布で，共通部分を持たない時間区間の先頭に跳ぶ回数は独立

(2-2) **位置依存性：$\mathbb{R}_+{}^2$ 上の一様なポワッソンランダム測度 $\nu_i^{(N)}$ に $\mathbf{1}_{\xi \leqq w_j^{(N)}(X_j^{(N)}(s-),s)}$ をかけて確率積分（1_A は事象 A の定義関数）**

（→古典的な確率積分（池田－渡辺など）の定義に当てはまる）

確率順位付け模型

$i = 1, 2, \ldots, N$，$t \geqq 0$

$\nu_i^{(N)}$: $\mathbb{R}_+{}^2$ 上のポワッソンランダム測度；強度 $d\xi ds$，i について独立

$$X_i^{(N)}(t) = x_i^{(N)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{s\in(0,t]} \int_{\xi\in\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{X_i^{(N)}(s-)<X_j^{(N)}(s-)} \, \mathbf{1}_{\xi\leqq w_j^{(N)}(X_j^{(N)}(s-),s)} \, \nu_j^{(N)}(d\xi ds)$$

（↑下位の粒子の先頭へのジャンプに押される変化）

$$+ \int_{s\in(0,t]} \int_{\xi\in\mathbb{R}_+} (1 - X_i^{(N)}(s-)) \, \mathbf{1}_{\xi\leqq w_i^{(N)}(X_i^{(N)}(s-),s)} \, \nu_i^{(N)}(d\xi ds)$$

（↑先頭へのランダムなジャンプ）

ジャンプ率関数の（現時点での）仮定

$w_i^{(N)}(k,t) = w_i(\frac{k-1}{N}, t)$, （極限定理で空間をスケールするので）

$W = \{w_i \in C^1([0,1]\times\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \mid i = 1, 2, \cdots\}$;

$$R_w(T) := \sup_{w\in W} \sup_{(y,t)\in[0,1]\times[0,T]} \max\left\{ w(y,t),\ \left|\frac{\partial w}{\partial y}(y,t)\right| \right\} < \infty$$

注. 有界の仮定は $\int \|w\|\,\lambda(dw) < \infty$ 程度に弱められてもしかるべきだが

大数の法則

- 位置 $Y_i^{(N)} = \frac{1}{N}(X_i^{(N)} - 1)$ とジャンプ率の結合経験分布

$\mu_t^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{(w_i^{(N)}, Y_i^{(N)}(t))}$ の分布関数 $U^{(N)}(\cdot, y, t) = \mu_t^{(N)}(\cdot, [y, 1))$

U が良い量

定理． $N \to \infty$ で，$U^{(N)}(dw, y, 0) \to \exists U_0(dw, y)$（概収束，$y$ 一様，W:全変動ノルム）ならば，$U_t^{(N)}(dw, y, t) \to \exists U(dw, y, t)$ $(dw, y, t \leqq T$ 一様）．U は非ランダムな分布（偏微分－積分方程式の解：後述）．

さらに，$\frac{1}{N}(x_i^{(N)} - 1) \to y_i \in [0, 1),\ i = 1, 2, \ldots, L$ ならば，

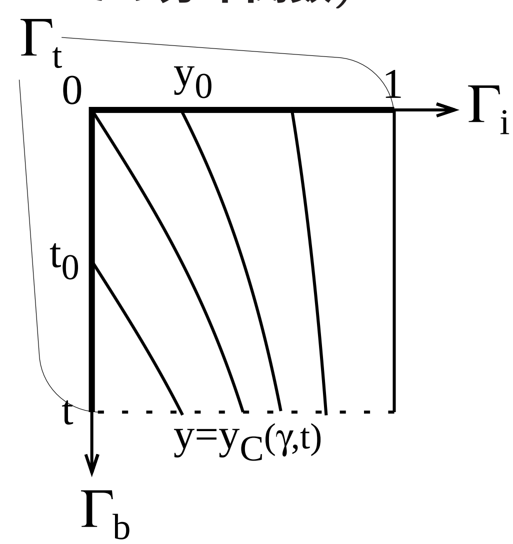
$(Y_1^{(N)}(t), \ldots, Y_L^{(N)}(t)) \to \exists (Y_1(t), \ldots, Y_L(t))$（概収束； $t \leqq T$ 一様）

Y_i は U と ν_i で書ける確率微分方程式の解 (propagation of chaos)

◇

流体力学的極限（極限の特徴づけ）

初期値への仮定：$U_0(dw,y) = \exists \mu_0(dw,[y,1))$($y$ **についての分布関数**)



$\mu_0(W,dy) = dy$ （$y=$ **相対順位**）

$\exists C^0$ **密度** $\exists\sigma = \dfrac{d\mu_0}{d\lambda \times dy}$; $\mu_0(dw,[0,1)) = \lambda(dw)$,

$\Gamma_i = \{(y_0,0)\}$ **初期点，**$\Gamma_b = \{(0,t_0)\}$ **境界点，**
$\Gamma_t = \{(y_0,t_0) \in \Gamma_i \cup \Gamma_b \mid t_0 \leqq t\}$

定理． y_C : $\{(\gamma,t) \mid t \geqq 0,\ \gamma \in \Gamma_t\} \to [0,1]$ **と**
$U(dw,y,t)$: $[0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \{W$ **上の** Borel **測度**$\}$**，**
で以下を満たすものがある：
y_C, $\dot{y}_C \in C^0$, $y_C(\Gamma_t,t) = [0,1]$, $t \geqq 0$(surj.),

$(\forall T)(\forall h:\ W \to \mathbb{R}$ bdd. conti.$)$ $U(h,y,t) := \int_W h(w)\,U(dw,y,t)$ Lip. in $(y,t) \in [0,1] \times [0,T]$, $U(h,y,t) \uparrow$in y $(h \geqq 0)$
$\gamma = (y_0,t_0) \in \Gamma_t$ **に対して，**$y_C(\gamma,t_0) = y_0$, $U(dw,y_0,t_0) = U_0(dw,y_0)$
方程式は次ページ

極限結合経験分布を特徴づける微分－積分方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t}(h,y,t) + V(\mathbf{1}_W, y, t)\frac{\partial U}{\partial y}(h,y,t) = -V(h,y,t)$$

$$V(h,y,t) = -\int_y^1 \int_W h(w) w(z,t) \frac{\partial U}{\partial z}(dw,z,t) dz \qquad \diamond$$

