独立確率過程の大数の強法則と流れが定める確率順位付け模型

服部哲弥（慶應大・経済）

2015.11.21 OR学会待ち行列研究部会例会（東京工業大学）

START

０．目次

１．Amazon ランキングの謎を解く

－　Amazon.co.jpの本のランキングと確率順位付け模型　（復習）

２．非減少関数値独立確率変数列の大数の強法則

－　主結果と証明の概要

３．流れが定義する確率順位付け模型

－　応用例

1．Amazon ランキングの謎を解く

Amazon.co.jp
（2010 年頃）

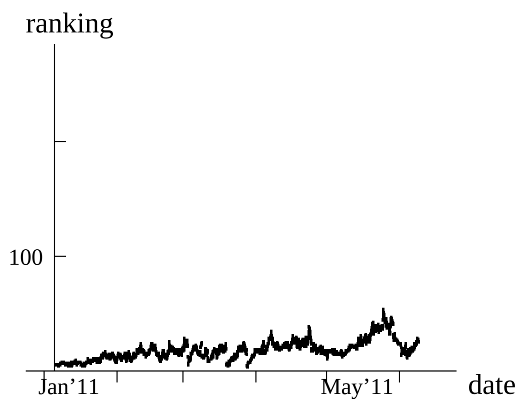
本のページ中程やや下
Amazon.co.jp ランキング

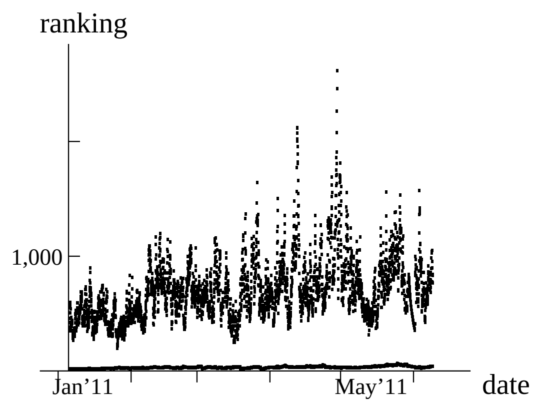
「Amazon の**謎**順位。」

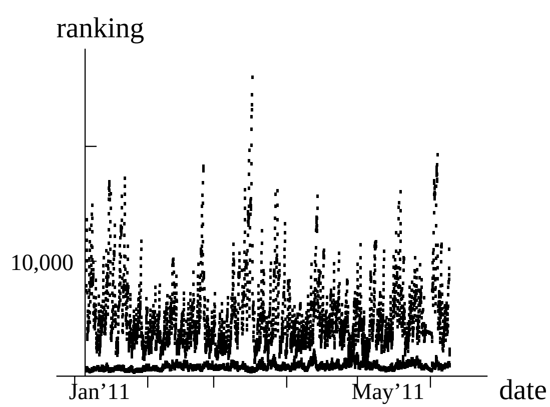
'Internet retailers are extremely hesitant about releasing specific sales data'

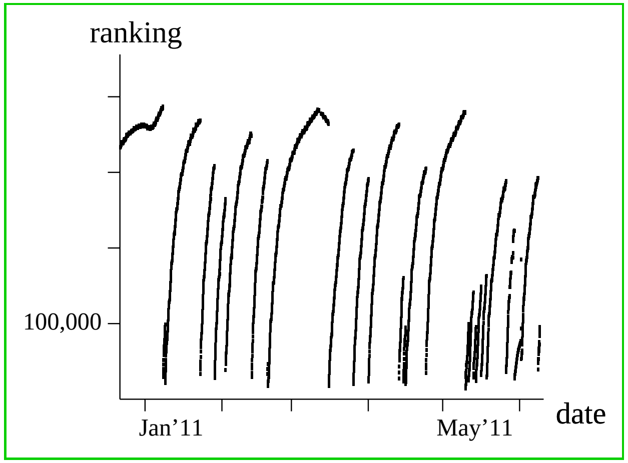
普通の本（ロングテール側）の順位変化

ビッグヒット vs. 普通の本









ロングテール側（９割の本）の順位変化の普遍性　→　確率的順位付け

確率順位付け模型

時刻 0 に 1 位の本 i の時刻 t でのランキング $X_i^{(N)}(t)$：

$$X_i^{(N)}(t) \doteqdot N\,Y_C(O,t) = N - N\int_0^\infty e^{-w\,t}\lambda(dw)$$

λ：注文頻度 w の分布（売れる本売れない本の多寡）

確率順位付け模型:

