Pre-Sierpiński carpet 上の非等方拡散の等方性の回復について

服部　哲弥

一辺 1 の正方形 $[0,1]\times[0,1]$ から順次一辺 3^{-n} の正方形 8^{n-1}個, $n=1,2,\cdots$, をくり抜いて作った図形の $n\to\infty$ の極限として Sierpiński carpet と呼ばれるフラクタルを構成できるが，この構成の第 n 段階，即ち，一辺 3^{-n} の正方形をくり抜いた時点の図形を F_n とする．

$r>1$ を定数とする．F_n を一つの方向に $\sqrt{r}$ 倍に線型に引き延ばして $1\times\sqrt{r}$ の長方形とし，この形状の（等方的な通常の材質でできた）電気抵抗板を考える．引き延ばした辺の方向を y軸とすると，座標変換 $y'=y/\sqrt{r}$ によって，電位分布が $v(x,y)$ のときに発生するジュール熱が $E_{F_n}(v,v)=\int_{F_n}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)(x,y)\,dx\,dy$ である状況を考えることになる．F_n の 2 辺 $x=0$ と $x=1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗（x 方向の有効抵抗）を $R_n^x(r)$ とする．即ち，$1/R_n^x(r)=\inf\{E_{F_n}(v,v)\}$. ここで infimum は，境界条件 $v(0,y)=1$, $v(1,y)=0$, $0\le y\le 1$, を満たす全ての $v\in C(\bar{F}_n)\cap H^1(F_n)$ にわたる infimum である．同様に $y=0$ および $y=1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗を $R_n^y(r)$ として，非等方性を測る量 $H_n(r)=R_n^y(r)/R_n^x(r)$ を導入する．

定理 1. $0<\inf_{r>0}\liminf_{n\to\infty}H_n(r)\le\sup_{r>0}\limsup_{n\to\infty}H_n(r)<\infty\,.$

言い換えれば，r と n によらない定数 $C\ge 1$ があって，任意の非等方性 $r>0$ に対して，十分大きな n で $1/C\le H_n(r)\le C$ となる．我々の証明では $C=81589$ ととれる．

Sierpiński gasket などの finitely ramified fractals では，等方性の回復が $\lim_{n\to\infty}H_n(r)=1$ という強い意味で示せる．くりこみ群が有限次元であるため解析が陽に遂行できるからである．Sierpiński carpet についてもこれの成り立つことを予想するが，recursion の陽な形が得られないため問題が極めて難しくなる．それにも関わらず 定理 1 を得ることができることは，等方性の回復機構が finitely ramified fractals の特殊性によるものではなく，普遍的な内容を持つことを示唆すると考える．

定理 1 の証明は，anisotropic regime ($H_n(r)\gg 1$) における $H_n(r)$ の振る舞いを，R_n^x と R_n^y についての再帰不等式で求めることに帰着される．大雑把に言うと，$H_n(r)\gg 1$ のとき等方性の指数関数的回復傾向 (scaling behavior) $H_n(r)\approx(7/9)^n r$ が言えるので，$H_n(r)$ は漸近的に大きくなれないという定理の結論に至る．より精密に，次の結果を得た．

定理 2. $\lim_{s\to\infty}s^{-1}\liminf_{n\to\infty}H_n((9/7)^n s)=\lim_{s\to\infty}s^{-1}\limsup_{n\to\infty}H_n((9/7)^n s)=1.$

漸近一次元拡散は，くりこみ群の退化固定点近傍の scaling behavior に基づいて発見したが，定理 2 は，Sierpiński carpet の anisotropic regime において同じ描像が成り立つことを意味する．

$R_n^x(r)$ と $R_n^y(r)$ についても定理 1 と 定理 2 に対応する結果が得られる．

[1] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Physical Review Letters **75** (1995) 3042–3045.

[2] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* preprint.

hattori@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp