数学基礎Ｖ　第２回試験

2001/ 9/11 服部哲弥

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

1 (30). $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

2 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

3 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{-1}x}}{x^2+1}\,dx$ を，複素積分を用いて求めよ（分子指数部の符号を意識していることが明確な答案にすること）.

4 (30). $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3+1}\,dx$ を，複素積分を利用して求めよ.

数学基礎 V　第 2 回試験　**略解**　　　　2001/ 9/12 服部哲弥

1 (30). $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin x}\,dx$ を求めよ．

閉曲線 $C:\ z=e^{\sqrt{-1}x},\ 0\le x\le 2\pi,$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{(5+4\sin z)\sqrt{-1}z}$ を考えると，複素積分のパラメータ表示と留数定理 (またはコーシーの積分定理)，および，$\sin z=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}(z-z^{-1})$ から

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+4\sin x}=\int_C\frac{1}{5+4\sin z}\frac{dz}{\sqrt{-1}z}=\int_C\frac{dz}{2z^2+5\sqrt{-1}z-2}$$
$$=2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{2(z+\frac{1}{2}\sqrt{-1})(z+2\sqrt{-1})}\,;\ -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right]=\frac{2\pi}{3}.$$

2 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

曲線 $C_1:\ z=x,\ -R\le x\le R,$ と曲線 $C_2:\ z=Re^{\sqrt{-1}\theta},\ 0\le\theta\le\pi,$ をつないだ閉曲線 $C=C(R)=C_1+C_2$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C(R)}\frac{dz}{z^2+1}$ を考えると，複素積分のパラメータ表示と留数定理 (またはコーシーの積分定理) から，$R>1$ のとき

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_0^{\pi}\frac{R\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}d\theta}{R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+1}$$
$$=\int_{C(R)}\frac{dz}{z^2+1}=2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-\sqrt{-1})(z+\sqrt{-1})}\,;\ \sqrt{-1}\right]=\pi.$$

左辺の第 2 項を $X(R)$ とおく．$R>1$ のとき，$|R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+1|\ge R^2-1$ であることに注意すると，$\displaystyle|X(R)|\le\frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi}d\theta\le\frac{\pi R}{R^2-1}$ となるので $\displaystyle\lim_{R\to\infty}X(R)=0$．よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}=\pi.$

3 (30). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{-1}x}}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

曲線 $C_1:\ z=x,\ R\ge x\ge -R,$ と曲線 $C_2:\ z=Re^{\sqrt{-1}\theta},\ \pi\le\theta\le 2\pi,$ をつないだ閉曲線 $C=C(R)=C_1+C_2$ に対して複素積分 $\displaystyle\int_{C(R)}\frac{e^{-\sqrt{-1}z}dz}{z^2+1}$ を考えると，複素積分のパラメータ表示と留数定理 (またはコーシーの積分定理) から，$R>1$ のとき

$$\int_R^{-R}\frac{e^{-\sqrt{-1}x}dx}{x^2+1}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-\sqrt{-1}R\cos\theta}e^{R\sin\theta}}{R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+1}R\sqrt{-1}e^{-\sqrt{-1}\theta}d\theta$$
$$=\int_{C(R)}\frac{e^{-\sqrt{-1}z}}{z^2+1}dz=2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-\sqrt{-1}z}}{(z-\sqrt{-1})(z+\sqrt{-1})}\,;\ -\sqrt{-1}\right]=-\pi e^{-1}.$$

左辺の第 2 項を $X(R)$ とおく．$R>1$ のとき，$|R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+1|\ge R^2-1$ と積分路上 ($\pi\le\theta\le 2\pi$ だから) $\sin\theta\le 0$ であることに注意すると，

$$|X(R)|\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{R\sin\theta}}{|R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+1|}R\,d\theta\le\frac{\pi R}{R^2-1}$$

となるので $\displaystyle\lim_{R\to\infty}X(R)=0$．よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{-1}x}dx}{x^2+1}=-\lim_{R\to\infty}\int_R^{-R}\frac{e^{-\sqrt{-1}x}dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{e}.$

4 (30). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}\,dx$ を求めよ.