１階準線形偏微分方程式系（$U(h,y,t) \in C^1$ **の場合．本来の定理は積分方程式で書いて，**broad (Lipschitz) solution**）**

V: non-local **（←ジャンプ率の空間依存性）**

空間依存性があると，本質的に従属変数の大数の法則，極限も non-local **で難**

1階準線形PDEと特性曲線の方法

ジャンプ率に位置依存性が無い場合
（簡単のため，λが有限点分布の場合）

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}(y,t)+\sum_\beta w_\beta U_\beta(y,t)\frac{\partial U_\alpha}{\partial y}(y,t)=-w_\alpha U_\alpha(y,t)$$

境界条件 $U_\alpha(0,t)=r_\alpha$，**初期値** $U_\alpha(\cdot,0)=u_\alpha(\cdot)$,
位置依存性がないときは積分方程式にはならず，PDE

- **主部が共通の**1**階準線形**PDE　→　**特性曲線**$y=y_C(\gamma,t)$；

位置依存性があると陽には解けないが，特性曲線の方法を拡張可能

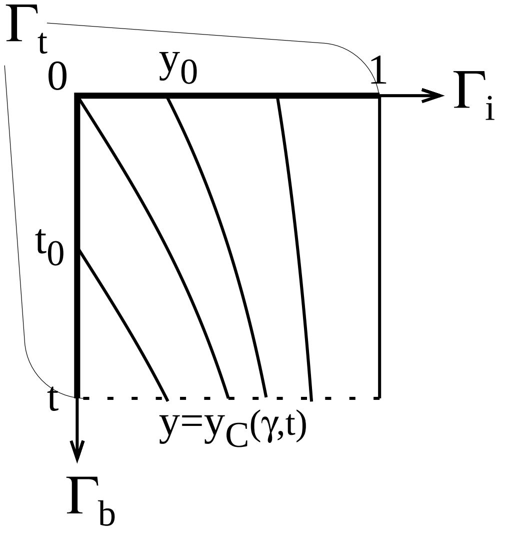
$$\frac{\partial y_C}{\partial t}(\gamma,t)=V(\mathbf{1}_W,y_C(\gamma,t),t),\quad t\geqq t_0,\ \gamma=(y_0,t_0)\in\Gamma_i\cup\Gamma_t,$$

特性曲線が満たす積分方程式

命題. C^1 **唯一解** $f:\ [0,1]\times\mathbb{R}_+\to[0,1]$ **がある：**

$$f(y,t)=1-\int_W\Big(\int_y^1\sigma(w,z)\,\exp(-\int_0^t w(f(z,s),s)\,ds)\,dz\Big)\lambda(dw) \qquad \diamond$$

$$\sigma=\frac{d\,\mu_0}{d\lambda\times dy}$$



$\gamma=(y_0,0)\in\Gamma_i\subset\Gamma$ **に対して** $y_C(\gamma,t)=f(y_0,t)$

- $(0,t_0)\in\Gamma_b\subset\Gamma$ **を始点とする特性曲線はもっと難しい**

特性曲線と粒子の軌道

$N < \infty$ との対応：$Y_C^{(N)}(\gamma, t) = y_0 + \frac{1}{N} \sum_{i;\, Y_i^{(N)}(t_0) \geqq y_0} \mathbf{1}_{J_i^{(N)}(t_0,t)}$

$$J_i^{(N)}(t_0, t) = \left\{ \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\xi < w_i^{(N)}(X_j^{(N)}(s-),s)}\, \nu_i^{(N)}(d\xi ds) > 0 \right\}$$

粒子 i が時間 $(t_0, t]$ の間に先頭に跳ぶ事象

$Y_C^{(N)}((0,0), t)$ はジャンプ済み粒子と未ジャンプ粒子の境界

- 定理と同時に $Y_C^{(N)}(\gamma, t) \to y_C(\gamma, t)$ が証明される
- 位置依存性無い場合と違って，従属確率変数の大数の法則→難

数学的結果の要約

先頭に跳ぶ規則の流体力学的極限の存在定理

ー巨視的な分布（極限分布）の動きは決定論的

ー蒸発項で動く inviscid Burgers **型（積分ー）偏微分方程式系**

ー時刻・位置依存性を入れられる（昼夜差，上位注目効果）

ー特性曲線（１位に跳ぶ以外の順位変化）→以下で使う

2．Amazon ランキングの謎を解く

Amazon.co.jp

本のページ中程やや下
Amazon.co.jp ランキング

「Amazon **の謎順位。**」

‘Internet retailers are extremely hesitant about releasing specific sales data’

謎ならば答えを探そう

ランキングの時間変化

・本を書くと，自分の本の順位が気になる．

Amazon.co.jp ランキング: 本で373,406位

(1時間後) Amazon.co.jp ランキング: 本で373,977位

(2 時間後) Amazon.co.jp ランキング: 本で374,693位

・が，漫然と眺めても１時間に１度更新されることくらいしか分からない

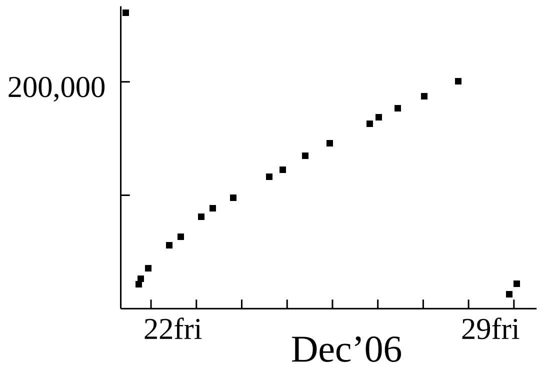
・方針を**逆転**，

先に簡単な数理モデルを立てて，データの特徴と比較

ランキング＝流行度を反映する順位→理想化：

売れた瞬間を１位にする先頭に跳ぶ規則（確率順位付け模型）

アマゾン書店での順位の大きな跳び



１回の更新での大きな順位改善の確認

• 先頭に跳ぶ規則は少なくとも定性的にアマゾン書店ランキングを説明

あり得る疑問：

・順位はもっと安定的（確定的）な数値であるべきだろう
『売れない専門書が一冊売れただけで一位にな　…　るならば，ランキングの意味をなさない』（原啓介・数理科学 2011.11）

