フラクタル上の確率過程における くりこみ群の視点

－ d 次元ガスケット上の self-avoiding walk －

東大数理談話会 2001.12.07

服部 哲弥 (名大 多元)

0．背景．

○くりこみ群が解くべき未解決の問題

$\mathbb{Z}^3$ 上のSAWのmean square displacement exponent

$\mathbb{Z}^d$ 上の percolation の臨界現象

ϕ^4_3 spin 系の赤外漸近分布

$SU(3)$ 格子ゲージ理論の confinement

GUT (Higgs mechanism) $\cdots$

○くりこみ群は終わった？

• 弱摂動領域（Gauss measure，Brownian motion の「近く」）のみ

Gauss から遠く離れたところ→数値計算

★くりこみ群：「スケール変換」で induce される「適切な」パラメータ空間上の写像（力学系）

○「スケール変換」：単なる拡大縮小ではなく，細かい構造を加えたりならしたりする操作

統計力学系 (確率モデル)：sample は「ぎざぎざ」している　→　微分法による解析は不可能

「スケール変換」に対する系の応答 (ぎざぎざの変化)

○ 力学系の大局的な軌道の解析

簡単な一般論は期待できない

（臨界軌道か否かで異なる振舞，カオス）

~~→　「素直な」不変部分集合 (?)~~

~~cf. 固定点の近傍　→　微分写像から flow が分かる~~

~~cf. リャプノフ関数 (or くりこみ写像を縮小写像にする距離)　→　見つけかた？~~

1． dSG 上の self-avoiding path

dSG (d 次元 pre-gasket) $(d = 2, 3, 4, \cdots)$：

$d = 2$: SG (pre-**S**ierpiński **g**asket) の d 次元版

d 次元単位単体 $F_0 = Ov_1v_2 \cdots v_d \subset \mathbb{R}^d$

$F_n = d + 1$ 個の F_{n-1} をつないで 1 辺 2^n の d 次元単体 $O\ 2^n v_1\ \cdots 2^n v_d$

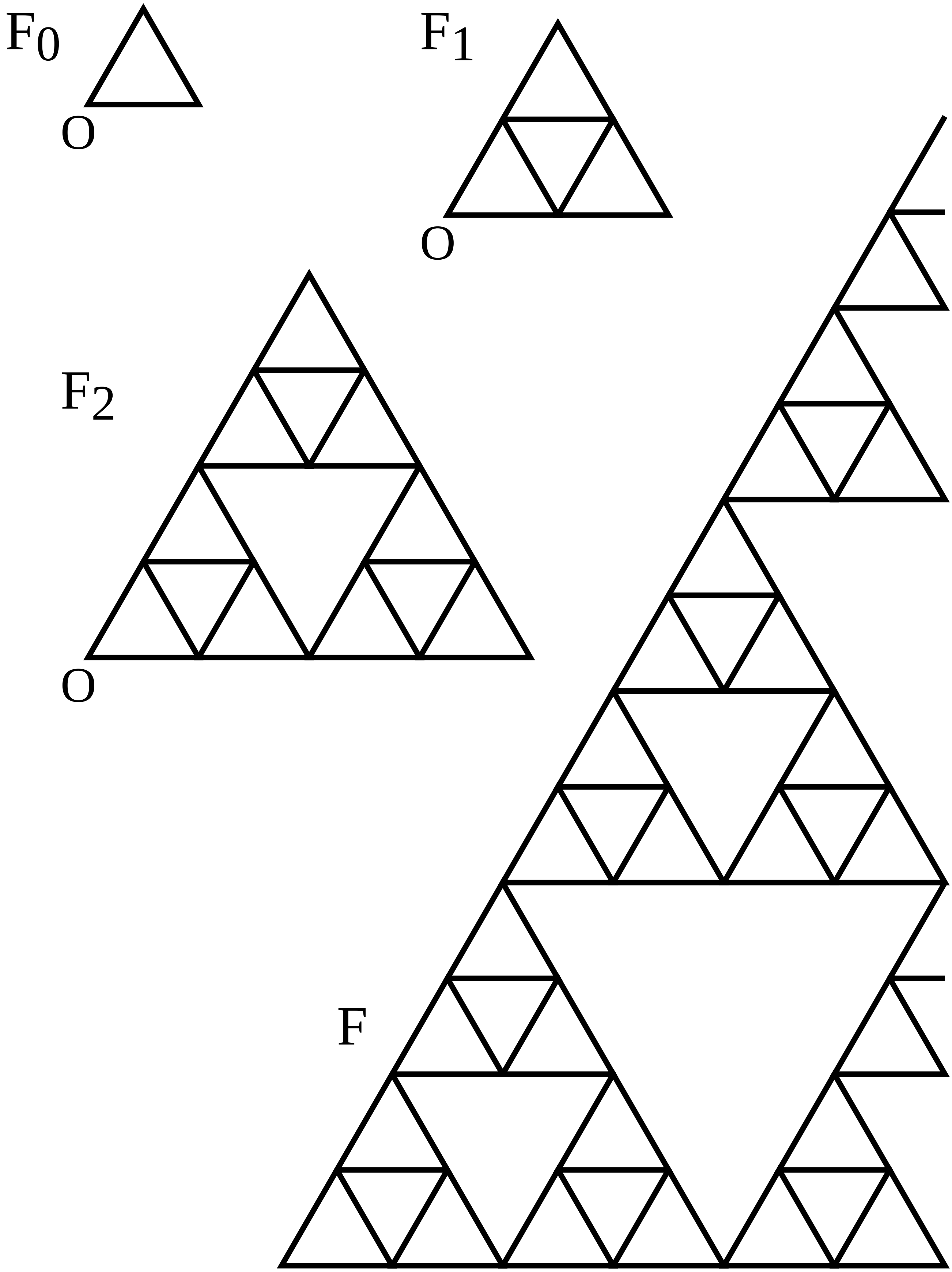
$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^d$

