

# 經濟数学I（春学期）

服部哲弥

# 1 . 春の講義の大雑把な目標

---

(1) 微分法を用いた条件付き最小(大)値問題：

(1-a) 条件無し：1変数関数では  $h'(x) = 0$  が必要条件 (ご存じ)

・ 多変数関数  $f$  ならば各成分ごとにその成分の1変数関数と思えば，  
偏微分  $(\nabla f)(\vec{x}) = \vec{0}$  記号の正確な把握を勉強すれば難しくない

・  $h'(x) = 0$  かつ  $h''(x) > 0$  ((下に)凸)ならば極小 . 多変数では？

(1-b) 等式条件：  $x^4 + y^4 = 1$  の下で  $f(x, y) = xy^2$  の最小値は...

$y^2 = \sqrt{1 - x^4}$  として  $g(x) = f(x, y(x)) = x\sqrt{1 - x^4}$  ができるが

・ 「あらわに」解けない時？陰関数定理：解いたふりして微分を利用!?

・ 未定乗数法：さらに，条件無しの時の  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$  に似た公式!?

— 春はここまで —

— 秋は... —

## 秋の講義の大雑把な目標

---

(1-c) 不等式条件：

$xy + x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$  の下で  $xy$  の最大値はやや難。

2変数なら（ご存じの）領域の図示で頑張れるが，3変数以上だと？

- Fritz–John条件とKuhn–Tucker条件 = 未定乗数法と似た工夫の成果：
- （2変数以下や特別な問題に限らない）未定乗数法のような汎用方法で
- 未定乗数法に（したがって条件無しの際の  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$  に）似た公式
- そんな戦闘力高い公式を得る理論系経済学向きの汎用・強力な理屈が

(2) 凸集合の分離定理：

- 「2個の膨らんだ風船の間に紙を挟める」という定理（汎用）
- 特に，風船のいっぽうが線形空間の場合（Gordanの定理）（強力）

## 経済学他科目との関係？

---

- 最小値問題も凸解析もミクロ経済学の種々の科目の数学的背景  
ミクロで**おなじみの「minimize (maximize) \*\* subject to \*\*」**

上記以外の理論系経済学で凸解析（分離定理）が絡む場面：

・ 数理ファイナンスの基本定理：

「無裁定 (arbitrage 不存在) と同値マルチンゲール測度の存在は同値」

・ ベイズ統計学の基本定理：

「許容的 (admissible) な意志決定はベイズ解」

・ 零和非協力ゲーム：

「零和非協力ゲームにはナッシュ均衡解が存在」

# 教科書・レポート・試験等

---

**教科書**「経済数学」慶應義塾大学経済学部（**水色**のテキスト）  
春学期 経済数学I 1 - 4章 ， 秋学期 経済数学II 5 - 7章 （補遺は範囲外）

**成績評価** . 教室学期末定期試験があれば**持込無し**学期末定期試験 .  
次ページも参照

過去問（略解付）等 ウェブから自由にどうぞ：  
**服部哲弥** で検索 / 日本語ホーム / 講義 / 経済数学

## 位置づけ

- (1) 1年の**微分積分入門（微分積分）**の微分・偏微分の続き
- (2) 1年の**線形代数（線形代数続論）**を履修済の前提
- (3) 初回（次回）は線形代数続論（1年秋学期）後半から復習
- (4) 3年でミクロ経済学中級など数学を用いる科目や数学を用いることを謳うゼミを選ぶ予定ならば，2年で**経済数学I,II**の履修を薦める