- 先頭に跳ぶ(Move-To-Front)規則　＋　強度 w のポワッソン過程（現実のランキングのモデルとして，できる限り簡単なものを選んだ）
- λ から Y_C を得る（大数の法則 $(N \to \infty)$ で決定論的予言）

- 逆算：部外秘情報 λ を，公開情報だけで合法的に推定できる
- λ を Pareto 分布で近似　→　ロングテールビジネスの検証

$$\lambda([w,\infty)) = \left(\frac{a}{w}\right)^b,\ w \geqq a;\ a\text{: 最低収入，}b\text{: 平等性の指数}$$

先頭に跳ぶ規則

先頭に跳ぶ(Move-To-Front)**規則：** M.L.Tsetlin (1963)

N **自然数**

N **個の粒子を一列に並べた系の並び方についてのランダムな時間発展**

③ ② ④ ① ⑤

① ③ ② ④ ⑤

② ① ③ ④ ⑤

① ② ③ ④ ⑤

③ ① ② ④ ⑤

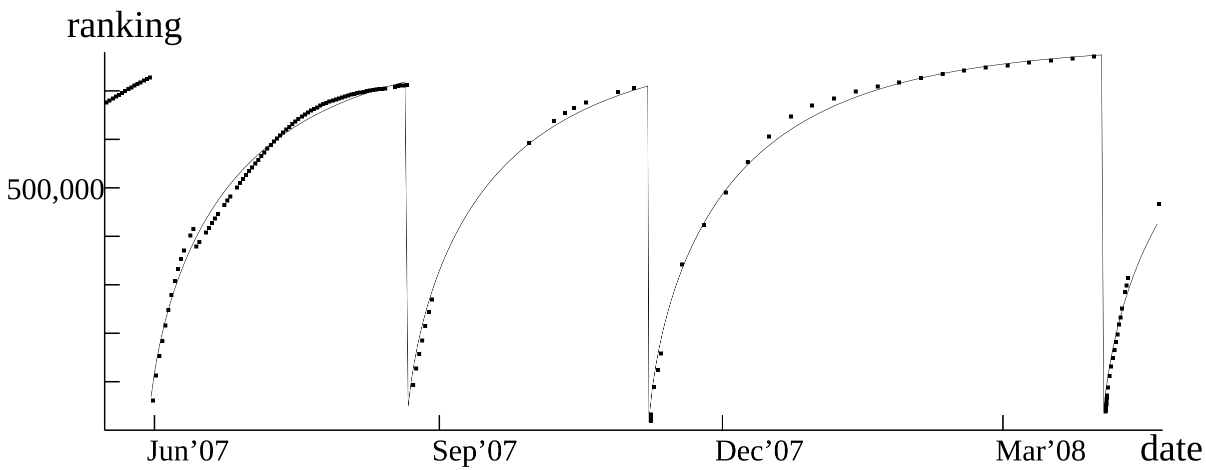
どれかの粒子がランダムに先頭に跳び，追い越された粒子は順位を 1 ずつ下げる

図は，粒子 $1, 2, 1, 3$ の順に跳んだときの並び方の時間発展

積ん読，超整理法，最後に跳んだ順，…

- **確率順位付け模型：先頭に跳ぶ規則＋各粒子固有の強度を持つポワッソン過程という単純な原理でアマゾンランキングを解析**

アマゾンはロングテールに非ず



$(N^*,\ a^*,\ b^*) = (8 \times 10^5,\ 6 \times 10^{-4},\ 0.81)$

- $b < 1$「不平等」上位 $o(N)$ 冊が売り上げの全てを占める

アマゾンはロングテールに非ず

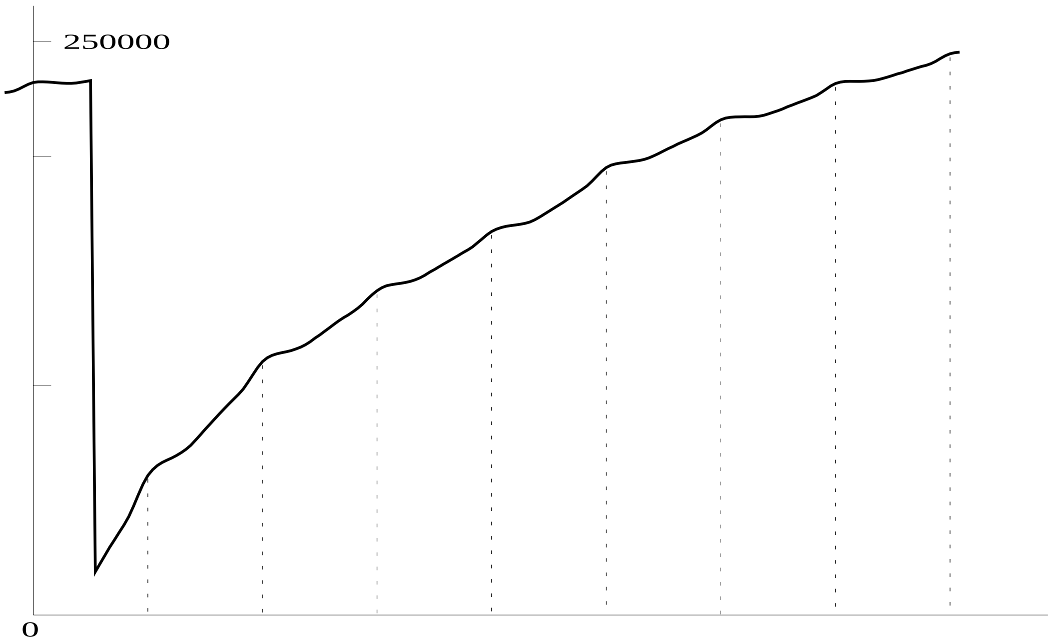
ロングテール型ではなく，ビッグヒット依存型のビジネスモデル

時刻依存性

- 初期の模型：各本の売上は強度ω（定数）のポワッソン過程

  λ：$\omega \in \mathbb{R}_+$上の分布

$\Leftrightarrow$ 初期のデータは24時間毎の収集（昼夜差が近似的に消える）



毎時のランキング

- 昼夜差（夜間活動停滞）

  ↓

- 先頭への跳び：**時刻依存性がある強度$w(s)$**を持つポワッソン過程
- λ：**関数w上の分布**