$G_n = \{F_n$ の頂点$\}$

$B_n = \{$ 辺 $\}$

dSG: $F = (G, B)$, $G = \bigcup_n G_n$, $B = \bigcup_n B_n$

dSG：くりこみ群が有限次元（おもちゃモデル）
SAP：非マルコフ（simple random walkだとマルコフ性などの
強力な手法が使えてくりこみ群の有効性が見づらい）


F_0
O
F_1
O
F_2
O
F

W_0: SAP on dSG (**S**elf-**A**voiding **P**ath)

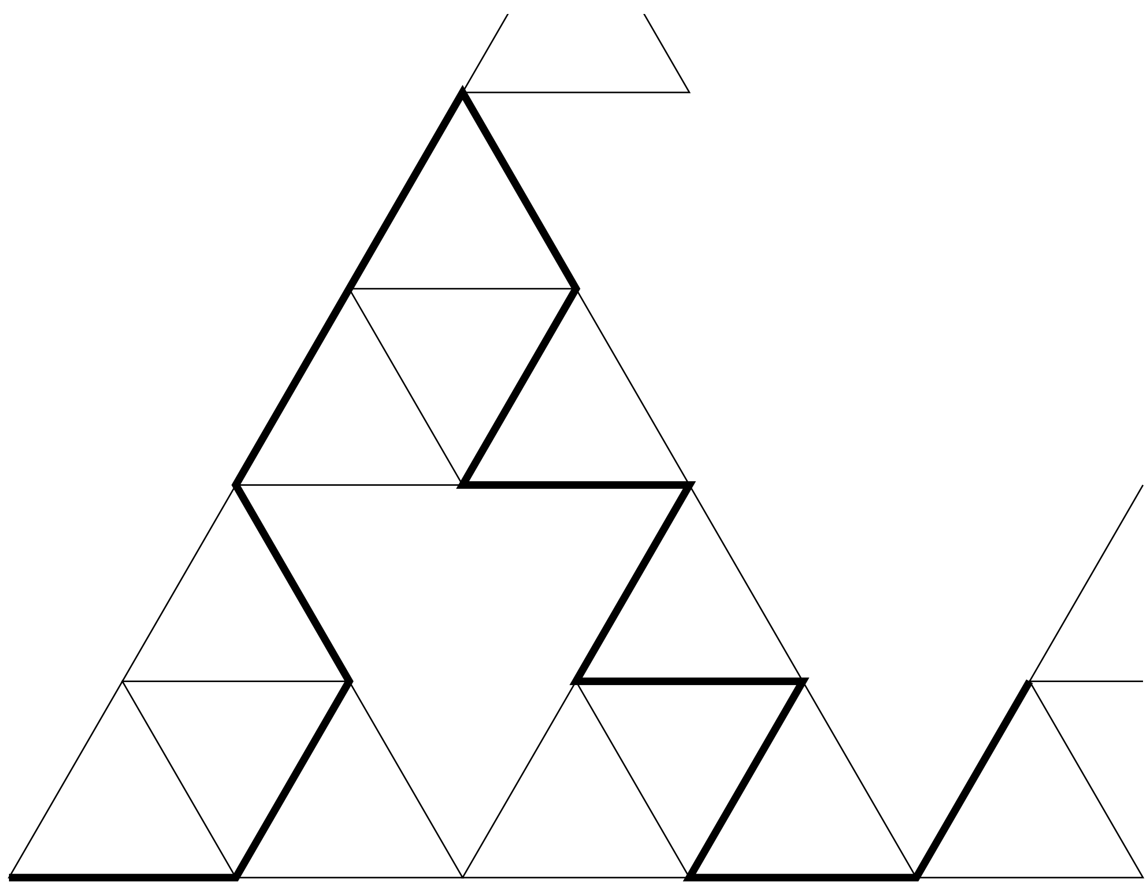
$w: \mathbb{Z}_+ \to G$

長さ $L(w) = \inf\{i \mid w(j) = w(i),\ j \geqq i\}$

$W_0 = \{w: \mathbb{Z}_+ \to G \mid$

(path) $\overline{w(i)w(i+1)} \in B,\ i = 0, 1, \cdots, L(w) - 1,$

(**self-avoiding**) $w(i_1) \neq w(i_2),\ i_1 < i_2 \leqq L(w)\}$



w∈W$_0$

L(w)=13

Path の漸近的性質

k 歩でどれくらい遠くまで届くか？

Mean square displacement の指数 γ:$|w(k)| \approx k^{\gamma}$

$d=2,3$: Hattori-Hattori-Kusuoka

問. dSG, $d=2,3$, の成果を一般化できるか？

まずは dSG, $d=4,5,6,\cdots$？**難しい．** 何故？

dSG, $d=2,3$, の解析：

「前半部分」 SAP のくりこみ群解析（**離散力学系の軌道の議論**）

「後半部分」 くりこみ群解析の結果を SAP の漸近的性質に翻訳（**path 上の確率測度の議論**）