# オンライン資料と成績評価補足

---

---

1. 学事日程上毎回（ほぼ毎週）講義曜日に講義 pdf を DL . 毎回の講義 pdf に問のページ , 次の回の講義 pdf に略解のページ（勉強用）
2. **成績評価**（状況急変時の補足）
  - 2-1. 学期末定期試験が教室で行われれば**持ち込み無し**の学期末定期試験
  - 2-2. 万が一教室試験が有効に機能せずオンライン試験になれば , **教科書と上記項目 1. の講義 pdf を手持ちであることを前提に出題**
  - 2-3. 「社会情勢」の急変に応じて大学の方針の急変がありうるので , 学事指定講義用オンラインサイトの本科目のお知らせの指示に注意し協力すること . 試験等終了までは**ダウンロード (DL) した毎回の講義と教科書所持を続けること**
3. 万が一オンライン試験の場合は**問題のダウンロードと解答提出は**学生部指定の講義用オンラインサイト .
  - 3-1. 手書き解答（最初に学籍番号と氏名）を pdf ファイルにして提出 .
  - 3-2. 紙に書いたレポートを pdf ファイルにする方法：
    - ・ **スマホで撮影**（通常は写真は jpg 形式だが）
      - **adobe 社の scan や CamScanner など各種無料アプリで写真を pdf 保存可能**
      - 例えば Windows10,11 PC では , 大概のファイルはそれを見るソフトの印刷メニューに「microsoft pdf に保存」などの選択肢
    - ・ 自宅にスキャナがあればスキャン

## 2 . 線形代数 ( 復習 )

正方行列:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$  1次方程式 ( 鶴亀算 )  $A\vec{x} = \vec{b}$

頭の行, 足の行, vs 鶴の特徴の列, 亀の列,  $\vec{x}$  匹数の列ベクトル,  $\vec{b}$  頭数と足数ベクトルの「小箱」で整理した大きな引越荷物:

• 列ベクトルの「小箱」 $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots \rightarrow A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$

列ベクトル  $\vec{x}$  の転置行ベクトル  ${}^t\vec{x}$ . 列ベクトルどうしの内積  $(\vec{x}, \vec{a}) = 1 \times n$  と  $n \times 1$  行列の積  ${}^t\vec{x} \vec{a} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$   
 $\rightarrow {}^t\vec{x} A = ((\vec{x}, \vec{a}_1) \cdots (\vec{x}, \vec{a}_n))$

• 行ベクトルの「小箱」:  $\vec{a}'_1 = (a_{11} \cdots a_{1n}), \dots \rightarrow A = \begin{pmatrix} \vec{a}'_1 \\ \vdots \\ \vec{a}'_n \end{pmatrix} \rightarrow$

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}'_1 \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}'_n \vec{x} \end{pmatrix}$  cf.  $A$  を列ベクトルの小箱に分けたときの表示も重要:

$A\vec{x} = x_1 \vec{a}'_1 + \cdots + x_n \vec{a}'_n$  ( 鶴の特徴ベクトルと亀特徴ベクトルの ) 線形結合

# 行列の演算と逆行列

- ・ スカラー倍と和  $cA + dB = ((c\vec{a}_1 + d\vec{b}_1) \cdots (c\vec{a}_n + d\vec{b}_n))$
- ・ 積 (行ベクトルと列ベクトルの「内積」を並べたもの), 単位行列  $E$

以下,  $A$  が正方行列の場合: **逆行列** ( $\exists B$  は  $B$  がある, という文)

- ・  $\exists B; AB = E$  または  $\exists B; BA = E$  ならば

行列式  $|A| \neq 0$  であってかつ  $B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$  が  $AB = BA = E$  を満たし,

- ・  $AB = BA = E$  を満たす  $B$  は上記**ただ一つ**:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$

余因子行列  $\tilde{A}$  は一回り小さい行列式を並べたもの. cf.  $A^{-1}$  を計算する現実的手段は掃出し法など

- ・  $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$  (日本語訳は次行. この先訳は略すので意味を今覚えよ)
- ・ **行列式が0でないことと逆行列が存在することが同値**

$(\forall x \in A)$  は集合  $A$  のどの要素  $x$  も, の意味 (この先行数節約目的で  $\exists$  と  $\forall$  を多用)



# 行列式

---

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 第1行での展開による定義

- 第1列での展開に等しい  $|{}^t A| = |A|$
- 2つの行(列)を入れ替えると行列式の符号が反対になる  
(特に同一行(列)があれば行列式は0) (いずれも, 帰納法で証明)
- 第*i*行(列)での展開(符号に注意) (証明は行を入れ替えて第1行での展開)
- 行線形性(*i*行の*k*倍, *i*行の和), 特に*j*行の*k*倍を*i*行に加えても不変
- 列線形性, 特に*j*列の*k*倍を*i*列に加えても不変 (証明は展開)
- 三角行列の行列式は対角要素の積, 特に単位行列の行列式  $|E| = 1$