（可分完備距離空間上の分布の弱収束の定義は共通なので→極限定理〇K）

$$X_i^{(N)}(t) \fallingdotseq N\,Y_C(O,t) = N - N\int_W e^{-\int_0^t w(s)\,ds}\lambda(dw)$$

強度が位置依存性を持つ確率順位付け模型

（再掲）$X_i^{(N)}(t) \fallingdotseq N\,Y_C(O,t) = N - N\int_W e^{-\int_0^t w(s)\,ds}\lambda(dw)$

- **問**「良い順位は宣伝効果があるか？」に答えたいならば，

位置（順位）依存性のある**強度** $w(x,t)$ を持つポワッソン過程

- 定義可能　ー　強度が位置依存性を持つ確率順位付け模型
- だが，w を通して順位の確率変数間に（解析困難な）**従属性**

- **定式化**

ゼッケン番号 i の粒子の時刻 t での**位置**（ランキング）$X_i^{(N)}(t)$

$$t \geqq 0,\ i = 1,2,\ldots,N,\ X_i^{(N)} :\ \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \{1,2,\ldots,N\}$$

$$X^{(N)} = (X_1^{(N)},\cdots,X_N^{(N)})$$

ポワッソンのランダムな測度

初期値： $X_i^{(N)}(0) = x_i^{(N)},\ i = 1, 2, \cdots, N$

時間発展（確率過程）：

(0) **先頭に跳ぶ規則：ある粒子が先頭**$(X_i^{(N)}(t) = 1)$**に跳び，追い越された粒子は順位を**1**ずつ下げる**$(X_j^{(N)}(t) = X_j^{(N)}(t-) + 1)$

(1) **先頭に跳ぶ時刻は**i**について独立**

(2) **時刻**t**に位置**x**にいる粒子**i**は「**$w_i^{(N)}(x,t)$**の頻度」で先頭に跳ぶ**

$w_i^{(N)}$**：粒子**i**毎に選んだ**2**変数非負値関数（強度，ジャンプ率）**

位置依存性：$\mathbb{R}_+{}^2$**上の一様なポワッソンランダム測度**$\nu_i^{(N)}$**に**
$\mathbf{1}_{\xi \leqq w_j^{(N)}(X_j^{(N)}(s-),s)}$ **をかけて確率積分（**1_A**は事象**A**の定義関数）**