・アマゾン書店がそんな単純なアルゴリズムですますまい

→定量的には到底役立たない？

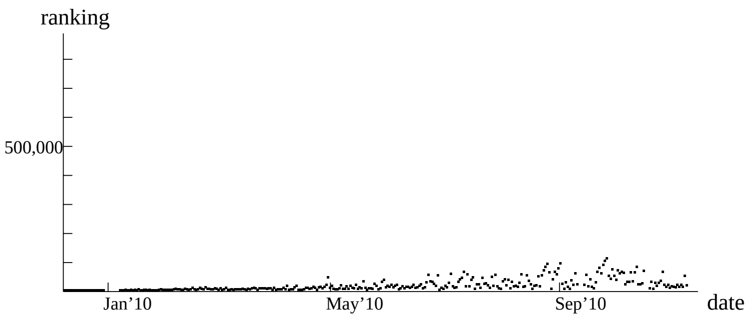
・事実：合う（後述）

確率的な順位付けの普遍性

考察：巨大な系の流行度の順位は，大多数にとって確率的（普遍性）

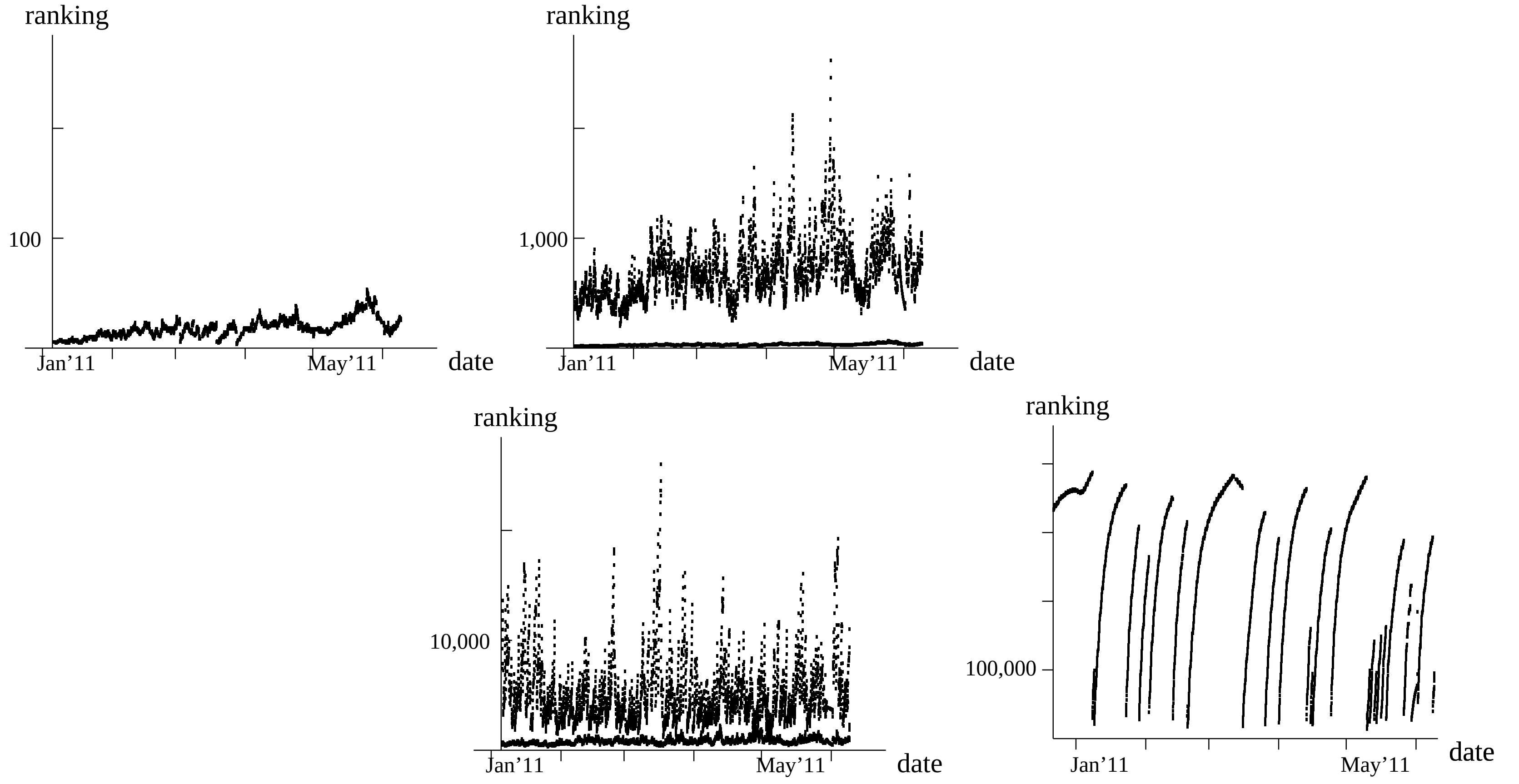
・順位が安定しているのはよく売れる一部の上位だけ．**大多数**の本は数ヶ月に１回以下しか売れない．それらの本の**流行度の判断基準は直近の１回の購入しかない**．

・アマゾン書店のアルゴリズムは，単純な先頭に跳ぶ規則でなく，少なくとも数時間前までの購入状況を反映（澤原昇・MONOQLO 2011.11）．しかし，数ヶ月に１回以下しか売れない**大多数**の本にとっては関係ない．



常識的に順位を考える領域を１位と同一視する縮尺（**新しい現象**）

大数の法則とサンプル



ビッグヒット vs. **普通の本（ロングテール側）**

売上についての大数の法則 vs. **確率的順位付け**

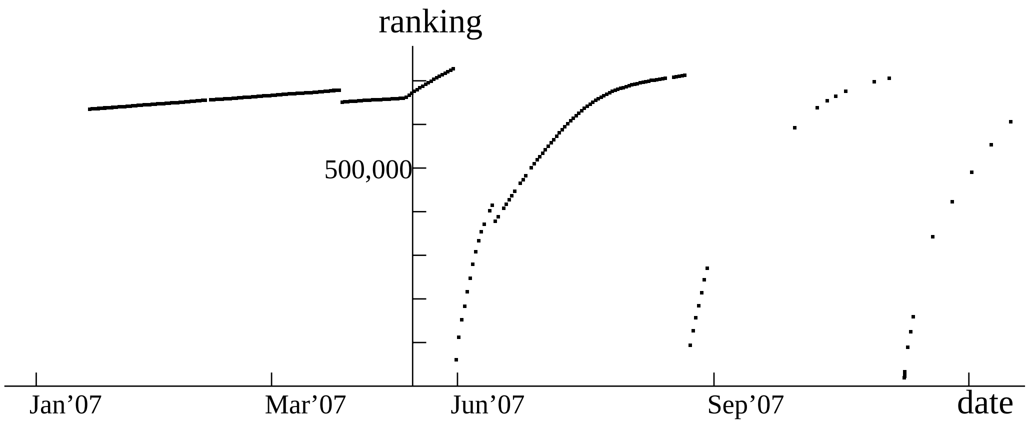
提案の要約

・流行度の順位付け（ランキング）のモデルとしての確率順位付け模型
　－流行度は確率的
　－普遍性

・順位付けは確率的な概念である．人々が見てきた『確かな』順位は上位における多数の支持という大数の法則の結果である．
・粒子数が大きいと，流行度をどう定義しても（アルゴリズムをどういじっても）大多数の粒子の動きはランキングの巨視的振舞いという大数の法則すなわち確率順位付け模型

