

# 数学基礎 V (複素関数論基礎) 講義要約兼演習問題集

受講生諸君への注意

この冊子は講義内演習時間に使用するので、各自で管理して、講義には毎回持参すること。

この演習問題集では、断らずに以下の記号を用いる。

- 自然数の集合  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  , 非負整数の集合  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  , 整数の集合  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  , 有理数の集合  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  , 実数の集合  $\mathbb{R} = \{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \mid a_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}; \sup a_n < \infty\}$  , 非負実数の集合  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  , 複素数の集合  $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  .
- $z, z_1, w$  等は断らなければ複素数とする。  $\mathbb{C}$  の要素 (複素数) を点とも呼ぶ。断らずに集合と言えは  $\mathbb{C}$  の部分集合のこととする。
- $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$  に対して、実部  $x = \operatorname{Re}(z)$  , 虚部  $y = \operatorname{Im}(z)$  , 複素共役  $\bar{z} = x - \sqrt{-1}y$  , 絶対値 (原点からの距離)  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  , 極座標表示  $z = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)$  ( $r = |z|$  , 偏角  $\theta = \arg z$ ) .
- (複素) 関数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  . 断らなければ  $f$  等は複素関数とする (中ほど以降では誤解のおそれがなければ、断らずに正則関数とすることもある。)

この他、特に第1章から第2章前半にかけて、断らずに実数 ( $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{R}^2$ ) の微積分学の記号や結果を使うこともある。

## 1 準備 .

基本的な用語は §A を参照。

- [1] (1) 方程式  $z^n = 1$  には  $n$  個の解がある。それを極座標表示を用いて求めよ。  
(2)  $z^n = 1$  の 1 でない解を  $w$  とする。  $h \in \mathbb{N}$  が  $n$  の倍数でないとき、  $1 + w^h + w^{2h} + \dots + w^{(n-1)h} = 0$  を示せ。

- [2] 複素数列  $\{a_n\}$  と複素数  $a$  に対して、  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(a_n) - \operatorname{Re}(a)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(a)| = 0$  が同値であることを証明せよ。

(  $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$  をまず証明してもよい。 )

- [3] 複素数  $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$  , に対してコーシーの不等式  $\left| \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2$  を証明せよ。等号は  $a_i = \lambda b_i, i = 1, \dots, n$  , となる  $\lambda \in \mathbb{C}$  がある場合に限ることも証明せよ。

( 次の順序で証明してもよい。  $\mathbb{C}^n$  が複素線形空間であることを示す。  $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$  とおくと、これが  $\mathbb{C}^n$  の内積であることを示す。内積空間におけるコーシー・シュワルツの不等式  $|(a, b)|^2 \leq (a, a)(b, b)$  を思い出す。 )

[4] 次の級数の収束・発散を調べよ．

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} .$$

$$(2) z = \pm 1 \text{ における } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} .$$

$$(3) \sum_{k=1}^{\infty} z^k .$$

( $\sum \frac{z^k}{k^2}$  については，各項の絶対値のつくる実数の級数の収束・発散は実数の結果を用いてもよい． $\sum \frac{z^k}{k}$  については， $z = \pm 1$  の場合はそれ自体が実数の級数だから，実数の結果を用いてよい． $\sum z^k$  が収束すれば各項が作る数列はどうなるべきか？)

[5] 関数  $f$  が点  $a$  の近傍で定義されていて  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \in \mathbb{C}$  が成り立つとき，

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} b, \quad \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} b, \quad \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |b|,$$

を証明せよ．

## 2 正則関数．

### 2.1 コーシー・リーマンの関係式．

$D$  を開集合， $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  とする（以下 [2, 195A]）．

微分可能 (differentiable) :  $a \in D$  に対して

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は存在するとは限らないが，複素数値として存在すれば  $f$  が  $a$  で微分可能と言い， $f'(a)$  を  $f$  の  $a$  における微分係数という．微分係数の存在は  $f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$  と同値．この式で  $f'(a)$  を  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  のヤコビ行列に置き換えた式は， $\mathbb{R}^2$  上の実数値関数の全微分可能性の定義と一致する．これが  $f'(a)$  と書けることは，ヤコビ行列の 4 成分の 2 つずつが関係することを意味する（コーシー・リーマンの関係式）<sup>1</sup>．

<sup>1</sup>微分可能性について [1, 24 ページ -10 行目前後] には，複素数としてどう 0 に近づいても同じ値でないといけないう点が強い意味を持つ，と強調されているが，[1, §2.2] にもあるように，これだけならば 2 変数実関数の全微分可能性でも同じ強い意味がある．近づき方によらないだけでなく， $f$  の値域 ( $\mathbb{R}^2$ ) の 2 成分の間で (複素数の体としての構造を通して)  $f'$  を共通にとれる点が  $\mathbb{R}^2$  の極限より強い．

[1, 24 ページ -10 行目前後] の記述は 1 変数実関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に比べたとき強い意味を持っている，という意味であるが，これは 1 変数実数値関数の定積分を計算するために正則関数が考案された歴史をふまえている．

$f$  が  $a$  で微分可能なことと, 2変数実数値関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  として  $a$  で全微分可能で, かつ,  $a$  でコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式を満たすことは同値 [1, 定理 2.5].

正則 (regular, holomorphic):  $f$  が開集合  $D \subset \mathbb{C}$  で正則とは,  $D$  の各点で微分可能なこと ( $D$  が開集合でないときこう言ったならば,  $D$  を含むある開集合で  $f$  が定義されて正則という意味 [2, 195A].)

1点で正則ならば (つまり, その点を中心とするある円内で正則ならば) そこで連続である.

領域  $D$  (§A.2: 連結集合であることに注意) で正則かつ実数値の関数は定数関数である [1, 定理 2.6].

$F(w) = f(1/w)$  が  $w = 0$  で正則なとき  $f$  は  $\infty$  で正則と定義する.

解析的 (analytic):  $f$  が開集合  $D \subset \mathbb{C}$  で解析的とは,  $D$  の各点でのテーラー展開 (べき級数展開, §3.4) の収束半径が正なこと.

$f$  が  $D$  で解析的なことと, 内部が  $D$  に含まれる<sup>2</sup> $D$  内の任意の有限長 Jordan 閉曲線 (§A.4)  $C \subset D$  に対して  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つことは同値 (右向きはコーシーの積分定理 §2.3, 左向きは Morera の定理 §3.4). また,  $D$  で正則なことも同値 (コーシーの積分公式 §3.1).

- [6]  $z = x + \sqrt{-1}y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , と書くとき,  $f(z) = z^2$  を虚部と実部に分けよ. 即ち,  $f(z) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$  なる 2 変数実関数  $u, v$  を求めよ.  
さらにコーシー・リーマンの関係式が成り立つことを示せ.

- [7] 虚部が  $y(3x^2 - y^2 - 1)$  であるような正則関数の実部とその正則関数を求めよ. 但し,  $x$  と  $y$  はそれぞれ  $z$  の実部と虚部とする.

- [8]  $n \in \mathbb{Z}_+$  のとき,  $f(z) = z^n$  は  $z \in \mathbb{C}$  で正則であることを示し, 微分  $f'(z)$  を求めよ.  
(実数値関数の経験から, 答は想像がつくに決まっているが, 最初だけは定義に従って計算しなければならない.)

- [9] 次のうち  $\mathbb{C}$  で正則な関数はどれか?

(i)  $|z|$       (ii)  $\operatorname{Re} z$       (iii)  $e^x \cos y + \sqrt{-1}e^x \sin y$  (但し  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ )

<sup>2</sup>[1, 定理 3.1] ではこのことを  $D$  が単連結という条件に込めている.

[10] 領域  $D$  で  $f$  が正則, かつ,  $f'$  が  $D$  で恒等的に 0 ならば,  $f$  は定数関数であることを証明せよ.

領域  $D$  の定義 (§A.2) には連結集合であることが含まれていることに注意.)

## 2.2 線積分.

平面 (一般に  $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ ) 上の 1 次元積分. 1 次元実積分と同様に符号 (積分の向き) がついている (cf. 重積分).