現時点：dSG 上の SAP について「後半部分の一般論」（くりこみ群についての仮定から SAP の漸近的性質を得るような定理 $\rightarrow$ くりこみ群に何を求めれば十分かを明確にした）

モデルを思いきり簡単にすることでくりこみ群をきちんと定義し，かつくりこみ群解析が元の系の漸近的振る舞いの解析のエッセンスであることを数学的に証明した．

2．くりこみ群

くりこみ群の (不十分な) 定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

(i) 距離空間に値を取る確率過程 (path 上の測度) の距離空間の **「スケール変換」** に対応する変化 (測度空間の上の力学系) を適切なパラメータ空間上の力学系として表現すること

(ii) 追跡すべき軌道が**大局的**に素直なこと

(iii) 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること

dSG 上の SAP の漸近的性質という問題を力学系 (recursion) の軌道解析の問題に帰着させる

○ くりこみ群　－　2SG 上の SAW の場合

くりこみ群の recursion が閉じるために**SAP を分類**

(A) SAP が一つの単位単体を通る通り方

△ の通り方 2 通り (1 歩または 2 歩)

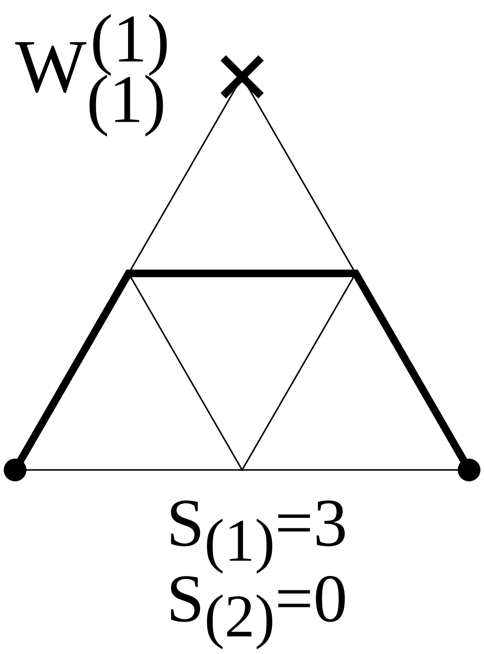
$s_{(i)}(w)$: i 歩で通り抜ける △ の個数 $(i = 1, 2)$

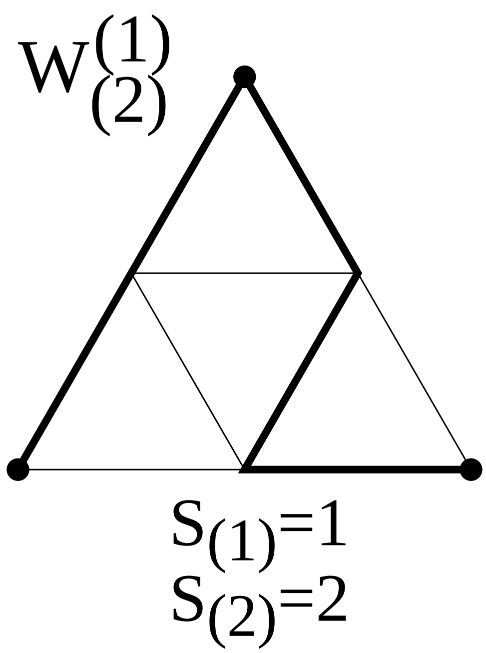
(B) F_n 上の SAP の分類

$W_{(1)}^{(n)} = \{w : O \to 2^n a \mid \text{SAW in } F_n, \ \times \ 2^n b\}$

$W_{(2)}^{(n)} = \{w : O \to 2^n a \mid \text{SAW in } F_n, \ \bigcirc \ 2^n b\}$