ロングテールは順位付けが確率的であることが顕著な領域を扱う（後述）

３．確率順位付け模型のデータへの当てはめ



（めったに売れない本で）**ランキング**を**しっこく**観察記録

→　**軌道** $X_i^{(N)}(t) = X_C^{(N)}(t)$　**特性曲線** $N\,Y_C(t)$ に統計的当てはめ

（**初期**は）データを人力で…：毎日 21 時，逃したら諦める

→　昼夜差の除去（w を**時空依存性無し**として当てはめ）

特性曲線（ジャンプ率が定数の場合）

時刻０に１位の本が次に売れるまでのランキング　（w_iが定数の場合）

$$X_i^{(N)}(t) \doteqdot N\,Y_C(O,t) = N - N\int_W e^{-w\,t}\lambda(dw)$$

ランキングの時間変化のデータ $X_i^{(N)}$　→　（ラプラス逆変換）
→　売上の頻度の分布（売れる本売れない本の多寡）λ

・部外秘に属するだろう情報を，公開情報だけで合法的に実証できる！

Pareto分布

ラプラス変換　→　現実には分布（族）を決めてパラメータ当てはめできるだけ単純な族として（一般化）Zipfの法則(Pareto分布)

$w_i^{(N)} = a\left(\frac{N}{i}\right)^{1/b}$; a: **最低収入，** b: **平等性の指数**

$\Leftrightarrow \quad \lambda([w,\infty)) = \left(\frac{a}{w}\right)^b,\ w \geqq a$

$X_i^{(N)}(t) \doteqdot N\,Y_C(O,t) = N - N\int_W e^{-w\,t}\lambda(dw)$

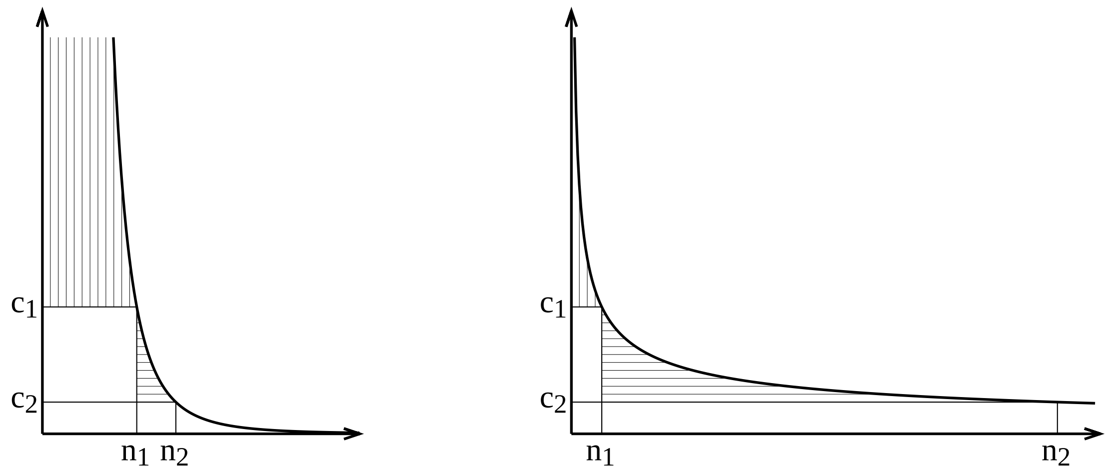
$= N - Nb(at)^b\Gamma(-b,at)$; $\Gamma(z,p) = \int_p^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx$