曲線 $C_1:\ z=x,\ \epsilon \le x \le R,\ C_2:\ z=Re^{\sqrt{-1}\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ C_3:\ z=x,\ R\ge x\ge\epsilon,$ $C_4:\ z=\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta},\ 2\pi\ge\theta\ge 0,$ をつないだ閉曲線 $C=C(\epsilon,R)=C_1+C_2+C_3+C_4$ に対して,

$$\int_{C(\epsilon,R)} \frac{(\log z)^2}{z^3+1}\,dz = \int_\epsilon^R \frac{(\log x)^2}{x^3+1}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(\log R+\sqrt{-1}\theta)^2}{R^3e^{3\sqrt{-1}\theta}+1}\,R\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}\,d\theta$$
$$-\int_\epsilon^R \frac{(\log x+2\pi\sqrt{-1})^2}{x^3+1}\,dx - \int_0^{2\pi}\frac{(\log\epsilon+\sqrt{-1}\theta)^2}{\epsilon^3e^{3\sqrt{-1}\theta}+1}\,\epsilon\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}\,d\theta$$
$$=\int_\epsilon^R \frac{-4\pi\sqrt{-1}\log x+4\pi^2}{x^3+1}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(\log R+\sqrt{-1}\theta)^2}{R^3e^{3\sqrt{-1}\theta}+1}\,R\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}\,d\theta$$
$$-\int_0^{2\pi}\frac{(\log\epsilon+\sqrt{-1}\theta)^2}{\epsilon^3e^{3\sqrt{-1}\theta}+1}\,\epsilon\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}\,d\theta$$

右辺第 2,3 項の和を $X(\epsilon,R)$ とおくと，$|(a+b\sqrt{-1})^2| = |a+b\sqrt{-1}|^2 = a^2+b^2,\ a,b\in\mathbb{R},$ および $R>1$ のとき $|(Re^{\sqrt{-1}\theta})^3+1|\ge R^3-1$，$0<\epsilon<1$ のとき $|(\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta})^3+1|\ge 1-\epsilon^3$ に注意すると， $0<\epsilon<1<R$ のとき,

$$|X(\epsilon,R)| \le \int_0^{2\pi}\frac{(\log R)^2+\theta^2}{R^3-1}R\,d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{(\log\epsilon)^2+\theta^2}{1-\epsilon^3}\epsilon\,d\theta$$
$$\le 2\pi R\frac{(\log R)^2+4\pi^2}{R^3-1} + 2\pi\epsilon\frac{(\log\epsilon)^2+4\pi^2}{1-\epsilon^3}.$$

よって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\downarrow 0} X(\epsilon,R)=0$ となる．一方， $w=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-1}\sqrt{3})$ とおくと留数定理から，$0<\epsilon<1<R$ のとき,

$$\int_{C(\epsilon,R)}\frac{(\log z)^2}{z^3+1}\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^3+1};\ -1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^3+1};\ -w\right]\right.$$
$$\left.+\mathrm{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^3+1};\ -w^2\right]\right) = \frac{8\pi^3}{9}\sqrt{3}+\frac{8\pi^3}{27}\sqrt{-1}.$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{-4\pi\sqrt{-1}\log x+4\pi^2}{x^3+1}\,dx = \frac{8\pi^3}{9}\sqrt{3}+\frac{8\pi^3}{27}\sqrt{-1}$$

となるから，虚部を取ると $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}\,dx = -\frac{2\pi^2}{27}.$

別解. この問題は次のようにしたほうが，素朴にできる．被積分関数として（上では $\dfrac{(\log z)^2}{z^3+1}$ を取ったが） $\dfrac{\log z}{z^3+1}$ を取る．積分路としては（上では実軸正の部分を挟む巧妙な積分路を取ったが），曲線 $C_1:\ z=x,\ \epsilon\le x\le R,\ C_2:\ z=Re^{\sqrt{-1}\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi/3,$ $C_3:\ z=xe^{2\pi\sqrt{-1}/3},\ R\ge x\ge\epsilon,\ C_4:\ z=\epsilon e^{\sqrt{-1}\theta},\ 2\pi/3\ge\theta\ge 0,$ をつないだ閉曲線 $C=C(\epsilon,R)=C_1+C_2+C_3+C_4$ を取る.