## 積の行列式は行列式の積 $|AB| = |A||B|$

(証明は, 帰納法と行展開で得られる  $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$  を用いる技巧)

特に,  $|P^{-1}||P| = 1$ ,  $|P^{-1}AP| = |A|$  対角化

# 対称行列の対角化

記号  $x \in V$  ( $x$  は集合  $V$  の要素) .  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ( $n$ 次元空間の点) は数ベ

クトル空間  $\mathbb{R}^n$  の要素 ( $n$ 次元列ベクトル) と位置ベクトルの考えで同一視・同記号  
固有方程式  $\varphi_A(t) = |tE - A|$  , 固有値  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (重複度ぶん並べる)

固有空間  $W(\alpha_i) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \vec{x} = \alpha_i \vec{x} \}$  は  $\mathbb{R}^n$  の部分線形空間

- ・ 部分空間は基底 (一次独立, 生成) がある 次元  $\dim W(\alpha_i)$  は  $\alpha_i$  の重複度以下
- ・ 対角化可能と「 $(\forall i)$  次元 = 重複度」が同値 (ここまで一般の正方行列でOK)

内積  $(\vec{a}, \vec{b})$  , 双線形 . ノルム  $\|\vec{a}\|$  { シュワルツ , 三角 } の不等式

直交行列  ${}^t P P = E$  (列の小箱  $P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)$  の  $\vec{p}_i$  たちは正規直交基底)

以下, 実対称行列 (「実」は要素が全て実数の意味)

実対称行列は直交行列で対角化可能, 固有値は実数 :  $\exists P; {}^t P P = E,$

$$A = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \alpha_i {}^t \vec{p}_i = P D {}^t P, \quad P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n), \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$2 \text{次形式 } {}^t \vec{x} A \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\vec{x}, \vec{p}_i)^2 \alpha_i$$

正定値 :  $(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n) {}^t \vec{x} A \vec{x} > 0 \Leftrightarrow$  全ての固有値が正  $\Leftrightarrow$

全ての首座小行列式 (水色テキスト p.12 最下行) が正 :  $|A_r| > 0, r = 1, 2, \dots, n$

### 3 . 集合の位相 ( 教科書 p.1 )

---

#### 目次 :

$\mathbb{R}^n$  , ノルム ,  $\epsilon$  近傍 , 開集合 , 閉集合

空間を ( 点およびベクトルの ) 集合  $\mathbb{R}^n$  と見た上で ,  
近い・遠いなどを集合の言葉で記述

- 直感での理解は限界 常識を排した厳格な記述と証明で正しさを担保 ( 数学 )
- ここでは , 過去の数学者を大幅に信じて整理済の昔の研究成果という果実の学習
- とはいえ , 無限や集合を扱う語句が大量初出する教科書 1 , 2 ページは急がない
- 次第に今回次回の内容に言及やめるが , 数学者の頭の中は常に戻って確認してる

# $n$ 次元空間 $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N}$  ( $\in$ は要素と集合の関係,  $\notin$ は要素で無いこと)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  正整数の集合.  $\mathbb{N}$ や実数 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ は「黒板太字」という特別記号が現在の標準(教科書は少し古い著作なので, 単なる太字で強調)

- $n \in \mathbb{N}$ とは, 何変数関数でも扱いたいお気持ち(初級ミクロの2財の効用の $n = 2$ から, 産業連関表を扱うハードなゼミ(が, あれば)100変数関数以上まで一括処理)
- 共通の定理を先に用意して使う時は $n = 2$ や $n = 100$ を代入固定して使う
- 注.  $n$ は問題ごとに固定, 変数 $x_1, x_2$ はミクロ経済学でもマクロでも問題を決めても, 変化を見たいので動く(変数). 固定するのは(変化を見るべき)関数 $f$
- 以下で扱うのは $n$ や $f$ を変えても共通に成り立つ定理や証明たちなのがいじ
- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :  $n$ 個一組で $n$ 次元空間の1点,  $x_i$ たちは座標成分
- $\mathbb{R}^n$ は $n$ 次元ベクトル空間でもある(前回)(位置ベクトル=始点を原点 $O$ に固定することで)点とベクトルは1:1だから常に同一視, 見方を行き来するので慣れること
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ は前回や教科書のとおり, この講義では列ベクトルだが紙面の節約で横に並べてコンマで区切る普通の記号も流用(縦ベクトルに各自脳内変換してね)