- N, a, b **を与えれば決まる（注．N はAmazon公称ではなく実効値）**

平等性の指数bとロングテール

多品目商品を扱う小売業（例：大型書店）　$X_i^{(N)}$⇔ランキングデータ

i⇔商品（本のタイトル），$w_i^{(N)}$ ⇔単位時間当売上，

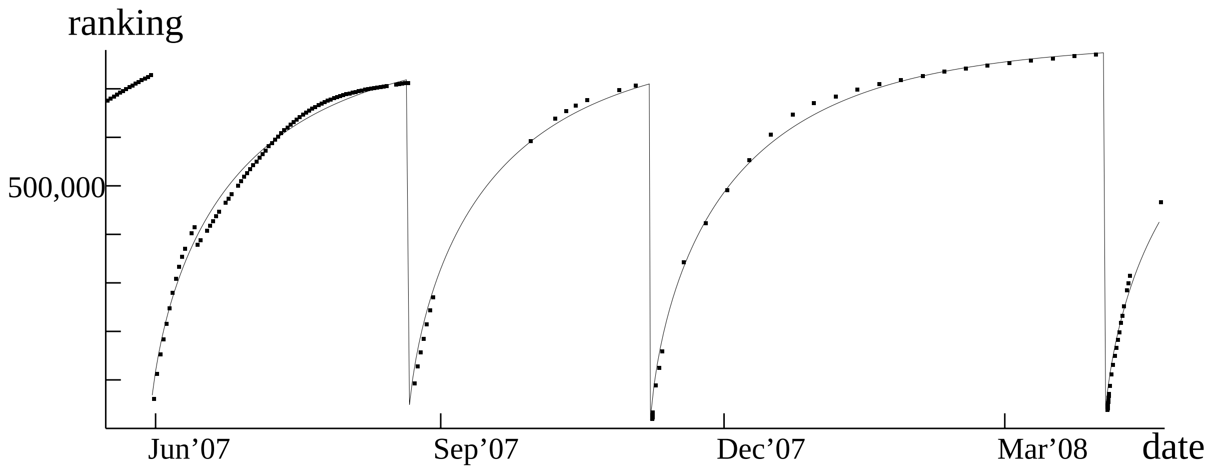


縦軸⇔$w_i^{(N)}$，横軸⇔i，

左図：$b < 1$格差大　右図：$b > 1$平等に近い

$b > 1$のとき，低コスト$(c_2 \ll c_1)$ならば，非売れ筋の売上合計が無視できない（ロングテールビジネスモデル成立の可能性）

アマゾンはロングテールに非ず



3 パラメータで 98 点のデータを当てはめ

$$(N^*,\ a^*,\ b^*) = (8 \times 10^5,\ 6 \times 10^{-4},\ 0.81)$$

- $b < 1$「不平等」上位 $o(N)$ 冊が売り上げの全てを占める

アマゾンはロングテールに非ず

ロングテール型ではなく，ビッグヒット依存型のビジネスモデル

データに関する要約と予告

Amazon.co.jp のランキング，2ch.net のスレッド一覧への当てはめ
2ch は次ページ以降

－「Amazon はロングテールに非ず」

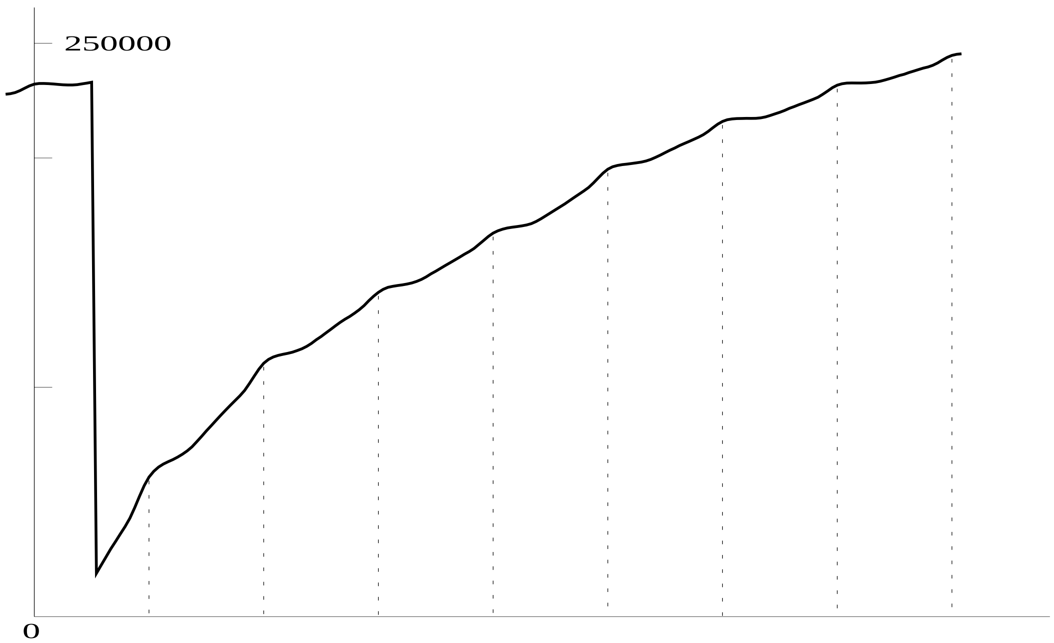
現場や詳しい人は気づいていたのでは？
・部外秘に属するだろう情報を，公開情報だけで実証する方法を与えた

－活動の昼夜差の抽出

－ N の時間変化（新刊本，絶版）も $w_i(t)$ に織り込み可能
－先頭注目効果も数学理論はできた（位置依存性）

アマゾン書店：
　更新が１時間に１度，書店がアルゴリズムを決められる（上位には影響）
2ch.net スレッド一覧：
　$N = O(10^3)$ 小さい→揺らぎ，関心の集中「祭り」（ポワッソンが悪い）

社会活動の昼夜差



Amazon.co.jp
(毎時のランキングデータ自動収集)

昼夜差
(深夜から早朝まで全体の活動停滞)

w_i が時刻依存性を持つ場合を(上手に)適用して当てはめる

仮定:**強度の共通時刻依存**と**日周期**

→**毎日定時のデータ**は一様な場合に帰着
(Pareto 分布やロングテールの結論は相対強度の分布の意味で成立)

ジャンプ率の時刻依存性

$$X_i^{(N)}(t) \doteqdot N\,Y_C(O,t) = N - N\int_W e^{-\int_0^t w(s)\,ds}\lambda(dw)$$

強度の共通時刻依存と日周期の仮定：

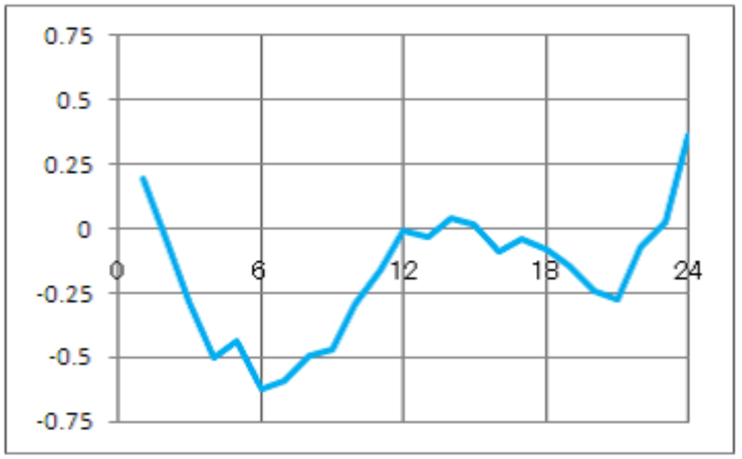
$W = \{w(t) = w\,A'(t) \mid w > 0\}$, for fixed periodic θ and $A = t + \theta(t)$