あとは（上と同様に）通常の留数定理の応用を行うと，虚部と実部それぞれの比較から $L=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}\,dx$ と $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{x^3+1}\,dx$ についての２元連立１次方程式を得るので，これを解けば L を得る.

数学基礎V　レポート返却

理学部(数理学科)　火曜１限　担当：服部哲弥

2001/07/17

- 第５回レポート ([30]) を返却します．理学部Ａ館453 服部研究室ドアに貼ってあるボックスにレポートと模範解答が入っているので，持っていって下さい．

- 同じく研究室ドアに貼ってある封筒に第４回までのレポートと模範解答，及び未返却中間試験が入っています．これも持っていって下さい．

- 同じく研究室ドアに，こちらが把握しているこれまでのレポート提出状況の一覧を貼ってあります．確認の上，疑問の場合は服部

  hattori@math.nagoya-u.ac.jp

  まで連絡を下さい．

追記

演習問題集の訂正：

42 ヒントの積分の分母 $z+\dfrac{1}{z}$ は講義でやったとおり $z-\dfrac{1}{z}$ の誤り．

50 ヒントの部分分数展開の分母は x^2+1 と x^2+6 ではなく，それぞれ x^2+2 と x^2+3．

- §5 解析接続 の最初の段落「定義域のリーマン面のが決まる」は「定義域のリーマン面が決まる」

（万が一，これ以後に訂正があった場合は web page
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/ hattori
で発表します.）

数学基礎V　第２回(最終)試験について

理学部(数理学科)　火曜１限　担当：服部哲弥

2001/07/17

第２回(最終)試験を９月の別途指定された期日に行う．持ち込みなし．

期日の詳細は，別途共通教育事務からの掲示があるはずである．9/11 (火曜) 通常の講義時間内 08:45–10:15 に通常の講義室 35 と聞いているが，正式の掲示に従う．

試験範囲は，第１回試験範囲以降，即ち，配布した演習問題集の §3 「テーラー展開」(講義の §2) 以降の講義の最終回までの範囲，および対応する演習問題集の問題 ([19] 以降) 全部，を原則とするが，特に，以下が予想される．なお，演習問題集と多少の改変はあり得る．

(i) 第４回以降のレポート問題から１題
(ii) 演習問題集の [41] から [57] までの中から１または２題
(iii) 演習問題集の該当範囲の問題から１題

なお，以上の予想は諸君の勉強の便宜のために発表した．裏をかくつもりはないが，不慮の事態によって予告なしに変更があり得る．正式の試験範囲は，あくまで当該の講義と演習問題集の範囲全部である．

成績は，第１回 (中間) 試験と第２回 (期末) 試験を主とし，６回のレポートを加味する．２回の試験の比重はほぼ対等と考え，悪い成績を救う，良い成績はいつも良い点数を取る者に与えるべきである，公平感を損なわない，という考えに沿う．ただし，これまでの経験に照らして，以上を確定とはせず，成績はすべての試験採点終了後に決定する．

不可抗力による試験欠席の場合は，文書による証明を服部まで提出すること．このとき，何らかの対処が妥当と判断される場合でも，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため，単位取得最低点に相当する点を上限とする．

間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

追記

出題したレポート問題は演習問題の以下の問である．

[3] [12] [14] [19] [30] [31]

このうち最初の３問が第１回試験までの分，残りの３問が第２回試験までの分である．

問い合わせ先：`hattori@math.nagoya-u.ac.jp` 服部哲弥

数学基礎Ｖ　レポート

理学部(数理学科) ２年　火曜１限　担当：服部哲弥

2001/06/26

以下のようにレポートを出題する．

- 第４回：演習問題集 [19]: 締め切り 7/02(月)18:00
- 第５回：演習問題集 [30]: 締め切り 7/09(月)18:00

提出先：理学部Ａ館 453 服部研究室ドアに貼ってある袋．時間厳守！

なお，演習問題集を全てレポートにする余裕はないし，また，演習の時間もとれない可能性が大きい．レポートに出なかった問題も各自自習することが望ましい．できるだけ中間以後（[19] 以降）の問題全部，それがかなわないまでも，問 [29]–[70] は多くやればやるほど望ましい．この先夏休みもあることなので，各自勉強することを強く勧める．

期末試験はレポートに出さなかった問題のほうを多くする予定である．

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