$C$  は曲線  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f: C \rightarrow \mathbb{C}$  は連続<sup>3</sup>. 分割  $\Delta = \{t_i\}$  と  $t_i < \xi_i < t_{i+1}, i = 1, \dots, n$ , に対して  $S_{\Delta, \xi} = \sum_{i=1}^n f(\phi(\xi_i))(\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i))$  とおき,  $|\Delta| \rightarrow 0$  としたときの極限值  $S = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_{\Delta, \xi}$  を  $S = \int_C f(z) dz$  と書いて  $C$  に沿った  $f$  の線積分という.

次が知られている.  $f$  が連続関数,  $C$  が区分的に 1:1  $C^1$  級 (たとえば Jordan 閉曲線 (§A.4)), ならば, 分割  $\Delta$  および曲線のパラメータ表示  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  (ただし, 区分的に 1:1  $C^1$  級) の選び方によらずに線積分  $S$  が決まって

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

ここで  $\phi'(t) = (\operatorname{Re}\phi)'(t) + \sqrt{-1}(\operatorname{Im}\phi)'(t)$ .

集合  $D$  の境界  $\partial D$  が Jordan 閉曲線の場合,  $\partial D$  に沿った線積分は,  $D$  を左手に見る向きと定義する (左回り, 反時計回り). 一般に,  $\int_{|z|=2}$  などと, 積分路を条件だけで表示した場合, 断らなければ, その条件が示す曲線に沿って反時計回りに線積分するものと約束する.

曲線を始点からの長さ (道のり)  $s$  でパラメータ表示したとき, (実数上の関数の積分)  $\int_C g(z(s)) ds$  のことを  $\int_C g(z) |dz|$  と書く. 複素関数  $f$  に対して  $g = |f|$  なる場合を扱うことが多い.

線積分に関する基本的な評価について以下が知られている [3, §56].

(1) ある  $M > 0$  があって, 連続関数  $f$  が, 曲線  $C$  上常に  $|f(z)| \leq M$  ならば  $C$  の長さ (§A.4) を  $L$  とするとき,  $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$ .

(2)  $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$ .

(3) 連続関数の列  $\{f_n\}$  が曲線  $C$  上で連続関数  $f$  に一様収束 (§A.5) しているとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz.$$

(この性質を, 積分と極限の順序交換, または, 項別積分可能性, などという<sup>4</sup>.)

<sup>3</sup>積分を定義するだけならば, 正則関数でなくても連続関数で十分. もちろん, あとで役に立つのは正則関数の場合.

<sup>4</sup>§3.4 で正則関数の高階微分を線積分で表すときに用いる.

(4)  $C$  の分割  $\Delta = \{z_i \mid i = 1, \dots, n\}$  を順に結ぶ折線  $\Gamma$  について, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $|\Delta|$  が十分小さければ  $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| < \epsilon$  (曲線上の線積分の折線上の積分による近似<sup>5</sup>. 証明で, 連続な関数は有界閉区間で一様連続である (§A.3) であることを使う.)

(5)  $C$  を  $z_0$  と  $z$  を結ぶ曲線とする. 線積分  $\int_C f(z) dz$  (は一般には  $z_0$  と  $z$  だけでは決まらず,  $C$  の途中の経路によるが, これ) が, もし, ある領域の  $z$  に対して,  $z_0$  と  $z$  だけで決まり, 途中の  $C$  の形によらないならば, これを  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  と書いて  $f$  の不定積分という.

$f$  の不定積分  $F$  が存在するとき,  $F$  は正則で  $F'(z) = f(z)$  (不定積分の微分<sup>6</sup>.)<sup>7</sup>

領域  $D \subset \mathbb{C}$  が単連結であるとは,  $D$  内の任意の Jordan 閉曲線  $C$  (§A.4) の内部が (内部の全ての点が)  $D$  に含まれるときをいう.

[11] 以下の  $\mathbb{C}$  内の曲線が  $C^1$  級 Jordan 閉曲線であることを示せ

- (1) 原点中心半径 1 の円周 (左回り).
- (2)  $0, 1, \sqrt{-1}, 1 + \sqrt{-1}$  を 4 頂点とする正方形の周 (左回り).

(曲線が  $C^1$  級かどうかは対応する性質を持つパラメータ表示の存在で定義されていたことを思い出せばよい).

[12]  $r > 0$  に対して  $C_r$  を中心  $a$  半径  $r > 0$  の円で反時計回り, また,  $n \in \mathbb{Z}_+$  とするとき,  $\int_{C_r} (z - a)^n dz$ , および  $\int_{C_r} \frac{1}{(z - a)^n} dz$ , を計算せよ<sup>8</sup>.

[13]  $z \in \mathbb{C}$  に対して  $x = x(z) = \operatorname{Re} z$  と書き,  $C_1$  を 0 から  $1 + \sqrt{-1}$  への線分,  $C_2$  を 0 から 1 への線分と 1 から  $1 + \sqrt{-1}$  への線分をつないだものとする. このとき, 以下の関数  $f$  に対して, それぞれ  $\int_{C_1} f(z) dz$  と  $\int_{C_2} f(z) dz$  を計算せよ.

- (i)  $f(z) = z$
- (ii)  $f(z) = \operatorname{Re} z$
- (iii)  $f(z) = \bar{z}$

[14]  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  で定義された複素関数  $f$  について以下を証明せよ<sup>9</sup>.

<sup>5</sup>線積分の定義は, 折線上でさらに長方形の面積で近似している.

<sup>6</sup>§3.4 で使う.

<sup>7</sup>逆, 即ち,  $F'(z) = f(z)$  なる正則な  $F$  があるとき,  $\int_C f(z) dz$  が始点と終点だけで決まるか? は, 領域が単連結な場合のみ肯定的に保証される. 最小限の解決が §5 までお預けなので, 教科書等ではこの段階での言及が慎重に避けられている. この節の問題を解くときはうっかり使わないように注意.

<sup>8</sup>留数定理の証明でこの結果が用いられる (§4.2) ので, みかけより重要.

<sup>9</sup>留数計算によって実数上の積分を求める際にこの問題のような考察が重要になる (§4.2).

(1) 正定数  $M, \delta, r_0$  があって,  $|f(z)| \leq M|z|^{-1+\delta}, 0 < |z| \leq r_0$ , ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} \left| \int_{|z|=r} f(z) dz \right| = 0.$$

(2) 正定数  $M, \delta, R_0$  があって,  $|f(z)| \leq M|z|^{-1-\delta}, |z| \geq R_0$ , ならば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|z|=R} f(z) dz \right| = 0.$$

[15] 円周に沿った線積分  $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1} dz$  を計算せよ.

[16]  $a \in \mathbb{C}$  を定数,  $\Delta$  を三角形とするとき,  $\int_{\partial\Delta} (z-a) dz$  を計算せよ.

(三角形の頂点を  $z_1, z_2, z_3$  などとおいて, 定義通り線積分を計算してみてもよい.)

[17] (1) 関数  $f(z) = z$  は不定積分  $\int_0^z f(z) dz$  を持つことを示し, その不定積分を求めよ.

(2)  $n \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{C}$  のとき,  $f(z) = (z-a)^n$  は不定積分  $\int_a^z f(z) dz$  を持つことを示し, その不定積分を求めよ.

( $C$  の始点と終点を  $a, b$  とするとき,  $\int_C f(z) dz$  が  $a, b$  だけで決まり, 途中の経路によらないことを言いたい. 線積分を定義に従って計算してもよいが,  $C$  が折線の場合に計算(折れ曲がる点を  $z_1, \dots, z_n$  などとおけば定義に従って計算できるだろう)してから, 曲線上の線積分の折線上の積分による近似定理を使ってもよい.)

## 2.3 コーシーの積分定理.

定理 (コーシーの積分定理 [1, 定理 3.1, 系 3.7, 系 3.8]). 領域  $D \subset \mathbb{C}$  の上の正則関数  $f$  と  $D$  内の閉曲線  $C$  に対して<sup>10</sup>,  $C$  の内部が (内部の点が全て)  $D$  に含まれるならば,  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ.