2^n a, 2^n b は F_n の外側の頂点のこと





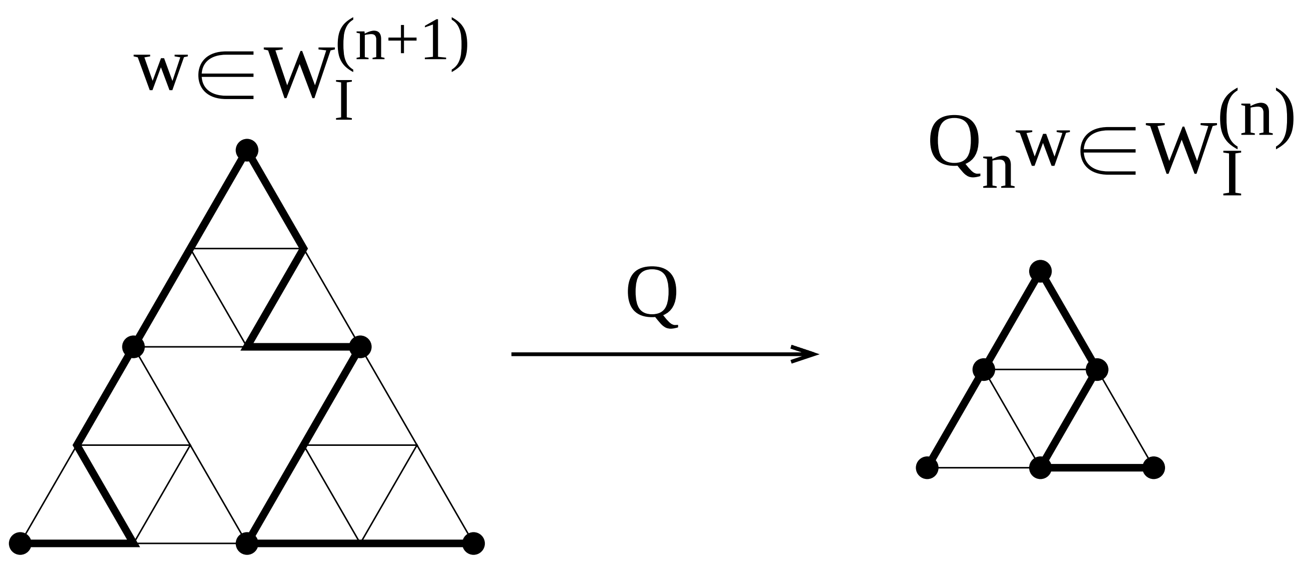
• くりこみ群 (SAP における「スケール変換」)

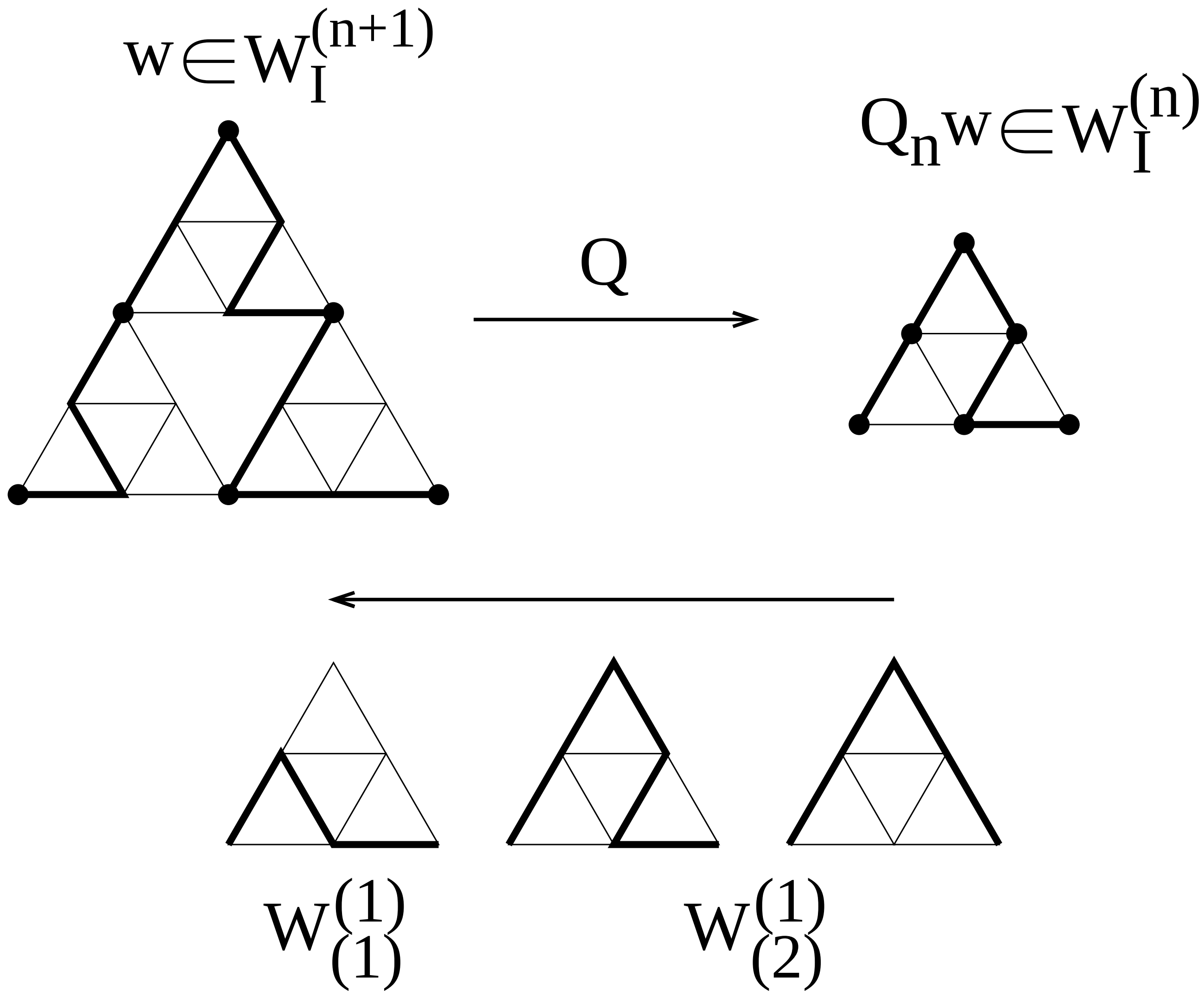
$\boxed{\text{Decimation.}}$ $Q_n: \ W_I^{(n+1)} \to W_I^{(n)}$