$$X_i^{(N)}(t) \doteqdot N - N\int_0^\infty e^{-w\,A(t)}\lambda(dw)$$

→毎日定時のデータは一様な場合に帰着 $X_i^{(N)}(t) \sim N y_{C,\text{一様}}(A(t))$

（Pareto **分布やロングテールの結論は相対強度の分布の意味で成立）**

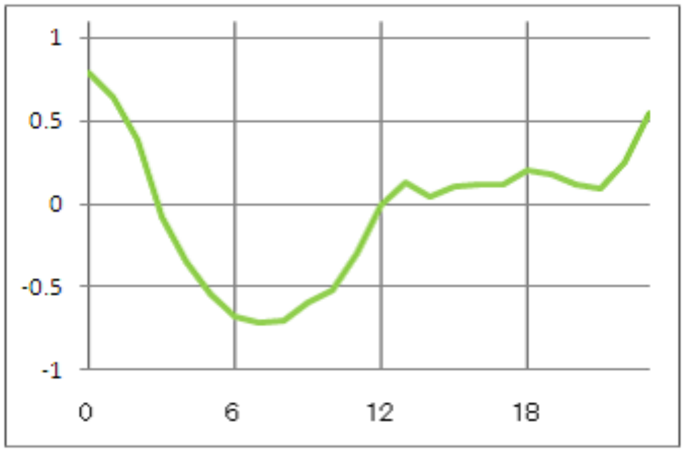
昼夜差（Amazon.co.jp）



方法１（ジャンプ直後のデータ $aA(t) \ll 1$）

$x_C(t) \simeq N\Gamma(1-b)a^b A(t)^b + O(A(t))$

24 時間間隔で２重に比をとって N, b, a を消去



方法２（テール付近のデータ）

順位の平均時間変化を線形近似

- 22–00 時に購入活動活発，03–09 時に不活発（注．1.5 時間前）
- 2ch.net と整合（後述）
- 帰宅後就寝前型（仕事時間型や昼夜逆転型ではない）

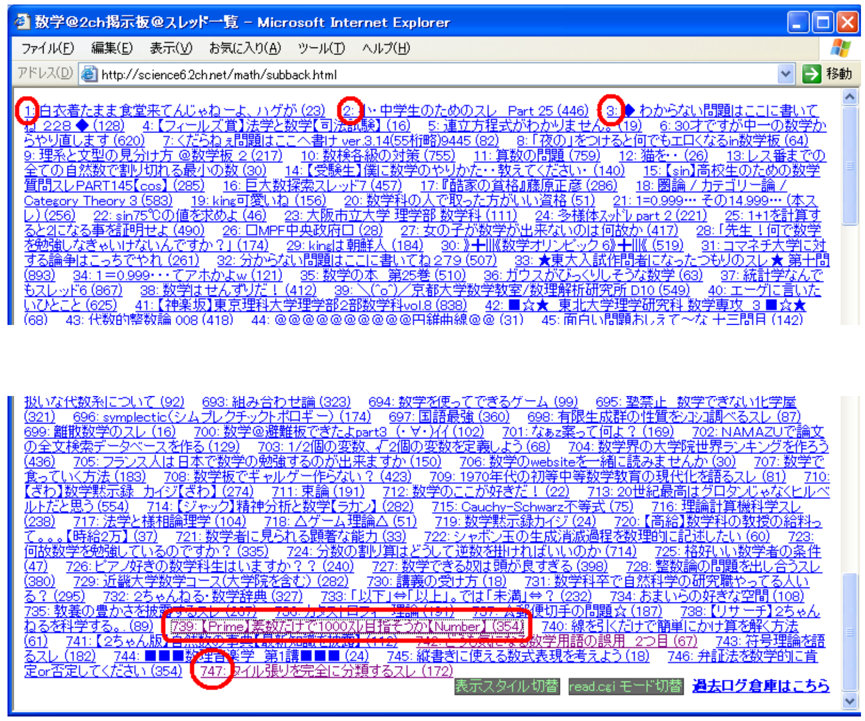
課題（Amazon.co.jp）

- 相対強度の分布（「アマゾンはロングテールに非ず」）の結論は○K
- 一歩進んで，強度の時刻依存性（昼夜差）も定量的に測りたい．難

　－アマゾン書店は１時間に一度の更新
　－多数の本の順位を同時観測すれば方法があるが，順位一覧のページは無いのでサーバに負担（後述）

2ch.netのスレッド一覧

２ちゃんねる：
web掲示板の巨大な集まり



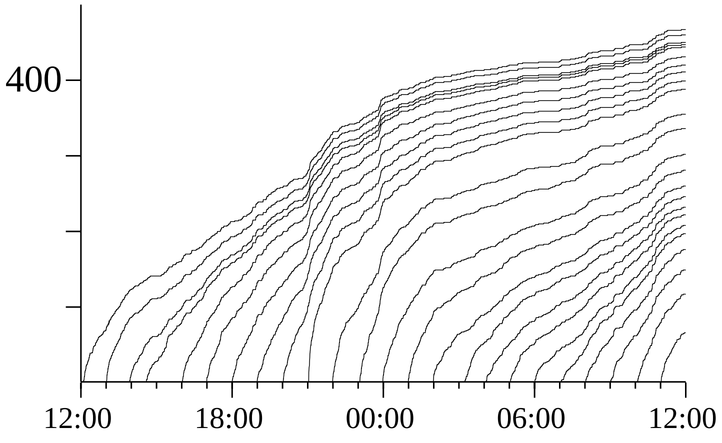
スレッド（ページ）一覧：
書き込んだスレッドが１位
先頭に跳ぶ規則
（注：sage進行は除く）

Nは10^3程度で小さい（ので，数%の揺らぎがある）が，
先頭に跳ぶ規則が明らかなので，踏み込んだ検証が可能
スレッド一覧の１ページに全スレッドの順位情報→全数調査可能

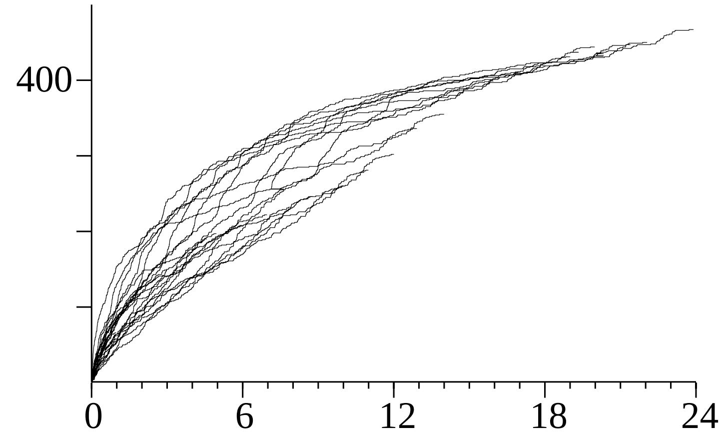
スレッド一覧の順位変化

竹島佑介君 （2008年度東北大M2，現富国生命）

自動化によって**全粒子**$(N \sim 700)$の24時間順位変化データ



24個のスレッド，最後に書き込まれて以降の順位変化



最後に書き込まれた時刻を0に取り直して重ねた図

強度の時刻依存性ため，1つの関数$y_C(t)$に**重ならない**

累積ジャンプ数

時刻依存性 $A(t)$ についてのデータ処理

累積総ジャンプ数 $S^{(N)}(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t w_i^{(N)}(s)\, ds$ **で時間を計る**