<sup>10</sup>[1, 定理 3.1] には単に「閉曲線」となっているが, その証明 §3.4 の 3 では, Jordan 閉曲線であることを当然視した記述の下で議論している. もっとも, その証明は折れ線近似するので, 元の曲線が Jordan 閉曲線でなくても閉曲線であれば大丈夫だと思う. また, Jordan でないと, 反時計回りという言葉の意味が怪しくなるが, 閉曲線一つならば積分結果が 0 になる定理なのでどっち周りでもいい. 二つ以上ある場合やコーシーの積分公式 §3.1 はそうはいかない.

(例えば  $D$  が単連結ならば  $C$  の内部は  $D$  に含まれる.)

Jordan 閉曲線  $C = C_0$  の内部に  $D$  の補集合の点 ( $f$  が正則でない点) が含まれている場合は, それらを全て内部に含むように  $n \in \mathbb{N}$  と互いに交わらない Jordan 閉曲線  $C_i, i = 1, \dots, n$ , を  $C$  の内部にとれば (即ち,  $C$  の内部で  $C_i, i = 1, \dots, n$ , の外部である領域  $W$  が  $D$  に含まれるならば),  $\sum_{i=0}^n \int_{C_i} f(z) dz = 0$  が成り立つ (積分の向きは  $W$  を左に見る向き, 即ち,  $C_0$  は反時計回り, 他は時計回り.)

[18]  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$  は  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} ds$  の何倍か? コーシーの積分定理を用いて答えよ.

(次のようにやってもよい.  $R > 0$  に対して, 積分路  $C(R)$  を次の (i) (ii) (iii) をつないだものとする. (i) 0 から  $R$  への線分, (ii) 原点中心半径  $R$  の円周上を  $R$  から  $Re^{\pi\sqrt{-1}/4}$  まで (45度), (iii)  $Re^{\pi\sqrt{-1}/4}$  から原点への線分. これに対して,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} \frac{1}{1+z^2} dz$  を考えよ. 円周上の積分の  $R \rightarrow \infty$  における振る舞いについては問 [14] を参照.)

正しく実行すれば,  $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$  という関係式を得るはずである. これを用いてもう一つの関係式を簡単化すると目標に至る.)

### 3 テーラー展開.

#### 3.1 コーシーの積分公式.

定理 (コーシーの積分公式 [1, 定理 4.1]). 単連結領域  $D \subset \mathbb{C}$  上の正則関数  $f$  と,  $D$  内の Jordan 閉曲線  $C$  (反時計回り) と  $C$  の内部にある  $z \in D$  に対して  $f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$ .

$f$  の正則性が保証されている領域  $D$  が単連結とは限らない場合でも,  $C$  の内部で  $C_i, i = 1, \dots, n$ , の外部である領域  $W$  が  $D$  に含まれるように  $n \in \mathbb{N}$  と互いに交わらない Jordan 閉曲線  $C_i, i = 1, \dots, n$ , を  $C$  の内部にとれば, そして,  $z \in W$  ならば,  $f(z) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_i} \frac{f(w)}{w-z} dw$  が成り立つ<sup>11</sup>

[19]  $f$  が原点を中心とする半径  $R > 0$  の円の周と内部を含む領域で正則で,  $z \in \mathbb{C}$  が  $|z| \neq R$  を満たす定点のとき, 以下の積分を計算せよ<sup>12</sup>.

(i)  $\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw$  (ii)  $\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^2-z^2} dw$   
 (iii) さらに  $R \neq 1$  のとき,  $\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-1)(w-z)} dw$

<sup>11</sup> (積分の向きは  $W$  を左に見る向き, 即ち,  $C_0$  は反時計回り, 他は時計回り. これを覚えるには往復の線分で  $C_i$  たちをつないで, 経路を一筆書きに直したときに大きく一周するように, と覚える.  $w-z$  の符号を覚えるには  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$  を思い出す.)

<sup>12</sup>[1, 演習問題 4 [1]] は積分路に誤植があるようなので注意.



[20]  $r > 0$  を定数とする． $\int_{|z|=r} x dz$  を (定義から直接ではなく)  $|z| = r$  上で  $z = \frac{1}{2}(z + \frac{r^2}{z})$  であることを用いて, 計算せよ．

### 3.2 べき級数 (整級数) .

関数項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  の各点収束, 一様収束, 広義一様収束は, 部分和  $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$  の関数列  $\{s_n\}$  の各点収束, 一様収束, 広義一様収束 (§A.5) で定義する．さらに, 各項の絶対値をとって作った級数が各点で収束するとき, 元の級数が絶対収束する, という<sup>13</sup>

整級数: 関数項級数の各項として最も簡単な  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$  をとったもの．

収束半径:  $z_0$  を中心として半径  $r$  の円板の内部を  $\text{Ball}(z_0, r)$  と書くことにする．整級数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  に対して, 次の性質を持つ  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  が決まる ([1, 定理 2.13]) .

$0 \leq r < R$  ならば  $\overline{\text{Ball}}(z_0, r)$  でこの整級数は一様絶対収束し,  $r > R$  ならばこの整級数が収束しない (発散する) ような  $z \in \overline{\text{Ball}}(z_0, r)$  が存在する ( $\bar{A}$  は  $A$  の閉包 . ここでは, 円周も含む, の意味) . この  $R$  をその整級数の収束半径と言う .

収束半径を求める公式には例えば次のようなものがある<sup>14</sup>

$$\text{ダランベールの公式: } \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

$$\text{コーシー・アダマール公式: } \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} .$$

整級数の正則性, 項別微分 ([1, 定理 2.16]): 次が知られている . 整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

の収束半径が  $R > 0$  であるとする . このとき,  $f$  は  $\text{Ball}(z_0, R)$  で正則であり, 微分は

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$  を満たす<sup>15</sup> . その収束半径も  $R$  である .

従って,  $f$  は何回でも微分可能で, 特に, その  $n$  階微分の  $z_0$  での値は  $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$  .

<sup>13</sup>各項の絶対値をとって作った関数項級数が一様収束する状況もよく出てくるが, 決まった単語を知らない . 以下では一様絶対収束と呼ぶことにする . [1, §2.4] で「絶対かつ一様収束」と書いているのは「各点で絶対収束し, 一様収束もする」という意味だけではなく, 一様絶対収束の意味までこめて使っている .

<sup>14</sup>等比級数と比べているだけ . 公比 1 のところは工夫が必要なため, 公式ですまそうとすると, 無数に作らなければならなくなる .

なお, [1, 定理 2.15] のすぐ下に  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k; k \geq n\}$  とあるのは  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_k; k \geq n\}$  の誤植 ( $n \rightarrow \infty$  の位置がおかしい) .

<sup>15</sup>[1, §2.5] では実関数の項別微分定理と直接の微分計算によっているが, 項別積分可能性と不定積分の微分 (§2.2) とべき関数の積分 問 [17] から証明できる .

[21]  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,  $f_n(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , および  $f(z) = 0$ , ( $z \in D$ ) で関数列  $\{f_n\}$  と関数  $f$  を定義するとき,  $f_n$  は  $f$  に広義一様収束するが一様収束しないことを証明せよ. 各点収束はするか?

[22] 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n \quad (\text{ただし, } p \text{ は実定数}) \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

### 3.3 初等関数 1 .

以下の関数が収束半径  $\infty$  の整級数で  $\mathbb{C}$  上に定義できる. いずれも実関数の対応する関数の複素数への延長になっていて, 正則である.

$$\text{指数関数: } \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$$\text{三角関数: } \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{および } \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

定義から直ちに

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(\sqrt{-1}z) + \exp(-\sqrt{-1}z)), \quad \sin(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\exp(\sqrt{-1}z) - \exp(-\sqrt{-1}z)).$$

[23]  $\exp(z)$ ,  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$  の収束半径が  $\infty$  であることを確かめよ.

[24]  $\exp(z)$ ,  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$  の微分を求めよ.

[25]  $z = x + \sqrt{-1}y$  とするとき  $\exp(z)$  および  $\sin z$  を, それぞれ実部と虚部分けて書け.

[26]  $u(x, y) = e^x \cos y$  を実部とする正則関数  $f(z)$  とその虚部  $v(x, y)$  を求めよ.  $x$  と  $y$  は  $z$  の実部と虚部とする.

[27] (1)  $\frac{1}{z}\sin z$  は原点で (従って  $\mathbb{C}$  上で) 正則であることを示せ .

(2)  $\frac{1}{z}(\exp(\sqrt{-1}z) - 1)$  は  $\mathbb{C}$  で正則であることを示せ .

[28] 関数項の級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n^2}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) の各点での収束・発散を調べよ .

[29]  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  を証明せよ .

(複素積分とみなしたら,  $\sin z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\exp(\sqrt{-1}z) - \exp(-\sqrt{-1}z))$  で三角関数を  $\exp$  に書き直すのがお決まり .

$\exp(\sqrt{-1}z)/z$  の複素積分を考えることになるが, (i) 遠方  $|z| \rightarrow \infty$  の処理のための積分路の工夫と, (ii) 原点に極があるので原点付近の積分路の工夫, を要する .

よく知られている方法は, (i) 半径  $\epsilon$  の上半円, (ii)  $[\epsilon, R]$ , (iii) 半径  $R$  の上半円, (iv)  $[-R, -\epsilon]$ , を結んだ積分路  $C(\epsilon, R)$  について  $\int_{C(\epsilon, R)} \exp(\sqrt{-1}z)/z dz$  を考えること . (iv) を積分変数変換して  $[\epsilon, R]$  の積分に直して (ii) と合わせると問題の実積分が見えてくる .

遠方の積分路の取り方は複素平面上遠方で  $o(|z|^{-1})$  で消える関数の  $(-\infty, \infty)$  での定積分のお約束の方法 .

内部で正則なので, コーシーの積分定理から  $\int_{C(\epsilon, R)} \exp(\sqrt{-1}z)/z dz = 0$  . 右辺が定数であることに注意して  $\epsilon \downarrow 0$  と  $R \rightarrow \infty$  を考える . 左辺を (i) (ii) (iii) (iv) に分けると元の実積分が (i) と (iii) の複素積分で書けることになる .

(i) の寄与の  $\epsilon \downarrow 0$  における振る舞いは次のように処理することができる . 小さい半円では  $g(z) = (\exp(\sqrt{-1}z) - 1)/z$  が正則関数なので連続 . よって, 例えば原点中心半径 1 の円内で最大値を持つので  $|g(z)| \leq M, |z| \leq 1$ , なる実数  $M$  がある . (i) は  $z = \epsilon e^{\sqrt{-1}\theta}$ ,  $\pi \geq \theta \geq 0$ , とパラメータ表示すれば,  $|dz| = \epsilon d\theta$  だから,

$$\left| \int_{(i)} g(z) dz \right| \leq \int_{(i)} |g(z)| |dz| \leq M\epsilon \int_0^{\pi} d\theta = \pi M\epsilon .$$

$\int_{(i)} dz/z$  は同じパラメータ表示で具体的に計算できる (今度は絶対値じゃないから符号に

注意!) から, 三角不等式から  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{(i)} \exp(\sqrt{-1}z)/z dz$  が求まる .

(iii) の寄与の  $R \rightarrow \infty$  における振る舞いは問 [14] とちょっと違うが, ていねいに考えれば怖くない . 積分変数を  $z = Re^{\sqrt{-1}\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , とパラメータ表示すると,  $\frac{dz}{z} = \sqrt{-1}d\theta$  および  $\exp(\sqrt{-1}z) = e^{-R\sin\theta} e^{\sqrt{-1}R\cos\theta}$  . 絶対値を上から評価すると,  $\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta =$

$2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$  の積分が出てくるが, ( $R \rightarrow \infty$  で消えそうだが, と見当をつけて, その方向に持っていく)  $m = \min_{[0, \pi/2]} \sin \theta / \theta > 0$  に注意すると,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-Rm\theta} d\theta \leq \int_0^{\infty} e^{-Rm\theta} d\theta = \frac{1}{Rm} . )$$

[30]  $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$  を証明せよ.  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (Gauss 積分) は用いてもよい.

(Fresnel 積分. おきまりの方法として, 問 [18] のヒントの積分路  $C(R)$  を用いて  $\int_{C(R)} \exp(-z^2) dz$  を考えてもよい. 円周上の積分の  $R \rightarrow \infty$  における振る舞いは 問 [14] とはちょっと違うが, 問 [29] の場合を参考にていねいに考えてみるのはよい練習だろう.)

[31]  $a$  を実定数とするとき, 実数上の積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$  を求めよ.

(お約束の積分路 問 [29] がある. しかも, この問題では原点が正則だから最初から  $\epsilon = 0$  である. 即ち, 積分路  $C(R)$  として, (i)  $[-R, R]$  と (ii) 半径  $R$  の上半円, をつないだものを考えればよい.)

積分路の内部に特異点があるところだけが 問 [29] より新しいが, コーシーの積分定理の代わりにコーシーの積分公式を使う. §4.2 まで勉強がすむと, 機械的に留数計算するようになる.

なお, この問題は 問 [29] と違って, 半円を下回りにしてもできるはず, と考えて検算に使うのはたいへんよい心がけではないだろうか (^\_^) 逆に 問 [29] では半円を下回りにできない理由を考え直すのは (まだ考えていなかったならば) さらによい心がけかもしれない (^\_^) (^\_^)

[32]  $a > 0$  を正定数とするとき, 実積分  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx$  を求めよ.

(被積分関数として  $e^{-z^2}$ , 積分路として  $x = 0, x = R, y = 0, y = a$  で囲まれた長方形を考えるとよい, らしい.)

### 3.4 正則関数の整級数展開 .

正則関数は次のような著しい性質があることが知られている .

べき級数展開 (テーラー展開) ([1, 定理 4.2, 系 4.3, 系 4.5]) : 領域  $D \subset \mathbb{C}$  上の正則関数  $f$  は  $D$  の任意の点  $z_0$  の周りで整級数展開 (Taylor 展開)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

を持ち, その収束半径は  $z_0$  と  $\partial D$  の距離  $d$  以上である . ここで,

$$a_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

$C$  は円周  $|z - z_0| = r$ , ただし,  $r$  は  $d$  未満の任意の正の実数<sup>16</sup> .

従って (整級数の正則性の定理から),  $f$  は何回でも微分可能で,  $n$  階導関数  $f^{(n)}$  は  $D$  で正則である . 特に,  $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  . 即ち  $f$  の  $n$  階微分に  $f$  に関する積分公式型の表示がある .

零点の孤立 : 領域  $D$  上で正則な関数  $f$  の各零点  $z_0$  に対して,  $f$  が恒等的に 0 であるような  $z_0$  の近傍か, または,  $U \setminus \{z_0\}$  で  $f$  が 0 にならない  $z_0$  の近傍  $U$  か, いずれかがとれる (べき級数展開の系 . 一致の定理を証明するための補題<sup>17</sup> .)

モレラの定理 ([1, 系 4.4]) : 領域  $D$  上の連続関数  $f$  が, 周及びその内部が  $D$  に含まれるどんな長方形  $R$  に対しても  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$  を満たすならば  $f$  は  $D$  で正則である<sup>18</sup> .

一致の定理 ([1, 定理 4.6]) : 領域  $D$  内の点  $z_0$  に収束する  $D$  の点列  $\{z_n\}$  に対して,  $D$  上で正則な 2 つの関数  $f$  と  $g$  が  $f(z_n) = g(z_n), n \in \mathbb{N}$ , を満たすならば,  $f$  と  $g$  は  $D$  上一致する .<sup>19</sup> .

特に, 領域  $D$  上正則な関数  $f$  が  $D$  上恒等的に 0 でなければ,  $f$  の零点は  $D$  に集積点を持たない .

コーシーの不等式 ([1, 系 4.5 注]) :  $D$  上で正則な関数  $f$  と  $z_0 \in D$  に対して内部と周が  $D$  に含まれる円  $|z - z_0| = r$  における  $f$  の最大値を  $M(r)$  とおく . このとき,  
 $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r), n \in \mathbb{Z}_+$  .

<sup>16</sup>整級数の正則性 (§3.2) の逆 . 積分公式以外に項別積分可能性または積分と極限の順序交換 (§2.2) が証明に本質的に効く .

<sup>17</sup>[1] にはこの位置づけの注意がありましたっけ? [1, 定理 4.6] との違いは local か global かの違い .

<sup>18</sup>コーシーの積分定理の逆 . 積分公式以外に不定積分の微分 (§2.2) が証明に本質的に効く . 定理の前提は, 長方形にする代わりに「 $\int_{z_0}^z f(z) dz$  が積分路に関係なく端点だけで決まるならば」と言い換えても同値 .

<sup>19</sup>[1, 定理 4.6] の証明は  $z_0$  を中心とする級数展開の収束半径内のみでの一致しか言えていない . 例えば [3, 定理 62 証明, §59 零点に関する注意] では,  $D$  で  $f(z_1) \neq 0$  ならば  $z_0$  と  $z_1$  をつないで,  $f(z) = 0$  から  $f(z) \neq 0$  に変わる点を  $z_2$  とするとき (連続性から  $z_0 < z_2 < z_1$ ), そこで零点の孤立と矛盾する . 領域の定義には連結性が含まれていることに注意 . 証明で  $D$  の連結性が効くが, このことはリーマン面の議論 §5 で重要になる .



## 4.1 ローラン展開 .

ローラン展開 :  $0 \leq r < R \leq \infty$  および  $z_0 \in \mathbb{C}$  に対して , 円環領域  $D = \{r < |z - z_0| < R\}$  で正則な関数  $f$  を考える .  $z \in D$  に対して  $D' = \{r' < |z - z_0| < R'\}$  が  $z \in D'$  となるように  $r < r' < R' < R$  を選ぶと ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

となる ( 右辺の二つの級数は  $D'$  で広義一様絶対収束する ) ことが知られている . ここで ,

$$a_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|w-z_0|=R'} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (n \geq 0),$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|w-z_0|=r'} f(w) (w-z_0)^{n-1} dw \quad (n > 0).$$

ローラン展開は一意的であることが知られている .

孤立特異点と留数 :  $f$  が  $z_0$  で正則でなく , かつ , ある  $R > 0$  がとれて  $0 < |z - z_0| < R$  で  $f$  が正則なとき ,  $z_0$  を  $f$  の孤立特異点という .  $f$  の  $z_0$  の周りのローラン展開で  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$  の部分を主要部という . 特に ,  $a_{-1}$  を  $f$  の  $z_0$  での留数 (residue) といい ,

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z-z_0|=r'} f(z) dz$$

と書く . 孤立特異点はその点の周りのローラン展開の主要部に関して 3 種類ある .

除去可能な特異点 : 主要部がない ( $a_{-n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$ ) .

$f$  が  $z_0$  の近傍で有界であることと  $z_0$  が除去可能な特異点であることは同値 ([1, 定理 5.1, 系 5.3]) .

極 : 主要部が有限個の項からなる .  $a_{-k} \neq 0, a_{-\ell} = 0, \ell > k$  , のとき  $z_0$  を  $k$  位の極という .

$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$  であることと  $z_0$  が極であることは同値 ([1, 系 5.3]) .

真性特異点 : 主要部が無限個の 0 でない項からなる .

任意の  $a \in \mathbb{C}$  に対して  $z_0$  に収束する点列  $\{z_n\}$  がとれて  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$  となることと  $z_0$  が真性特異点であることは同値 ([1, 定理 5.2, 系 5.3]) .

[36] 次の関数の特異点を全て見だし , それぞれを分類せよ .

(i)  $z(e^{1/z} - 1)$                       (ii)  $\cos(1/z)$                       (iii)  $\frac{\sin z}{z}$

[37]  $f(z) = e^{1/z}$  を  $z = 0$  の周りでローラン展開せよ .

## 4.2 留数計算 .

$z = z_0$  が  $f$  の  $k$  位の極であるとき ,

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) \right).$$

特に , 1 位の極ならば

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z)).$$

コーシーの積分公式を拡張した次の性質が知られていて , 定積分への応用に便利である . 留数定理 ([1, 定理 5.6]) . 関数  $f$  は領域  $D$  で極以外の特異点を持たないとする .  $C$  は周及び内部が  $D$  に含まれる単純閉曲線 (反時計回り) とし , しかも , 内部の  $f$  の極は有限個 , 周上には  $f$  の極を持たないとする . このとき ,  $C$  の内部にある  $f$  の極を  $z_1, \dots, z_n$  とおくと ,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; z_j).$$

[38] 次の関数の極とその位数とそこでの留数を求めよ .

(i)  $\frac{1}{1-z^2}$                       (ii)  $\frac{1}{(z-1)^2}$                       (iii)  $\frac{1}{\sin z}$

[39]  $z^2 \exp\left(\frac{1}{\sin z}\right)$  の  $z = \pi$  での孤立 (真性) 特異点の留数を求めよ .

[40]  $f$  が  $z_0$  で  $n$  位の極を持つとき ,  $\frac{f'}{f}$  は  $z_0$  で 1 位の極を持つことを示せ . 留数はいくらか?

[41]  $t$  が実定数のとき ,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=2} \frac{\exp(z t)}{z^2 + 1} dz \text{ を計算せよ .}$$

(留数定理を直接適用できる .)

[42] 実数上の積分  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin x} dx$  を求めよ . 但し ,  $a > 1$  は実定数とする .

(周期関数の 1 周期の積分のおきまりの方法として , 原点中心半径 1 の円を積分路にとって ,  $\int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z + \frac{1}{z})} dz$  を考えてもよい . 円周のパラメータ表示を偏角で表示すること ( $z = e^{\sqrt{-1}x}$ ) にすれば , 問題の積分が得られ , 他方でこの複素積分を留数定理で計算できる .)



[43]  $a > b > 0$  とするとき,  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2}$  を計算せよ.

[44]  $a > 0$  のとき, 実数上の積分  $\int_0^\infty \frac{1}{a + x^4} dx$  を求めよ.  
(偶関数であることと, 問 [31] の積分路  $C(R)$  を用いてもよい.)

[45]  $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2 + x^4}$  を計算せよ.

[46]  $a$  と  $b$  を正定数とするととき,  $\int_0^\infty \frac{dx}{(a + bx^2)^3}$  を計算せよ.

[47]  $a > 0$  とするとき,  $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^3}$  を計算せよ.

[48]  $n$  を自然数とするととき, 実数上の積分  $\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^4)^{n+1}} dx$  を求めよ.

(いきなり留数計算を試みるよりも, 問 [44] の両辺を  $a$  で微分したほうが簡単かもしれない.)

[49]  $a > 0$  を実数とする. このとき, 実数上の積分  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2}$  を求めよ.

[50] 実数上の積分  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$  を求めよ.

(ひょっとしたら, いきなり留数計算するよりも, 問 [31] の結果を利用することを考えたほうがいいかもしれない. 部分分数展開  $\frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 6}$  .)

[51] 実数上の積分  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$  を求めよ.

[52]  $a$  を正定数とするととき，実積分  $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$  を求めよ．

(三角関数のおさまりの扱い 問 [29] で  $\int \frac{\exp(\sqrt{-1}az)}{z^2+1} dz$  を考えてみるといいかもしれない.)

[53]  $a$  を正定数とするととき，実積分  $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2} dx$  を求めよ．

[54] 実積分  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}(\cos ax - \cos bx) dx$  を計算せよ．

(問 [52] が参考になるかもしれないが， $\exp(cz)/z^2$  は原点に特異点がある．おさまりの積分路は問 [29] .)

[55]  $a > 0$  とするととき， $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x(a^2+x^2)^3}$  を計算せよ．

[56]  $a$  を  $0 < \operatorname{Re} a < 1, 0 < \operatorname{Im} a < 1$ , を満たす複素定数とするととき， $\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ax)}{\exp(x)+1} dx$  を計算せよ．

(問 [31] の積分路が使えるという.)

[57]  $\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$  を証明せよ．

さらに， $\sin z = z \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$  を証明せよ．

( $\operatorname{Re} w = \pm R, \operatorname{Im} w = \pm R$  で囲まれた正方形を  $C(R)$  とおき， $\int_{C(R)} \frac{\cot w}{w-z} dw$  に対して留数定理を適用してもよい． $R \rightarrow \infty$  で積分が 0 になることを言うために，

$$\int_{C(R)} \frac{\cot w}{w-z} dw = \int_{C(R)} \frac{\cot w}{w} dw + z \int_{C(R)} \frac{\cot w}{w(w-z)} dw$$

として，右辺第 1 項は偶関数の積分であることに注意する．

後半は，前半の右辺が，極を含まない有界閉領域で一様収束することから， $0 \leq x < \pi$  に対して  $\left(\log \frac{\sin x}{x}\right)' = \cot x - \frac{1}{x}$  を項別積分すると，いいらしい．解析接続の一意性から  $\mathbb{C}$  での等式となる.)

## 5 解析接続 .

初等実関数論では (局所的な) 微分の性質だけで (大局的な) 関数は決まらない . 例えば高階導関数の連続性を全て仮定しても ,  $x \leq 0$  で 0 という関数は  $x > 0$  に 0 または  $e^{-1/x}$  という二つの (もちろん , 無数の) 「接続」が可能である . 複素関数論では正則性という微分の性質だけで (定義域のリーマン面のが決まるという意味も込めて) 関数が決まる , という著しい性質がある .

解析接続 : 領域  $D_1$  と  $D_2$  の共通部分  $D_1 \cap D_2$  が空でないとする .  $D_1$  で正則な関数  $f_1$  と  $D_2$  で正則な関数  $f_2$  があり ,  $D_1 \cap D_2$  で  $f_1$  と  $f_2$  が一致しているとき ,  $f_2$  は  $f_1$  の  $D_2$  への解析接続であるという . 一致の定理から , 解析接続は一意的である (  $f_2$  と異なる  $f_3$  が  $D_2$  上正則ならば ,  $D_1 \cap D_2$  で  $f_2 \neq f_3$  であり , 従って ,  $f_3$  は  $f_1$  に一致し得ない) . このとき ,  $f$  を  $D_1$  では  $f = f_1$  で ,  $D_2$  では  $f = f_2$  で , 定義すれば ,  $f$  は  $D_1 \cup D_2$  で正則で ,  $D_1$  上で  $f_1$  に一致する唯一の関数となる . このことを ,  $f_1$  を  $D_1 \cup D_2$  に解析接続して  $f$  を得る , などという言い方をする .

自然境界 : 一致の定理が保証するのは ,  $D_1 \cap D_2$  上で  $f_1 = f_2$  なる  $f_1$  と  $f_2$  があれば  $D_1 \cup D_2$  で一意的に関数が決まる , ということ (解析接続の一意性) であって , あるかどうか (存在) は分からない .

$D$  上定義された  $f$  が , 境界  $\partial D$  の全ての点で  $f$  またはその微分が ( $D$  内から近づいたとき収束し) ないならば ,  $D$  の外への解析接続は原理的に不可能である .

例 :  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$  ( $\partial D = \{|z|=1\}$  ,  $z^{N!} = 1$  ならば  $n \geq N$  で自明の発散級数) ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$  ( $\partial D = \{|z|=1\}$  ,  $z^n = 1$  に極) .

このとき  $\partial D$  を  $f$  の自然境界という .

リーマン面 (直感的導入) :  $f$  が  $D$  で正則で , 境界  $\partial D$  は  $C^1$  級とする . さらに ,  $\partial D$  上で  $f$  とその微分  $f'$  が収束する区間があれば ,  $\partial D$  の該当部分の点の近傍で正則になり ,  $D$  の外に  $f$  が解析接続されることが知られている . こうして解析接続した領域を  $D_2$  , 接続した関数を  $f_2$  とする .

$D \cap D_2$  が連結でない場合 (領域が一周して最初の領域に再度ぶつかる場合) に ,  $f_2 = f$  は保証されない . そこで , (i)  $D_2$  が  $D$  にぶつかる前に cut を入れ , 単連結領域に制限すればとりあえず解析接続の一意的存在が保たれる . (ii) 次に , cut のところで「別の複素平面」になめらかに乗り移ったと考える . ちょうど紙にはさみを入れて別の紙を張り合わせたと考える (複素多様体 , という概念で正当化される) .  $D_2$  はこの , 新しい複素平面上の領域として考える (どの面にいるのか分かるようなパラメータを用意しておく .  $\log z$  の説明などを参照 .)

元の複素平面でみると  $D \cap D_2$  の非連結成分で多価になって , 一価関数としての解析接続の存在が危機に瀕したが , 以上のように理解すれば , 一意存在が保証される . 現在では解析接続の存在をこの意味で理解する . このような「張り合わせた複素平面」は数学的に正当化されることが知られていて ,  $f$  のリーマン面とよぶ . これは教科書の範囲を超えるので , ここでは , 以上の直感的な説明と ,  $f$  の多価性を分類する記号的手段と理解するだけで満足することにする .

留数定理を考える場合，リーマン面の意味で閉じていなければ閉曲線とは言えないことに注意．そもそも，留数定理は内部が極だけの場合のみ証明されているから，cut(枝)の始点(分枝点)を内部に含む経路は通常は出てこない．これらの公式を導いた出発点に戻って，往復経路をとり，分枝点の周りの小さな円を付加するのがよい．

$\log z$ : (1)  $D$  を 1 を含み 0 を含まない単連結領域とするとき， $\log z = \int_1^z \frac{1}{w} dw$ ,  $z \in D$ ,  
で対数関数  $\log z$  を定義する．コーシーの定理から  $D$  で積分路によらないので  $\log z$  は  $D$  で定義され，正則になる．

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

(2) 正の実軸  $z = x > 0$  では実関数の  $\log x$  に一致する．

(3)  $\log z = \log |z| + \sqrt{-1} \arg z$  .

(積分路を 1 から  $|z|$  までの線分と， $|z|$  から  $z = |z|e^{\sqrt{-1} \arg z}$  までの弧とを，つないだものとする．)

(4) 項別積分の定理から，

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

( $\log z$  は  $z = 1$  の周りで正則で，特異点は 0 だけだから，収束半径 1 の整級数展開を持つはず．みやすくするため  $z$  を 1 だけずらして， $\log(1+z)$  の展開を考える．)

(5)  $\log z$  が正則な単連結領域として，たとえば， $D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg z < \pi\}$  がとれる．

( $D$  が単連結ならば  $\log z$  の一価性が保証される．定義で  $z = 0$  は含み得ないから，たとえば，負の実軸  $(-\infty, 0)$  に cut を入れる．)

(6) 積分による定義を用いて  $(-\infty, 0)$  を挟んで上から解析接続した場合と下から解析接続した場合の一致不一致を検討すると，コーシーの積分公式から両者は  $2\pi\sqrt{-1}\text{Res}(z^{-1}; 0) = 2\pi\sqrt{-1}$  ずれる．

上から接続したときは  $\arg z \geq \pi$  でパラメトライズされた複素平面，下から接続したときは  $\arg z \leq -\pi$  でパラメトライズされた複素平面，にそれぞれ乗り移ったと考えると，解析接続が  $\int_C \frac{1}{w} dw$  によって可能であり，(リーマン面上で) 一価性が保証され，

$$\log z = \log |z| + \sqrt{-1} \arg z$$

も成り立つ．積分路が原点を回る毎に別のリーマン面に乗り移るが，原点から見た偏角  $\arg z$  でパラメトライズできる． $\mathbb{C}$  に本来あった  $\Delta \arg z = 2\pi$  の不定性をリーマン面(関数の枝)のパラメトライズに使ったとみてよい．

$\log z$  は原点 0 を除いて正則．

(7)  $\exp(\log z) = \exp(\log |z| + \sqrt{-1} \arg z) = |z|e^{\sqrt{-1} \arg z} = z$  .