$$(Q_n w)(j) = 2^{-1} w(T_{n,j}(w)), \quad j \in \mathbb{Z}_+;$$

$T_{n,i}$ (G_n の 'hitting times')： $T_{n,0}(w) = 0$,

$$T_{n,i+1}(w) = \inf\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i}(w))\}\}$$





漸近的性質 $n \to \infty$：decimation Q_n の逆

$(w \in W_I^{(n)}$ の各 1 歩に「細かい構造」を追加)

「細かい構造」 $\quad \Leftrightarrow \quad W_J^{(1)}$

○ dSG への一般化

添字集合 $\{(1),(2)\} \to \mathcal{I}_d$

• $(s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $(W_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する母関数

$\vec{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$

$$X_{n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}$$

$$\vec{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_d), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

命題 1 $\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n \circ \vec{X}_1, \quad \vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}$

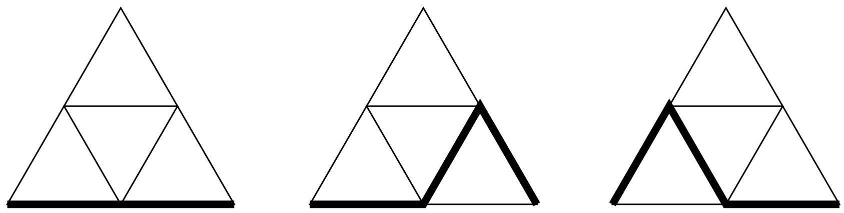
証明. $w \in W_I^{(n)}$ から $W_I^{(n+1)}$ の path を得る手続き：

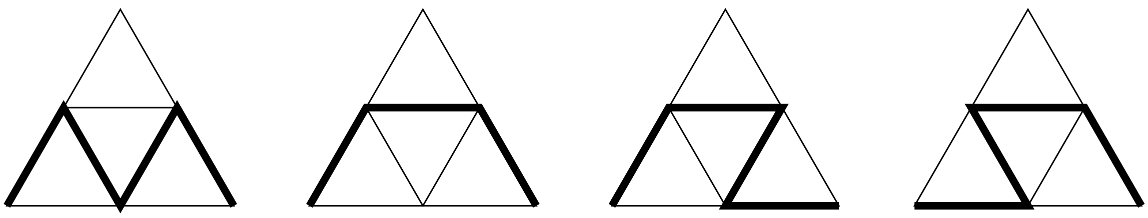
「F_n の $(d+1)^n$ 個の単体それぞれについて，w の通り方が J 型のとき $W_J^{(1)}$ の要素で置き換える」□

くりこみ群：$\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ が定義する $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d}$ 上の力学系

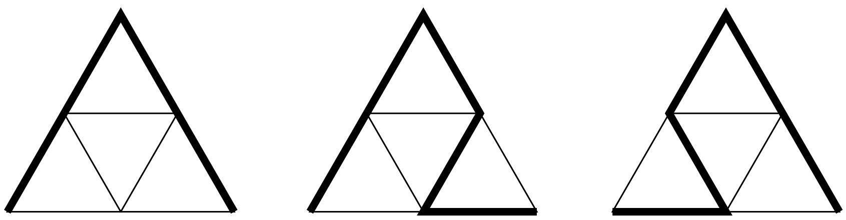
2SG:

I=(1)





I=(2)



$$\vec{\Phi}(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy)$$

くりこみ群の不変部分集合：SAP らしさを意味すると思われる不変部分集合 Ξ_d

$d=2,3$ の経験則:

「後半部分の解析」の一般論に関してこれが十分な定義であることは証明済み．
「前半部分の解析」もこれで十分だろうという期待が「経験則」（d=2,3 でOK，d が4以上で未解決）．

$$\Xi_2 = {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_2} \setminus \{O\}$$

$$\Xi_3 = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \setminus \{O\} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2\}$$

例えば (11)型とは単位三角錐を１歩で通り抜けて他を通ってからもう一度１歩で通り抜ける通り方．これに対応するパラメータが x(1)の2乗以下という条件がくりこみ写像で保存されるのは，直感的にはself-avoiding pathが一度通った場所の近くに戻りづらい(そのようなpathの種類が少ない)ことを表すという意味でSAPらしさを意味すると考える．

3．主結果

dSG 上の SAP の漸近的性質を保証するくりこみ群の軌道の性質の定式化

$\vec{x}_c$ が self-avoiding fixed point (**SAFP**) とは：

(FP1) $\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$

(FP2) $\vec{\Phi}$ の Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ について，$\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能，最大固有値 $\lambda > 1$，| その他 | < 1.