（→古典的な確率積分（池田−渡辺など）の定義に当てはまる）

確率順位付け模型の定義

$i = 1, 2, \ldots, N$，$t \geqq 0$

$\nu_i^{(N)}$: $\mathbb{R}_+{}^2$ 上のポワッソンランダム測度；強度 $d\xi ds$，i について独立

$$Y_i^{(N)}(t) = \frac{1}{N}(X_i^{(N)}(t) - 1) = y_i^{(N)}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{s\in(0,t]} \int_{\xi\in\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{Y_i^{(N)}(s-)<Y_j^{(N)}(s-)} \mathbf{1}_{\xi \leqq w_j(Y_j^{(N)}(s-),s)} \nu_j^{(N)}(d\xi ds)$$

（↑下位の粒子の先頭へのジャンプに押される変化）

$$- \int_{s\in(0,t]} \int_{\xi\in\mathbb{R}_+} Y_i^{(N)}(s-) \mathbf{1}_{\xi \leqq w_i(Y_i^{(N)}(s-),s)} \nu_i^{(N)}(d\xi ds)$$

（↑先頭へのランダムなジャンプ）

- 大数の法則→異なる i の間の従属性が問題（$\nu_i^{(N)}$ は独立）
- MTF 規則由来の従属性 $1_{Y_i^{(N)}(s-)<Y_j^{(N)}(s-)}$ は（極限流の特性曲線の対応物で書くと）実質独立
- 位置依存性由来の従属性 $w_j(Y_j^{(N)}(s-), s)$ が解析難

大数の法則

証明には位置 $Y_i^{(N)}$ よりも精密な量が必要

- **位置とジャンプ率の結合経験分布** $\mu_t^{(N)} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \delta_{(w_i^{(N)}, Y_i^{(N)}(t))}$

初期分布（主にジャンプ率分布）に対する何らかの条件の下で
定理． $N \to \infty$ **で** $\mu_0^{(N)} \to \exists \mu_0$ **ならば** $\mu_t^{(N)} \to \exists \mu_t$ **（非ランダム）**

さらに， $\nu_i^{(N)} = \nu_i$ **で最初の** L **個について** $y_i^{(N)} \to y_i \in [0,1)$ **ならば，**
$(Y_1^{(N)}(t), \ldots, Y_L^{(N)}(t)) \to \exists (Y_1(t), \ldots, Y_L(t))$ (propagation of chaos)
μ_t **はある偏微分ー積分方程式の解，** Y_i **は** μ **と** ν_i **で書ける確率微分方程式の解** ◇

- **互いに無関係な時空依存性（例：日周期と違う周期，ある程度緩やかなら下位が注目される本）が混在しても成り立つ究極の極限定理**

極限結合経験分布を特徴づける微分ー積分方程式

極限分布関数 $U(dw, y, t) = \mu_t(dw \times [y, 1))$：連続な $h: W \to \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial U}{\partial t}(h, y, t) + V(\mathbf{1}_W, y, t)\frac{\partial U}{\partial y}(h, y, t) = -V(h, y, t)$$

$$V(h, y, t) = -\int_y^1 \int_W h(w) w(z, t) \frac{\partial U}{\partial z}(dw, z, t) dz$$

- w の位置依存性→V がnon-local→収束の前に極限が**難**（cf．時刻依存性までの式）しかしこの解は**良くわかっている**(arxiv.org/1409.5117)

∗．大数の強法則への動機

- 収束は技術的仮定の下でわかってる T. Hattori, S. Kusuoka, (2012)（典型的には W が有限集合で）各 $w_\alpha \in W$ を強度に持つ i が $N \to \infty$ で無限個ならば，各 α 毎に位置分布の大数の強法則が成立（Doob の不等式等の sub-martingale 議論で $\sup_{t \leqq T} |X(t)| \leqq C|X(T)|$）
- すべての粒子の強度が異なる時空依存性（本それぞれの時間帯別注文集中度や順位の効果）を持っても，$N \to \infty$ で揺らぎは打ち消すだろう
- 位置依存性が無い場合は証明済 Y. Hariya, K. Hattori, T. Hattori, Y. Nagahata, Y. Takeshima, T. Kobayashi, Tohoku Math. J. (2011)

問題．位置依存性がある場合も分布 $\mu_t^{(N)}$ の収束を全変動ノルムによる位相 (Hattori–Kusuoka) から弱収束に緩めたい

注．初期値の範囲が広がる．結論は例えば Zipf→Pareto は自然

重箱の隅

方針：

0．予想される極限　OK

1．同極限を持つ独立確率過程の発見と大数の法則の証明　今日の動機

2．元の模型との差が極限で消えること(Gronwall的議論)の証明　未

- 評価したい量 $y_0 + \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j;\ Y_j^{(N)}(t_0) \geqq y_0} h(w_j)\, \mathbf{1}_{J_j^{(N)}(t)}$;

$$J_j^{(N)}(t) = \left\{ \omega \mid \int_{t_0}^{t} \int_0^{w_j(Y_j^{(N)}(s)(\omega), s)} \nu_j^{(N)}(d\xi ds)(\omega) > 0 \right\}$$