$x^a$ :  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $z^a = \exp(a \log z)$  と定義する．一般には  $z \neq 0$  で ( $\log z$  と同じ無限分岐のリーマン面で) 正則．

$\sqrt{z}$ :  $a = n$  が整数ならば，0 を一周したときの  $\log z$  のずれ  $2\pi$  は  $z^a$  には効かない．このとき，普通の  $\mathbb{C}$  上の正則関数  $z^n$  である (0 でも正則) ．

$a = q/p$  ( $p \neq 0, (q, p) = 1$ ) ならば, 原点の周りに  $p$  周すると元の関数に一致. リーマン面は  $p$  枚の張り合わせ. 原点のみが特異点.

$$(z^{1/p})^p = (\exp(p^{-1} \log z)) \times \cdots = \exp(\log z) = z.$$

$\sqrt{z}$  は 2 枚の複素平面の張り合わせ (例えば  $\sqrt{1} = \pm 1$  は違う面または枝の値と理解できる).

## 5.1 初等関数 2 .

[58]  $\sqrt{z-1}$  のリーマン面 (一価正則になる定義域) の形を cut の入った 2 枚の複素平面の張り合わせとして説明せよ. また,  $\arg(z-1)$  をパラメータにとってそれを記述せよ.

[59]  $\sqrt{(z-1)(z-2)}$  のリーマン面の形を cut の入った 2 枚の複素平面の張り合わせとして説明せよ. (どういう cut を入れればよいか?) また, 主要な点での  $\arg(z-1), \arg(z-2)$  を示すことで, 各々の面を記述せよ.

[60]  $C(r)$  を円周  $|z| = r$  とする.  $0 < r < 1$  のとき  $\int_{C(r)} \log(1-z) \frac{dz}{z}$  の実部を考えることで,  $\int_0^\pi \log(1-2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0$  を証明せよ. また,  $r > 1$  の場合  $r' = 1/r$  とおくことで,  $\int_0^\pi \log(1-2r \cos \theta + r^2) d\theta = 2\pi \log r$  を証明せよ.  $r = 1$  の場合,  $r$  についての連続性から,  $\int_0^{\pi/2} \log \sin \theta d\theta = -\frac{\pi}{2} \log 2$  を証明せよ.

[61]  $z_1, z_2 \neq 0$  かつ  $\arg z_1, \arg z_2 \in (-\pi, \pi)$  とする.

等式  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$  はいかなるときに正しくいかなるとき正しくないか. 正しい場合と正しくない場合一つずつ例示して説明せよ.

[62]  $\log z$  は  $0 \leq \arg z < 2\pi$  ( $0 \leq \text{Im} \log z < 2\pi$ ) で考えるとし,  $C(\epsilon, R, \delta)$  は, (i)  $\epsilon$  から  $R$  までの線分, (ii) 原点中心半径  $R$  の円 (反時計回り), (iii)  $R$  から  $\epsilon$  までの線分, (iv) 原点中心半径  $\epsilon$  の円 (時計回り), をつないだものとする. このとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{C(\epsilon, R, \delta)} \frac{\log z}{z^3 + 1} dz$$

を, 留数定理で計算したものと, 積分路を分けてそれぞれ適当にパラメータ表示したものを比べることで, 実積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

を求めよ .

( 求めることができたなら , 次のことを確認せよ . 考察の対象にした複素積分と求める実積分を比べると  $\log$  が一つ減っているが , どうして両者に関係がついたのか ? )

[63] 実積分  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^5}$  を求めよ .

( 問 [62] を参考にしてもよい . )

[64] 実積分  $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3+1} dx$  を求めよ .

[65] 実積分  $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$  を求めよ .

[66] 実積分  $\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2+1} dx$  を求めよ .

[67]  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$  を計算せよ .

( 問 [62] の積分路で問題の積分を考えてみてもよい . )

[68]  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$  を計算せよ .

( Cut が  $[-1, 1]$  に入ることに注意 . 積分路として , (i) 中心  $1$  , 半径  $\epsilon$  の円周 ( $\pi \geq \arg(z-1) \geq -\pi$ ) , (ii)  $\epsilon$  から  $-R$  までの線分 ( $-1$  を下によけて) , (iii) 半径  $R$  の円周 (反時計回り) , (iv)  $-R$  から  $\epsilon$  までの線分 ( $-1$  を上によけて) , を結んだ閉曲線をとるといいらしい .  $\arg(1-z)$  ,  $\arg(1+z)$  に注意して実軸上の積分の打ち消しの有無を慎重に確認する . )

[69]  $a > b > 0$  とするとき ,  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(a+bx)}$  を計算せよ .

[70]  $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす定数とするとき ,  $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$  を証明せよ .

( 問 [62] の積分路で ,  $\frac{z^{a-1}}{1+z}$  を積分してみてもよい . )

## 6 その他の話題 .

[71] この演習問題集で扱わなかった初等事項には，例えば以下のものがある<sup>20</sup> .

- (1) Abel の定理
- (2) Tauber 型定理
- (3) Liouville(リュウビル) の定理
- (4) 代数学の基本定理
- (5) 最大値の原理
- (6) 正規族
- (7) 等角写像
- (8) 偏角原理
- (9) Riemann 面

教科書，参考書等によって以上について定義や重要な性質を調べて報告せよ .

## A 準備 .

### A.1 複素数 .

$\mathbb{C}$  は，集合  $\mathbb{R}^2$  に，よく知られた四則演算が入っている体 . 体として  $\mathbb{R}$  の拡張になっている .

演算規則を忘れないために  $\mathbb{R}^2$  と書く代わりに  $\mathbb{C}$  と書き， $z = (x, y)$  と書く代わりに  $z = x + \sqrt{-1}y$  と書く .

定義から導かれること : 四則演算と複素共役演算の交換，実部，虚部，絶対値を  $z$  と  $\bar{z}$  で表すこと .  $|z|$  は  $z \in \mathbb{R}^2$  のユークリッド距離 (絶対値) と同じ . 三角不等式 .

複素平面 :  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  を平面と同一視したもの .

極座標表示 (と加法定理) から，

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \\ \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|}, \quad \arg \frac{1}{z} = -\arg z, \end{aligned}$$

ドモアブル (de Moivre) の公式  $z^n = r^n (\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta)$ .

収束および極限は  $\mathbb{R}^2$  のそれで定義 (複素数列  $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の収束  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$  で定義 .) コーシー列も同様に  $\mathbb{R}^2$  のコーシー列として定義される .  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

の収束は部分和の作る数列の収束で定義 .  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が絶対収束するとは  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  となること .

実数の場合の対応する性質によって以下が成り立つ .

---

<sup>20</sup>Welcome to the 2nd stage!

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束すれば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  .
- (2) コーシー列であることは (ある複素数に) 収束するための必要十分条件 .
- (3) 絶対収束する級数は収束する .
- (4) 絶対収束する級数は項の順序を自由に (無限に) 入れ替えても極限は変わらない .
- (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$  が絶対収束するとき,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$  も絶対収束して極限は  $\alpha\beta$  に等しい .

## A.2 位相 .

$\mathbb{C}$  の位相は  $|\cdot|$  が定める位相, 即ち,  $\mathbb{R}^2$  (平面) の位相 (既に収束が  $|\cdot|$  で定義されているので, その収束が定める位相といってもよい.)

特に, 集合  $D \subset \mathbb{C}$  と点  $z \in \mathbb{C}$  の関係について [2, 14B,N,O], [1, §2.1.1] .

内点, 内部  $D^\circ$ , 外点 (補集合の内点), 外部  $(D^c)^\circ$ , 境界点 (内点でも外点でもない点), 境界  $\partial D$ . 孤立点 (内点に由来しないが, よく使う概念) .

位相的に特別重要な集合: 開集合 ( $D = D^\circ$ ), 閉集合 ( $D^c = (D^c)^\circ$ ) .

集積点: [1] の定義では,  $D$  内の点は (孤立点でも) 全て集積点になっているが, 以下, 孤立点は除いて, 「点  $c$  と集合  $E$  が与えられたとき,  $r > 0$  をどのように小さくとっても  $\Delta(c, r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset$ 」であるときに  $c$  を  $E$  の集積点という<sup>21</sup> .

$D$  の外の点でも集積点になりうる .