スケール変換の方向だけ不安定(relevant)であとは効かないというのは理論物理でスケーリング仮説と呼ばれる臨界現象に普遍的とされる自然な仮定．

λ に対応する左固有ベクトル $\vec{v}_L$ は全成分正.

右固有ベクトルについて $v_{R,(1)} > 0$

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ ならば，Φ_I に $m_{(1)} > 0$ と「$x_{c,J} = 0 \to m_J = 0$」を満たす項 $\displaystyle\prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ がある

(FP4) $\vec{x}_c \in \Xi_d \setminus \{O\}$

d≧3のdSGでは複数の固定点．SAPに関係するのは Ξ に入っているもの

$\beta_c \in \mathbb{R}$ が**臨界点**とは $\vec{x}_{can}(\beta_c) = (e^{-\beta_c |I|},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}_{can}(\beta_c)) = \vec{x}_c$ となる SAFP $\vec{x}_c$ が存在すること

$|I|$：I型の通り方の単位単体上の歩数(例：$|(i)|=i$)．パラメータをこう選ぶと総歩数に対する母関数になるので総歩数に関する漸近的性質を得る．

$W^{(0)}$：原点 O から出発する SAP の集合

$N(k)$： O から出発する歩数 $L=k$ の SAP の本数

$\tilde{P}_k$：原点 O から出発する歩数 k の SAP の集合上の一様分布（E_k： 期待値）

定理 2 (Hattori–Tsuda '01) 臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在すれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = s\gamma, \ \ s \geqq 0$$

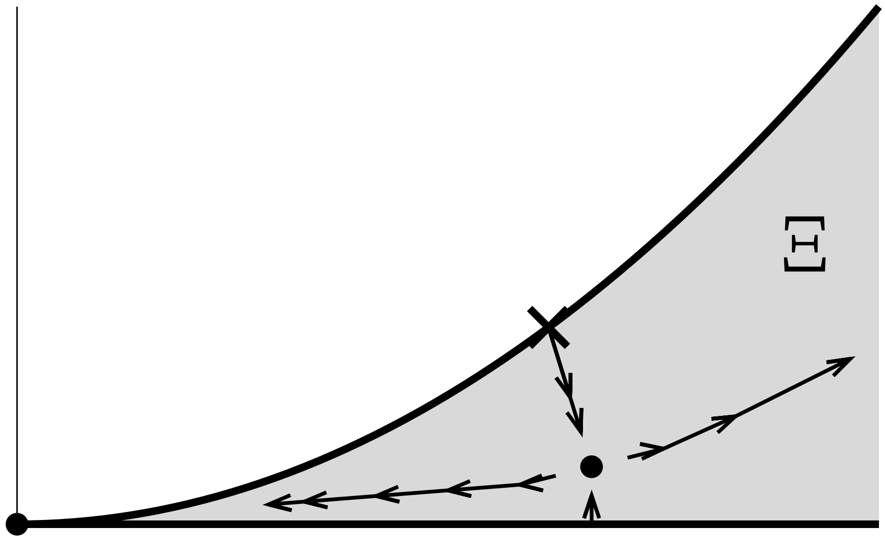
$\gamma = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$, λ: β_c に対応する SAFP の (FP2)