$h(w) = 1$ ならば特性「曲線（流線）」$Y_C^{(N)}(t)$

- 単調関数の大数の法則

2．単調関数値独立確率変数列の大数の強法則

$D_\uparrow$：$[0,T]$ 上の非減少右連続左有極限関数の集合

$\Delta = \{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T\}$

主定理． 各 N 毎に $\{Z_i^{(N)}\}_{i=1}^N$ 独立 $D_\uparrow$ 値確率変数，

モーメント条件：$\mathrm{E}[\,|Z_i^{(N)}(T)-Z_i^{(N)}(0)|^q\,]^{1/q} \leqq M$， $q>1+\sqrt{5}$

期待値の連続性：$|\mathrm{E}[\,Z_i^{(N)}(t)\,]-\mathrm{E}[\,Z_i^{(N)}(s)\,]| \leqq M|t-s|$

が成り立つとき，始終時刻について一様な大数の（完全収束の）強法則

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{(t_1,t_2)\in\Delta}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Big((Z_i^{(N)}(t_2)-Z_i^{(N)}(t_1)) - \mathrm{E}[\,Z_i^{(N)}(t_2)-Z_i^{(N)}(t_1)\,]\Big)\right| = 0,\quad a.e.$$ が成立 ◇

（期待値の大局 Hölder 連続性の条件は少し緩められる）

一様な完全収束の大数の強法則

- $D_{\uparrow}$ 値確率変数の例：交通量（始終時刻間の増分に興味）
  －全通勤時間の増分取ると揺らぎは小　→　時間幅についての sup
  －一様でなければ時刻依存，かつ，マルコフ性が無ければ時刻依存を初期値の問題に帰着できない　→　始時刻についての sup

- 定理は単調関数値確率変数の大数の法則として以下の点で最強：
  －t 方向の仮定は単調性のみ（マルコフ性等不要，非ポワッソンＯＫ）
  －始時刻と終時刻について一様な収束
  －完全収束（異なる N の間で $Z_i^{(N)}$ 間に関係を仮定しない）

現実は N は大きな固定数（アボガドロ数など）なので，異なる N は別世界　→　関係を仮定しない定理が妥当と思う

cf. 通常の (RW) 大数の強法則は $Y_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} Z_i$ の概収束

完全収束

- **実確率変数の完全収束** (Hsu, Robbins, 1947)

$$(\forall\epsilon > 0) \quad \lim_{N_0\to\infty} \sum_{N=N_0}^{\infty} \mathrm{P}[\,|Y_N - \mathrm{E}[\,Y_N\,]| \geqq \epsilon\,] = 0$$

cf. **概収束** $(\forall\epsilon > 0) \quad \lim_{N_0\to\infty} \mathrm{P}[\, \bigcup_{N=N_0}^{\infty} \{|Y_N - \mathrm{E}[\,Y_N\,]| \geqq \epsilon\}\,] = 0$

- $\{Z_i\}$ **が独立同分布実確率変数の場合：** $Y_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i$

ー大数の強法則　$Y_N - \mathrm{E}[\,Y_N\,] \to 0,\ a.s. \ \Leftrightarrow \mathrm{E}[\,|Z_1|\,] < \infty$

ー完全収束型大数の強法則 (Hsu, Robbins, 1947, Erdös 1949)

$$Y_N^{(N)} - \mathrm{E}[\,Y_N^{(N)}\,] \to 0, a.s. \Leftrightarrow \mathrm{E}[\,Z_1^{(N)2}\,] < \infty$$

関数値値確率変数列の完全収束

$$Y_N^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^{(N)}$$

- 独立同分布Banach空間値の場合の完全収束：

$\mathrm{E}[\ \left\| Z_1^{(1)} \right\|^4\ ] < \infty$ **+ α** $\Rightarrow \left\| Y_N^{(N)} - \mathrm{E}[\ Y_N^{(N)}\ ] \right\| \to 0,\ a.s.$

(Taylor, Hu, 1985)

「L^p $(2 \leqq p < \infty)$空間なら（「type 2」なので）「＋α」は自動的」(?)