導集合 (集積点全てからなる集合), 閉包  $\bar{D}$  (元の集合と導集合の和集合) .

集合  $D$  がコンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限個を取り出して  $D$  の被覆とできること .

集合  $D$  に関して以下のことが知られている (位相と集合に関する講義にゆだねるが, 最後の性質を除けば定義から自力で導けるであろう) .

- (1)  $z \in \mathbb{C}$  について,  $z$  が  $D$  の集積点であることと  $z \in \overline{D \setminus \{z\}}$  となることは同値 .
- (2)  $\bar{D} = ((D^c)^\circ)^c$  ,
- (3) 孤立点の集合は元の集合のうち導集合に入っていない点の集合に一致 .
- (4)  $\partial D = \bar{D} \cap \overline{D^c}$  .
- (5)  $D^\circ = D \setminus \partial D$  .
- (6)  $(D^c)^\circ = \bar{D}^c = D^c \setminus \partial D$
- (7)  $D$  が閉集合であることと  $D = \bar{D}$  は同値 (自力で証明を試みるならば, 中間段階として,  $D$  の任意の収束する点列の極限が  $D$  に入ることと同値であることを示してもよい) .
- (8)  $D$  がコンパクトであることの必要十分条件は有界閉集合であること (ボルツァノワイエルシュトラウスの定理) .

$D \subset \mathbb{C}$  の部分集合  $S \subset D$  が ( $D$  に) 相対的な開集合 ( $D$  の開集合) とは,  $\mathbb{C}$  の開集合  $O$  が存在して  $S = D \cap O$  と書けるときを言う.  $D \setminus S$  が  $D$  の開集合のとき  $S$  を  $D$  の

<sup>21</sup>[1, §2.1.1] の集積点の定義は通常との定義と異なるので使わない. [1, 20 ページ -10 行目] を  $\Delta(c, r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset$  としたものがここで採用する定義 .



閉集合という<sup>22</sup> .

$D$  が連結とは,  $D$  の空でない開集合  $A, B$  で  $D = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  なるものがないこと. 連結な開集合を領域という<sup>23</sup> .

以下の事実も認める (必要なら [1, §2.1] を参照) .

- 領域  $D$  の空でない部分集合  $A$  が  $D$  の閉集合かつ開集合ならば  $D = A$  .
- 領域  $D$  の任意の 2 点を  $D$  の折れ線で結べる .

### A.3 関数の連続性 .

(実数上の) 微積分学と同様に関数の極限や連続性が定義される . 詳しくは該当の講義を思い出して頂きたい .

集合  $D$  上で定義された関数  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  と  $a \in \overline{D}$  に対して .

$z \rightarrow a$  のとき  $f$  が極限值  $A$  を持つとは ,

$$(\forall \epsilon > 0) \exists \delta > 0; 0 < |z - a| < \delta, z \in D, \Rightarrow |f(z) - A| < \epsilon,$$

が成り立つことをいい,  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  と書く<sup>24</sup> .

さらに  $a \in D$  ならば  $f(a)$  も存在する . このとき,  $f$  が  $a$  で連続とは  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$  となることをいう<sup>25</sup> .

$f$  が  $D$  の各点で連続なとき  $f$  は  $D$  で連続であるという .

連続性の定義において,  $\delta$  の取り方が,  $D$  の点によって共通にとれるとき ( $\epsilon$  だけで決まり,  $a$  によらないようにできるとき),  $f$  は  $D$  で一様連続であるという .

次の事実を認める . コンパクト集合上で連続な関数はそこで一様連続である ([1, §2.1.2]) .

### A.4 曲線の長さ .

曲線に関する定義は  $\mathbb{R}^2$  の上の曲線に関する定義と同様である .

$\mathbb{C}$  上の曲線とは, 閉区間  $[a, b]$  から  $\mathbb{C}$  への連続写像 (の像) のこと (即ち, その曲線のパラメータ表示が連続関数である [2, 87B] ことをもって曲線とよぶことにする) . 特に  $a$  での値と  $b$  での値 ( $\mathbb{C}$  上の点) が等しいとき閉曲線 . さらに写像が 1 対 1 のとき単純閉曲線または Jordan 閉曲線 .

写像が  $C^r$  級 ( $r$  階微分可能で  $r$  階導関数が連続) のとき,  $C^r$  級曲線 . 有限個の点を除いて  $C^r$  級するとき, 区分的に  $C^r$  級 . 有限個の点を除いて 1 次式するとき, 折れ線 .

次の事実 (Jordan の閉曲線定理) を認める . 「 $\mathbb{C}$  の Jordan 閉曲線  $C$  に対して,  $C^c$  は 2 つの連結成分からなる .」有界な連結成分を  $C$  の内部, 非有界な成分を外部という . 以後, この講義では内部と外部についてこれ以上こだわらず, 図形による直感を信じることにする .

<sup>22</sup>[1, 21 ページ 3 行目] は補集合の意味が曖昧 . 注意 .

<sup>23</sup>[1, 21 ページ 6 行目] は領域の定義が抜けている . 注意 .

<sup>24</sup>[1, 22 ページ 3 行目] では  $a \in D$ , [1, 22 ページ 4 行目] では単に  $|z - a| < \delta$  となっているが,  $a$  が定義域に入っていないなくても関数の極限を考えることができるし, むしろ微分を定義するときなど, 定義域に入っていないほうが普通なので, 私は  $z \neq a$  を明示する . また  $a \in \overline{D}$  として,  $a \notin D$  でも構わないこととする . [1] の定義はここではとらない .

<sup>25</sup>このときはもちろん上の注釈は無駄になるが, 上の注釈は微分のところで効いてくる .

$\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  で表される曲線  $C$  の長さ  $L(C)$  を,  $L(C) = \sup_{\Delta} \sum_{j=1}^n |\phi(t_j) - \phi(t_{j+1})|$  で

定義する.  $\Delta$  は  $[a, b]$  の分割全体を動く.

次の事実を認める. なめらか ( $C^1$  級) な曲線では

$$L(C) = \int_a^b |\phi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\operatorname{Re}\phi)'(t)^2 + (\operatorname{Im}\phi)'(t)^2} dt.$$

## A.5 関数列の収束.

領域  $D \subset \mathbb{C}$  上で定義された関数の列  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  と関数  $f$  についての収束の概念が複数あることは,  $\mathbb{R}^2$  上の実関数列の場合と全く同様である.

各点収束:  $\{f_n\}$  が  $f$  に  $D$  で各点収束するとは, 全ての  $z \in D$  に対して複素数列  $\{f_n(z)\}$  が複素数  $f(z)$  に収束すること.

一様収束:  $\{f_n\}$  が  $f$  に  $D$  で一様収束するとは,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_D = 0$  となることを言う. ここで, 集合  $E$  上の関数  $g$  に対して  $\|g\|_E = \sup_{z \in E} |g(z)|$  とおいた.

広義一様収束:  $\{f_n\}$  が  $f$  に  $D$  で広義一様収束するとは,  $D$  内の任意のコンパクト集合 (§A.2) 上で  $f_n$  が  $f$  に一様収束すること ( $D$  がコンパクトならば広義一様収束と一様収束は同値. そうでなければ, 広義一様収束しても一様収束するとは限らない.)

次のことが知られている.

[1, 定理 2.9]:  $D$  上の関数列  $\{f_n\}$  が  $D$  上一様収束することと

$$(\forall \epsilon > 0) \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_D < \epsilon,$$

は同値.

[1, 定理 2.10]: 連続関数の広義一様収束極限は連続関数である.

## 参考文献

- [1] 志賀啓成, 複素解析学 I - 基礎理論 -, 培風館, 数学レクチャーノート [入門編 5], 1997.
- [2] 日本数学会編, 岩波数学辞典第 3 版, 岩波書店, 1985.
- [3] 高木貞治, 解析概論, 岩波書店, 第 5 章.
- [4] J. Mathews, R. L. Walker, Mathematical methods of physics, 2nd ed, Benjamin, 1973.
- [5] 松本耕二, 関数論 (2000 年度後期) 試験問題, 2001.02.07.