数学基礎Ｖ　第１回試験について

理学部(数理学科)　火曜１限　担当：服部哲弥

2001/05/23

6/12 (火曜) 通常の講義時間内 08:45–10:15 に通常の講義室 35 で第１回試験を行う．持ち込みなし．

なお，6/5 は出張のため休講とする．

試験範囲は，配布した演習問題集の §2 「正則関数」(講義の §1) に関する講義範囲および演習問題集の問題全部，を原則とするが，特に，以下が予想される．

(i) レポート問題から２題
(ii) 演習問題集のレポート問題以外の問題から１題

なお，以上の予想は諸君の勉強の便宜のために発表した．裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって予告なしに変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで当該の講義と演習問題集の範囲全部である．

不可抗力による試験欠席の場合は，文書による証明を服部まで提出すること．このとき，何らかの対処が妥当と判断される場合でも，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため，単位取得最低点に相当する点を上限とする．

間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

追記

レポートの中に第１回第２回ともそれぞれ１件ずつ名前のないものがあった.（それぞれ別の人のようにみえる.）心当たりのある人は至急申し出てほしい．レポートは講義中に返却している．ＴＡ（日向君）による模範答案も同時に配布しているので，レポート提出の確認の意味からも勉強上の資料受領の意味からも必ず受け取ること．

なお，レポートは初回に指定したようにＡ４の用紙で提出すること．Ｂ５（ノートの大きさ）だと小さいために紛れる危険があり，枚数のチェックで困難を生じる．

問い合わせ先：`hattori@math.nagoya-u.ac.jp` 服部哲弥

数学基礎V　第１回試験

2001/ 6/12 服部哲弥

問１，問２，問３ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

問 1 (35).　$r > 0$ に対して C_r を中心 $a \in \mathbb{C}$ 半径 $r > 0$ の円を反時計回りする複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線，また，n を非負整数とするとき，

$$\int_{C_r} (z-a)^n \, dz \quad \text{および} \quad \int_{C_r} \frac{1}{(z-a)^n} \, dz$$

を計算せよ．

問 2 (35).　正定数 M, δ, R_0 があって，$|z| > R_0$ で定義された複素関数 f が定義域上で $|f(z)| \leq M|z|^{-1-\delta}$ を満たすならば，

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{|z|=R} f(z) \, dz \right| = 0$$

となることを証明せよ．

問 3 (30).　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx$ は $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx$ の何倍か？コーシーの積分定理を用いて答えよ．

数学基礎V　第1回試験　**略解**　　　　2000/ 6/13 服部哲弥

問1 (35). 　$r>0$ に対して C_r を中心 a 半径 $r>0$ の円を反時計回りする積分路，また， n を非負整数とするとき，$\int_{C_r}(z-a)^n\,dz$ および $\int_{C_r}\frac{1}{(z-a)^n}\,dz$ を計算せよ．

積分路 C_r のパラメータ表示として，$z=z(\theta)=a+re^{\sqrt{-1}\theta}=a+r\cos\theta+\sqrt{-1}r\sin\theta$, θ: $0\to 2\pi$, をとると， $z'(\theta)=\sqrt{-1}re^{\sqrt{-1}\theta}$．$n+1>0$ に注意すると，

$$\int_{C_r}(z-a)^n\,dz=\sqrt{-1}r^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{\sqrt{-1}(n+1)\theta}\,d\theta=\frac{r^{n+1}}{n+1}\,e^{\sqrt{-1}(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0\,.$$

また，$n\neq 1$ のとき，同様に $\displaystyle\int_{C_r}\frac{1}{(z-a)^n}\,dz=\sqrt{-1}r^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{\sqrt{-1}(-n+1)\theta}\,d\theta=0\,.$

$n=1$ のときは，$\displaystyle\int_{C_r}\frac{1}{(z-a)^n}\,dz=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}1\,d\theta=2\pi\sqrt{-1}\,.$

問2 (35). 　正定数 $M,\,\delta,\,R_0$ があって，$|z|>R_0$ で定義された複素関数 f が定義域上で $|f(z)|\le M|z|^{-1-\delta}$ を満たすならば，$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R}f(z)\,dz\right|=0$ となることを証明せよ．

$|z|=R$ のパラメータ表示として $z=Re^{\sqrt{-1}\theta}$, θ: $0\to 2\pi$, をとると，$R\ge R_0$ のとき，

$$\left|\int_{|z|=R}f(z)\,dz\right|=\left|R\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}f(Re^{\sqrt{-1}\theta})e^{\sqrt{-1}\theta}\,d\theta\right|\le R\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{\sqrt{-1}\theta})\right|\,d\theta\le 2\pi MR^{-\delta}.$$

$\delta>0$ より， $R\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので，挟み撃ちの原理から主張を得る．

問3 (30). 　$\int_0^\infty\frac{1}{1+x^4}\,dx$ は $\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx$ の何倍か？コーシーの積分定理を用いて答えよ．

$R>0$ に対して，積分路 $C(R)$ を次の $C_1(R)$, $C_2(R)$, $C_3(R)$ をつないだものとする．$C_1(R)$: 0 から R への線分，$C_2(R)$: 原点中心半径 R の円周上を R から $Re^{\pi\sqrt{-1}/4}$ まで (45 度)，$C_3(R)$: $Re^{\pi\sqrt{-1}/4}$ から原点への線分．これに対して，

$$\int_{C(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz=\int_{C_1(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz+\int_{C_2(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz+\int_{C_3(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz$$

を考える．被積分関数は有理式なので分母の零点を除けば正則．分母の零点は $z=\pm\sqrt{-1}$ なので C の外部である．即ち C の内部で被積分関数は正則．よってコーシーの積分定理から左辺は 0．よって，右辺の各積分路のパラメータ表示を C_1: $z=x$, x: $0\to R$, C_3: $z=xe^{\sqrt{-1}\pi/4}$, x: $R\to 0$, と選ぶと，

$$0=\int_0^R\frac{dx}{1+x^2}+\int_{C_2(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz+e^{\sqrt{-1}\pi/4}\int_R^0\frac{dx}{1+\sqrt{-1}x^2}$$

$C_2(R)$ のパラメータ表示を $z=Re^{\sqrt{-1}\theta}$, θ: $0\to\pi/4$, と選ぶと， $R>1$ のとき，

$$\left|\int_{C_2(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz\right|=\left|\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{-1}Re^{\sqrt{-1}\theta}}{1+R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}}\,d\theta\right|\le\int_0^{\pi/4}\frac{|\sqrt{-1}Re^{\sqrt{-1}\theta}|}{|1+R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}|}\,d\theta$$
$$\le\int_0^{\pi/4}\frac{R}{|R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}|-1}\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{R}{R^2-1}\,d\theta=\frac{R\pi}{4(R^2-1)}$$

から，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2(R)}\frac{1}{1+z^2}\,dz=0$．よって，$\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{1-\sqrt{-1}x^2}{1+x^4}\,dx$．両辺の虚部をとると $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x^4}\,dx=\int_0^\infty\frac{1}{1+x^4}\,dx$．これを用いて実部から得られる式を簡単化すると，$\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を得る．