共通時刻依存性 $\int_0^t w_i^{(N)}(s)\, ds = w_i^{(N)} A(t)$

$S^{(N)}(t) \sim A(t) Z(N);\ Z(N) = \sum_{i=1}^{N} w_i^{(N)}$ **（大数の法則）**

$A(t) \quad \leftarrow \quad S^{(N)}(t)$ **時刻依存性**

$\lambda \quad \leftarrow \quad X_i^{(N)}(t)$ **（相対）ジャンプ率分布**

強度の共通の時刻依存性と累積書込数

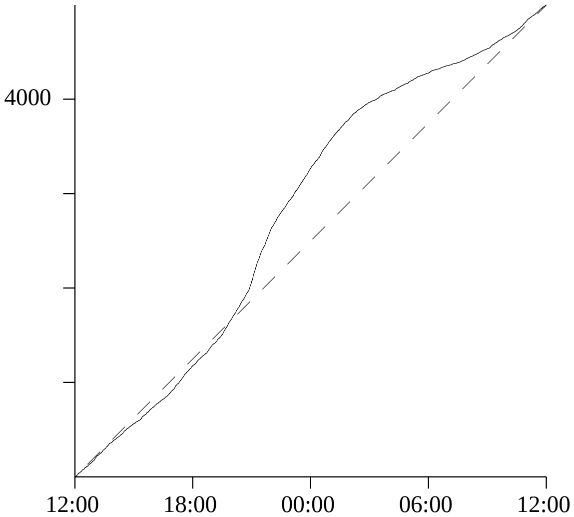
（再掲）　共通の時刻依存性の仮定：

$$\int_0^t w_i^{(N)}(s)\,ds = w_i^{(N)}\,A(t)$$

累積総書込数

$$S^{(N)}(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t w_i^{(N)}(s)\,ds \sim A(t)Z(N);$$

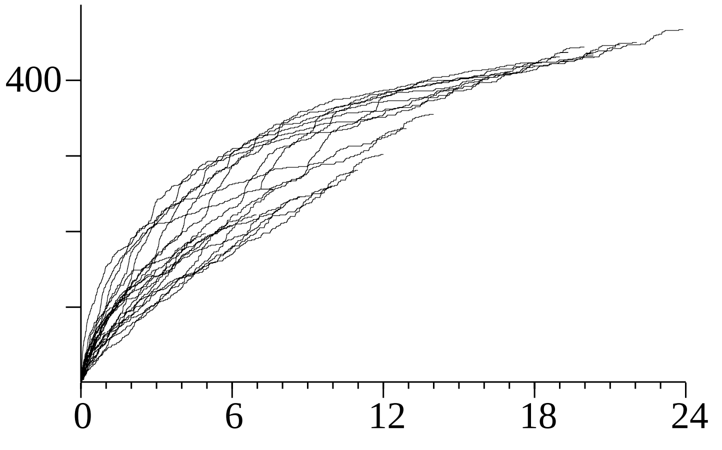
$$Z(N) = \sum_{i=1}^{N} w_i^{(N)}$$



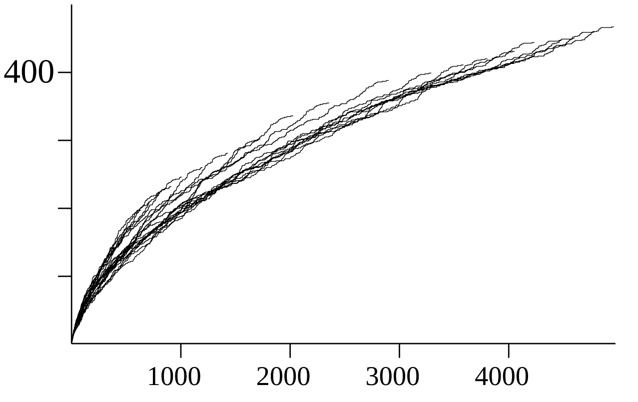
集計 小林孝長君（2009 **年度東北大** M2 ，**現仙台二高**）

共通の時刻依存性の検証とPareto指数の普遍性

（再掲）　$X_i^{(N)}(t) \sim N(1-\int_0^\infty e^{-wS^{(N)}(t)}\lambda(dw));\ \lambda([w,\infty)) = (\frac{a}{w})^b,\ w \geqq a$



（再掲）　横軸実時刻



横軸累積総書込数（時間変更）

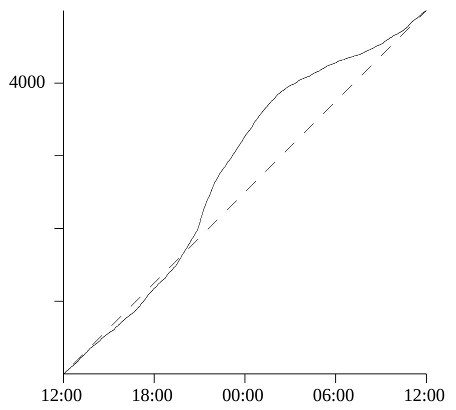
- 共通の時刻依存性は実用的に良さそうである

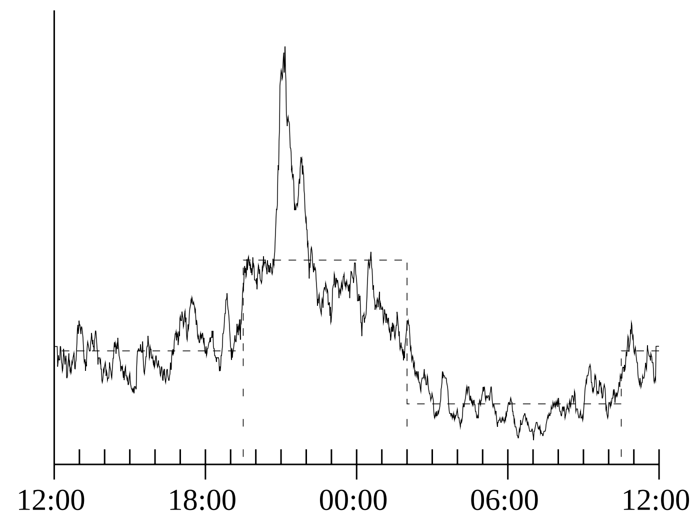
$X_i^{(N)}(A^{-1}(t))$（$A(t) \sim S^{(N)}(t)$）　→　$b = 0.872 < 1$