(Woyczynski 1975-80) （「type 2」＝「分散の加法性」の一般化評価）

- L^∞ (非「type 2」) → 完全収束の結果はない模様

- 今回の結果

 ーtについて一様な完全収束 $\sim L^\infty$

 ー始時刻についても一様（但し単調で期待値の連続性を仮定）

 ー$q > 1 + \sqrt{5} = 3.236\cdots$ 実数値の２より悪いが，知る限り最善

（必要十分か否かは未解決）

アイデア（始時刻$t_1 = 0$の場合）

1）実数値確率変数列の場合は既知　→　$\sup_t$が難

2）単調なら端点でsup　→　$\mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}\,]$を引く（揺らぎ）だから難

3）$\mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}\,](t)$も単調　→　細かく仕切りを入れれば誤差$\epsilon$内の変化

4）有限個の点（仕切り）での実数値の大数の強法則に帰着

5）（証明の技巧上）仕切りの増加はモーメントの仮定に帰着

定理． 各N毎に$\{Z_i^{(N)} : \ \Omega \to D_{\uparrow}\}_{i=1}^N$独立．

$\mathsf{E}[\,|Z_i^{(N)}(T)|^q\,]^{1/q} \vee \mathsf{E}[\,|Z_i^{(N)}(0)|^q\,]^{1/q} \leqq M,\ q > 1+\sqrt{3}$

が成り立つとき一様な大数の強法則

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Z_i^{(N)}(t) - \mathsf{E}[\,Z_i^{(N)}(t)\,]) \right| = 0,\ a.e.$$ が成立 ◇

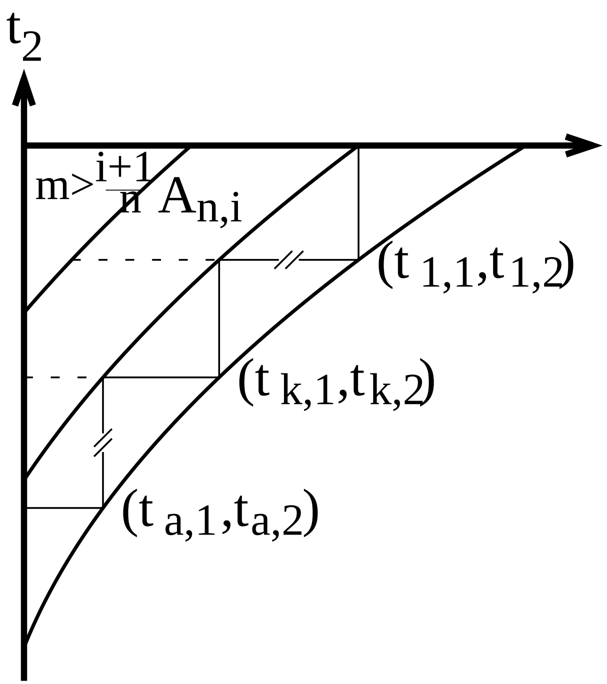
注． 単調性とモーメント条件のみ．期待値の連続性は不要　◇

始終2時刻を扱うための補題

3'）変数平面で「網を張る」 → $\mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}(t)\,]$ の単調性から可能

4'）個数の制御 → Hölder連続性を仮定し，

$\mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}(t)\,]$ の等高線間隔を一様に開けて切り抜ける



$Y_N^{(N)}$ の減る方向（右下）に $\mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}\,]$ の減少が $2/n$ 以内の見張りを立てる．

$m(t_1,t_2) = \mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}(t_2)\,] - \mathsf{E}[\,Y_N^{(N)}(t_1)\,]$

$A_{n,i} = \{(t_1,t_2)\in A \mid \frac{i}{n} < m(t_1,t_2) \leqq \frac{i+1}{n}\}$

$m(t_{k,1},t_{k,2}) = \frac{i-1}{n}$

$(\forall (t_1,t_2)\in A_{n,i})\ \exists k;$

$m(t_1,t_2) \leqq m(t_{k,1},t_{k,2}) + \frac{2}{n}$

$(t_1,t_2)\in A_{n,0}$ または $m(t_1,t_2)=0$ だと見張りが無いが，$m(t_1,t_2)\leqq \frac{1}{n}$ が成立して有効

例：オフィスビルの照明

ビル新築時刻t_0，$Z_i^{(N)}$：照明設備iの照明の時刻tまでの交換回数（次に切れるまでの時間分布が設置箇所iと（技術改良や原材料の法規制などで）交換時刻に依存する強度$w_i^{(N)}$の場合も，滑らかならば）