- $|w(k)| \approx k^{\gamma}$
- β_c, λ はくりこみ群だけで決まり，元の dSG や SAP に戻る必要がない

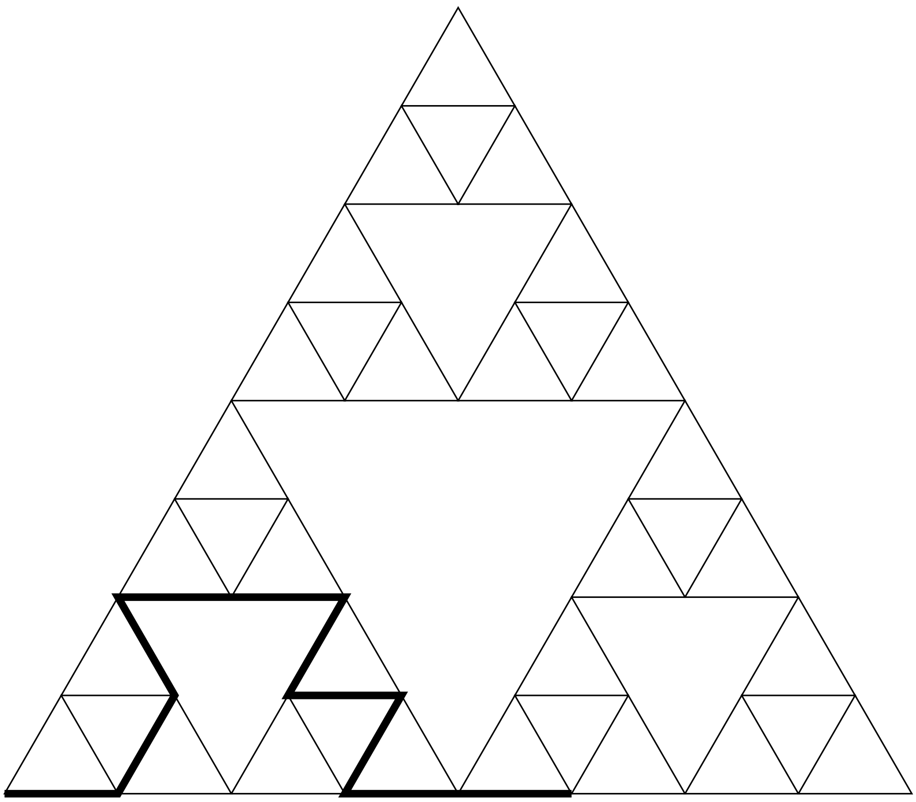
○ くりこみ群が SAP の漸近的性質を決める

臨界点があることが分かっているのは d=2,3 のみ（「前半部分の解析」．大局的軌道の追跡なので極めて難しい．あるとしたら一つであることは容易．SAFPの存在はd=2,3,4で分かっていて一般論も可能と思う．SAFPの唯一性は（この定理には必要ないが）成り立つと予想する．しかしその証明も難しいと思う．

flow of Φ



for SAP on dSG,
if this global RG flow structure holds true, then



$$|w(k)| \quad k^{\gamma} \qquad\qquad \gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

4．dSG 上の restricted SAP のくりこみ群解析

dSG 上の SAP のくりこみ群：正係数多項式 $\vec{\Phi}$ が定義する $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d}$ 上の力学系

言うべきこと：SAFP と臨界点の存在

＝　固定点の存在と軌道が「すなお」なこと

○ Restricted model のくりこみ群で説明する

Restricted model: $I=(1,1,\cdots,1)$ 型の通り方だけに制限した self-avoiding paths の集合

$(\times\ 0\to v_1\to v_2,\quad \bigcirc\ 0\to v_1,\ v_2\to v_3)$

- 2SG, 3SG では本質的な部分集合
- dSG 上の restricted model のくりこみ群の次元＝paths の種類＝ $[(d+1)/2]$ 次元 $(=:\ D)$
- 不変部分集合 $\Xi\subset\mathbb{R}_+{}^D$

(Full model のときの Ξ_d の類似)