- Amazon.co.jpも2ch.netも共通して$b < 1$

  本の購入はベストセラーに，書き込みは人気スレッドに集中

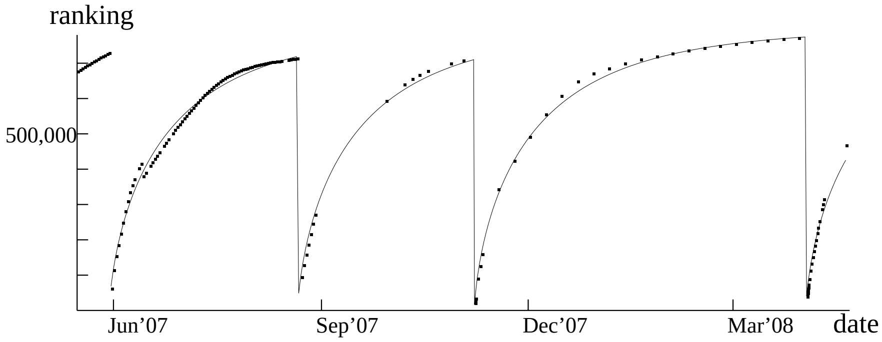
昼夜差



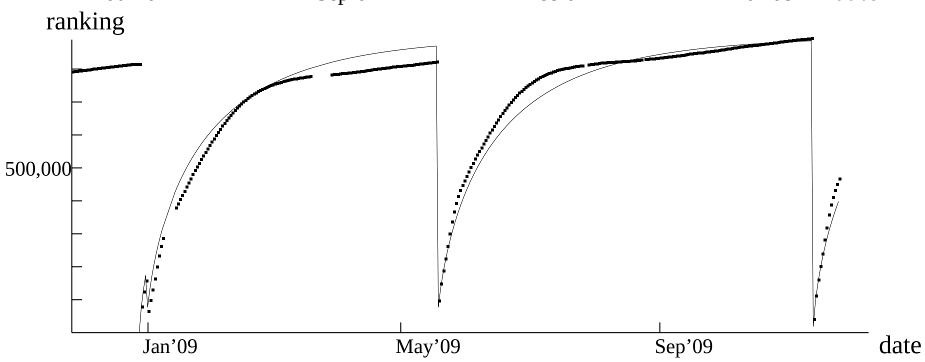


- 20–01 **時に書込活動活発，**03–09 **時に不活発（２ちゃんねる）（アマゾン書店と整合）**

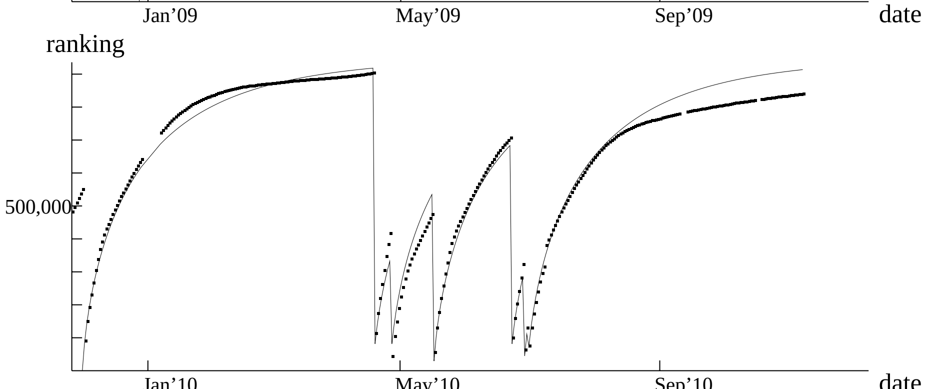
冊数の変化



$N = 80$ 万 (2007 年)



$N = 90$ 万 (2009 年)



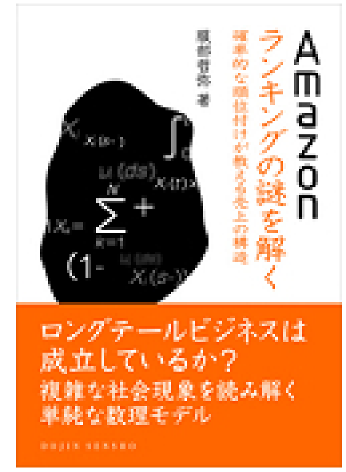
$N = 95$ 万 (2010 年)

刊行前 $w(t) = 0$ とすればよい（昼夜差は時間変更）．ライフサイクルの検出

全体の要約

- 先頭に跳ぶ規則の流体力学的極限の存在定理
  - 動きは巨視的には決定論的
  - 極限分布は蒸発項で動く inviscid Burgers 型方程式系
  - 時刻・位置依存性を入れられる（昼夜差，上位注目効果）
  - 特性曲線（１位に跳ぶ以外の順位変化）
- 流行度の順位付け（ランキング）のモデルとしての確率順位付け模型
  - 流行度は確率的
  - 普遍性
  - ロングテールは順位付けが確率的であることが顕著な領域
- Amazon.co.jp のランキング，2ch.net のスレッド一覧への当てはめ
  - 「Amazon はロングテールに非ず」
  - 部外秘に属するだろう情報を公開情報だけで実証する方法
  - 活動の昼夜差の抽出

文献



服部哲弥「Amazon **ランキングの謎を解く」化学同人，** 2011**.**

服部哲弥，日本ＯＲ**学会誌 57–6** (2012.6) 3–8.

K. Hattori, T. Hattori, Stochastic Processes Appl. **119** (2009)

K. Hattori, T. Hattori, Funkcialaj Ekvacioj **52** (2009)

K. Hattori, T. Hattori, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B21** (2010)

Y. Hariya, K. Hattori, T. Hattori, Y. Nagahata, Y. Takeshima, T. Kobayashi, Tohoku Mathematical Journal **63–1** (2011)

T. Hattori, S. Kusuoka, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics (2013)

Google **検索キーワード　　服部哲弥**