主定理から，$\displaystyle \sup_{N,i,(t_1,t_2)\in\Delta} w_i^{(N)}(t_1,t_2) < \infty$ならば

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(t_1,t_2)\in\Delta} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Z_i^{(N)}(t_1,t_2) - \mathrm{E}[\, Z_i^{(N)} \,](t_1,t_2)) \right| = 0,$$

a.e. $(\Delta = \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T\})$ ◇

強度が直前の到着時刻に依存する点過程

強度 $w \in C^1(\Delta, \mathbb{R}_+)$

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots;$

$$\mathrm{P}[\, t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}} \,] = \exp\Big(-\int_{\tau_{k-1}}^{t} w(\tau_{k-1}, u)\, du\Big), \text{ on } t \geqq \tau_{k-1}$$

$$N(t) = \max\{k \mid \tau_k \leqq t\}$$

- w **が第 1 変数について定数なら，強度** w **のポワッソン過程．**
- **一般には非独立増分**

前ページの例：交換した蛍光灯の数： $Z(t_1, t_2) = N(t_2) - N(t_1)$

３．流れが定義する確率順位付け模型

確率順位付け模型（再掲）． $Y_i^{(N)}(t) = y_i^{(N)}$

$$+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{s\in(0,t]}\int_{\xi\in\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{Y_i^{(N)}(s-)<Y_j^{(N)}(s-)}$$

$$\times\,\mathbf{1}_{\xi\leqq w_j(Y_j^{(N)}(s-),s)}\,\nu_j^{(N)}(d\xi ds)$$

$$-\int_{s\in(0,t]}\int_{\xi\in\mathbb{R}_+}Y_i^{(N)}(s-)\,\mathbf{1}_{\xi\leqq w_i(Y_i^{(N)}(s-),s)}\,\nu_i^{(N)}(d\xi ds)$$

流れ θ が定義する確率順位付け模型． $Y_i^{(N,\theta)}(t) = y_i^{(N)}$

$$+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{s\in(0,t]}\int_{\xi\in\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{Y_i^{(N,\theta)}(s-)<Y_j^{(N,\theta)}(s-)}$$

$$\times\,\mathbf{1}_{\xi\leqq w_j(\theta(\gamma_j^{(N,\theta)}(s-),s-),s)}\,\nu_j^{(N)}(d\xi\,ds)$$

$$-\int_{s\in(0,t]}\int_{\xi\in\mathbb{R}_+}Y_i^{(N,\theta)}(s-)\,\mathbf{1}_{\xi\leqq w_i(\theta(\gamma_i^{(N,\theta)}(s-),s-),s)}\,\nu_i^{(N)}(d\xi\,ds),$$

極限の存在

- 本来の模型は粒子の現在位置の強度に従って先頭に跳ぶ
- 流れが定義する模型はスクランブルのかかったGPSの教える（予め内蔵していたずれた）位置の強度に従って先頭に跳ぶ

1）流れが定義する確率順位付け模型は強度が時刻だけの関数な（現在位置によらない）ので，証明の鍵になる量 $\varphi^{(N)}$ が独立確率過程

2）主定理によって（緩い仮定の下で）$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \varphi^{(N,\theta)} = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}[\,\varphi^{(N,\theta)}\,]$

3）$\theta = y_C$(極限の解)のとき右辺は存在

4）主定理の大数の強法則は始終時刻について一様なので，元の確率順位付け模型との差を評価できる可能性がある

補遺

- 強度が直前の到着時刻に依存する点過程
- 流れ
- 極限方程式の解 y_C

強度が直前の到着時刻に依存する点過程

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots$

$\mathrm{P}[\, t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}} \,] = \exp(-\int_{\tau_{k-1}}^{t} \omega(\tau_{k-1}, u)\, du) \quad \text{on} \quad t \geqq \tau_{k-1}\,.$

$N(t) = \max\{k \mid \tau_k \leqq t\},\ \tau_k = \inf\{t \geqq 0 \mid N(t) \geqq k\}$

$\mathrm{P}[\, N(t) = 0 \,] = \mathrm{P}[\, \tau_1 > t \,] = \exp(-\int_0^t \omega(0, u)\, du),\ t \geqq 0$

$\Omega(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \omega(t_0, u)\, du,\ (A_\omega f)(t) = \int_t^\infty f(u)\, \omega(t, u)\, e^{-\Omega(t,u)}\, du$

$\mathrm{E}[\, f(\tau_k) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}} \,] = (A_\omega f)(\tau_{k-1})$，$\mathrm{E}[\, f(\tau_k) \,] = (A_\omega^k f)(0)$