○ 2**SG**

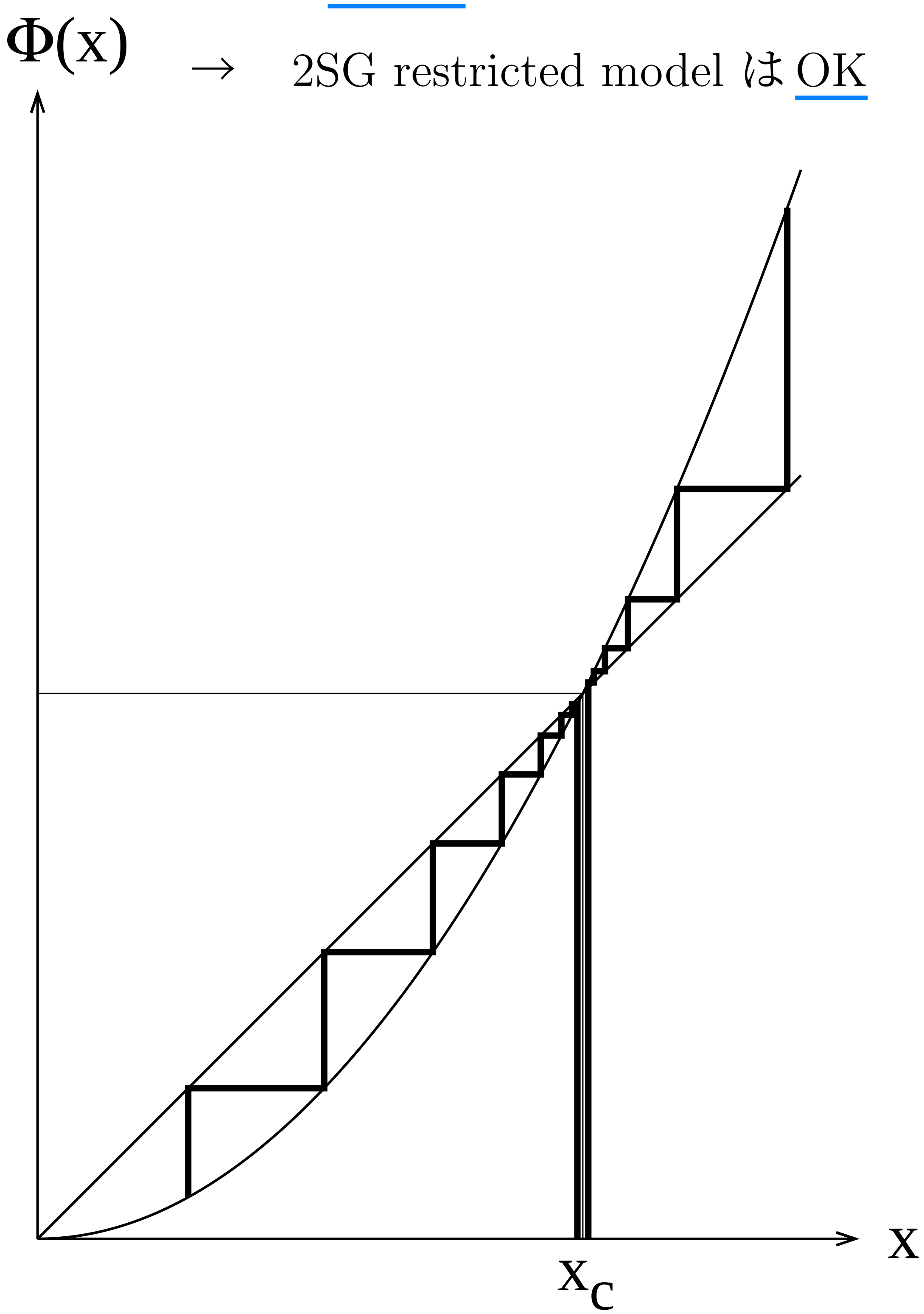
• $D = 1$, $\Xi = \mathbb{R}_+$

$\Phi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: 2 次以上の項からなる正係数多項式

→　固定点 (SAFP) $x = \Phi(x) > 0$ の存在，一意性,

軌道は明らか

→　2SG restricted model は OK



○ $D = 2$

• 3SG と 4SG の restricted model

$\rightarrow \boxed{D = 2,\ \Xi = \{(x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{O\} \mid y \leqq x^2\}}$

命題 3 *3SG と 4SG の restricted model* のくりこみ群 $\vec{\Phi}$ は *(*スケール変換の後*)*, *potential* W を持つ： $\vec{\Phi} = \mathrm{grad}\, W$．$W$ は以下の性質を持つ

(i) $W(x, y)$ は (x, y) の 3 次以上の項からなる正係数多項式で x^3 という項を持つ

(ii) $\mathrm{grad}\, W(\Xi) \subset \Xi \setminus \{(x, y) \in \Xi \mid y = x^2\}$

(iii) $(X, Y) = \mathrm{grad}\, W$ とおくとき，$R(x, z) = (X^2 - Y)(x, x^2 z)$ は z, $1 - z$, x の正係数多項式

(iv) $R(x, z)/Y(x, x^2 z) = O(x)$, $x \to 0$ *(*$0 \leqq z \leqq 1$ に関して一様*)*

(v) $Y(x, 0)$ は恒等的に 0 ではない

◇

○ この技術的命題の嬉しい点.

• 具体的に数え上げなくても path が「よけ合う」ことなどから容易に証明できる

• dSG 上の restricted model ($d \geqq 5$) に拡張できる

• 結論の性質は $(X,Y) = \mathrm{grad}\, W : \Xi \to \Xi$ の固定点存在の十分条件

命題 4 $W : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+$ が命題 *3* の結論にあがっている性質を持つ正係数多項式とする．このとき，$\Xi = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{0\} \mid y \leqq x^2\}$ の内部に $\mathrm{grad}\, W$ の固定点が存在する．

問． 命題3の結論の性質の下で Ξ の境界の任意の点 $\vec{x}$ から出発する軌道 $\vec{x}_{n+1} = \mathrm{grad}\, W(\vec{x}_n)$, $\vec{x}_0 = (x,y)$ が $(0,0)$, (∞,∞), Ξ の内部の固定点 (命題4) のいずれかに収束するか？もし言えないならば，どのような仮定を追加すれば十分条件となるか？

５．結び

$\boxed{\text{くりこみ群力学系が持つべき「素直な」性質}}$

d 次元 gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群解析に基づく**経験則／作業仮説**

- 「O」と「無限遠点」を境界の一部に持つ不変部分開集合 Ξ ($\Phi(\Xi) \subset \Xi$) があって，双曲型固定点近傍の構造が Ξ に大局的に広がっている．

即ち，$\exists x_c \in \Xi;\ \Phi(x_c) = x_c$ (固定点) かつ，$x_0 \in \Xi$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Phi^n(x_0)$ は O か無限遠点か x_c.

ここでいう意味でのくりこみ群解析：SG上のモデルではSAP以外にも種々可能．例えば，SG上のSAPとSG上のsimple random walkを「内挿」するモデルをくりこみ群の視点で発券し，γが内装パラメータに関して連続になっていることを調べた．篠田氏はSg上のパーコレーションを同様に解析している．くりこみ群が無限次元の場合の例として私が関係したのはシルピンスキーカーペット上の拡散の等方性の回復という現象の証明．正方(立方)格子ZdのSAWはくりこみ群がもっととひどい無限次元になるので，形式的にはくりこみ群を書けるが，それを解析するのはとても難しいと思う．dSGで成功しないようなら厳しいのではないか？

~~○ 問題：くりこみ写像 Φ に対するどのような条件の下で，このような「素直な」こと (むしの良いこと) が成り立つか？~~

~~各 d 毎に具体形を与えれば強引に証明できる (かも知れない　―　$d \leqq 3$ と $d \leqq 4$ restricted ではOK) が，具体形を知らずに「すぐ分かる性質」だけから目標に至る力学系の一般論はないか？~~

~~○ 鍵 (?)：正値性~~

~~（測度の weight，スピン系におけるモーメントの相関不等式，$\cdots$)~~