- $N(t)$ は作用素 A_ω で書ける
- 一般には多重積分でしか書けない
- 確率順位付け模型の流体力学的極限（PDEの解）

流れ

流域：$\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_i$；$\Gamma_b = \{(0,s) \mid 0 \leqq s \leqq T\}$，$\Gamma_i = \{(z,0) \mid 0 \leqq z \leqq 1\}$
初期値と現在時刻の組：$\Delta_T := \{(\gamma,t) \in \Gamma_T \times [0,T] \mid \gamma \in \Gamma_t\}$.
流れ：$\Theta_T := \{\theta :\ \Delta_T \to [0,1] \mid \theta((y_0,t_0),t_0) = y_0,\ (y_0,t_0) \in \Gamma_T,$ **連続，各** t **で** γ **について全射非増加，各** γ **で** t **について非減少** $\}$
（Γ **上の順序**：$(0,T) \succeq (0,0) \succeq (1,0)$）

$\theta \in \Theta_T$（**流れ**），$w \in W$（**ジャンプ率**），$y_i^{(N)}$（**初期位置**）

$$\omega_i^{(N,\theta)}(s,t) = \begin{cases} w_i(\theta((y_i^{(N)},0),t),t), & \text{if} \quad s = 0, \\ w_i(\theta((0,s),t),t), & \text{if} \quad s > 0 \end{cases}$$

を強度とする点過程 $N = N_i^{(N,\theta)}$，$\tau^{*}{}_i^{(N,\theta)}$

流れ θ **が定義する確率順位付け模型** $Y_i^{(N,\theta)}(t)$

$$= y_i^{(N)} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{s\in(0,t]} \mathbf{1}_{Y_j^{(N,\theta)}(s-)>Y_i^{(N,\theta)}(s-)}\, N_j^{(N,\theta)}(ds)$$
$$-\int_{s\in(0,t]} Y_i^{(N,\theta)}(s-)N_i^{(N,\theta)}(ds), \quad i = 1,2,\ldots,N,\ t \geqq 0$$

- **数ページ前の式は上記を次を用いて書き換えたもの**：

$$\gamma_i^{(N,\theta)}(t) = \begin{cases} (y_i^{(N)},0), & \tau^{*}{}_i^{(N,\theta)}(t) = 0, \\ (0,\tau^{*}{}_i^{(N,\theta)}(t)), & \tau^{*}{}_i^{(N,\theta)}(t) > 0 \end{cases}$$

極限方程式の解 y_C

前ページの $y_i^{(N)} \mapsto z$: $\omega_{\theta,w,z}(s,t) = \begin{cases} w(\theta((z,0),t),t), & \text{if} \quad s=0, \\ w(\theta((0,s),t),t), & \text{if} \quad s>0 \end{cases}$

$N_i^{(N,\theta)} \mapsto N_{\theta,w,z}$ 「本質的な量」

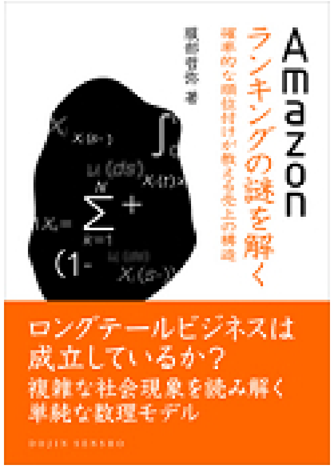
$$\varphi_\theta(dw,\gamma,t) = \int_{z\in[y_0,1)} \mathrm{P}[\, N_{\theta,w,z}(t) = N_{\theta,w,z}(t_0)\,]\,\mu_0(dw\times dz)$$

$$G(\theta)(\gamma,t) = 1 - \varphi_\theta(W,\gamma,t)$$

定理. $G:\ \Theta \to \Theta$ は固定点 $y_C \in \Theta_T$ をただ一つ持つ $\diamond$

定理. $\varphi_{y_C}(dw,\gamma,t) = \mu_t(dw\times[y_C(\gamma,t),1)$ $\diamond$

文献



T. Hattori, Preprint (2015)

T. Hattori, arxiv.org/1409.5117 (2014)
T. Hattori, S. Kusuoka, ALEA **9** (2012)

服部哲弥，日本OR**学会誌 57–6** (2012.6)

服部哲弥,「Amazon **ランキングの謎を解く」化学同人，**2011.5.
K. Hattori, T. Hattori, Stoch. Proc. Appl. **119** (2009)