## 2点の距離 = ベクトルの差のノルム

- ・微分や連続 「2点を近づける」視点 2点  $\vec{x}, \vec{y}$  の距離  $d(\vec{x}, \vec{y})$   
ベクトル空間の視点ではベクトルの差のノルム
- ・  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ ; ここで, 差は各成分の差を成分とするベクトルで, ノルムは自分自身との内積  $\|\vec{z}\|^2 = z_1^2 + \dots + z_n^2 = (\vec{z}, \vec{z})$
- ・ ノルムの3性質 (実は, **ノルム**という単語の**定義**)  $\|\vec{x}\| \geq 0$  かつ等号は  $\vec{x} = \vec{0}$  の時のみ (**非負値**),  $\|k \vec{x}\| = |k| \|\vec{x}\|$  (**正值1次同次**),  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (**三角不等式**)  
(証明は, 両辺2乗し内積で書いてシュワルツの不等式  $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$ . シュワルツの不等式の証明は  $\|\vec{x} + t\vec{y}\|^2$  を内積で書いて内積の双線形性で  $t$  の2次式に展開する一方, ノルムの非負値性からそれが  $t$  について恒等的に非負の判別式条件)
- ・ 中心  $\vec{a}$ , 半径  $r > 0$  の  $n$  次元球の内部  $U_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$   
(円を2次元球, 線分を1次元球と呼ぶノリ, 内部というのは境界含まないこと)
- ・  $U_r(\vec{a})$  は境界 (球面) の点を要素に持たない約束 (定義). **開球**
- ・ **境界含む球** ( $d(\vec{x}, \vec{a}) \leq r$ ) は**閉球** (2ページ後の開集合閉集合に合わせた用語)

## 近傍 = 近くという性質を，集合族で定義すること

- $D \subset \mathbb{R}^n$  が点  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍とは  $\vec{a} \in D$  かつ開集合であること  
中心  $\vec{a}$  の正半径の球  $U_r(\vec{a})$  は点  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍
- ( 球の内部は中心  $\vec{a}$  からの距離が小さいので， $\vec{a}$  に近い点たちの集合と見る )
- 連続や微分や極小極大 極限 注目点の近くに関心 小さい  $r$
- 小さい  $r$  への注目を強調する時の慣用：  $r$  の代わりに記号  $\epsilon$ ：  
イプシロン近傍  $U_\epsilon(\vec{a})$  (あくまで慣用，定義すれば記号は  $r$  でも  $\epsilon$  でも可)
- 小さな  $\epsilon$  の  $U_\epsilon(\vec{a})$  の要素にもなってる点ほど  $\vec{a}$  に近い ( $\epsilon > d(\vec{x}, \vec{a}) = \|\vec{x} - \vec{a}\| \Leftrightarrow \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})$  だから当然の言い換えだが，空間を (点すなわちベクトルの) 集合  $\mathbb{R}^n$  と見た上で近い遠いを集合の言葉  $U_\epsilon(\vec{a})$  で記述)
- いろんな  $\epsilon$  の集合 (球  $U_\epsilon(\vec{a})$ ) を考える = 集合族 (集合の集合) で考える

# 集合算

単に高校の復習だが，全てを集合と見ることと，要素である・ないの徹底がポイント  
 $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^n$  (立体だったり面だったり何個かの点だったり，高校で集合，領域，軌跡等呼び分けていた全てが集合  $A, B, \dots$  実態は定義や定理の仮定で把握)

$\vec{x} \in A$  ( $\vec{x}$  は集合  $A$  の要素)， $\vec{x} \notin A$  (要素でない)

集合は入って{る，ない}だけが問われる概念

(そのことから，以下の各行は集合算の定義ということも意味する)

和集合  $\vec{x} \in A \cup B \Leftrightarrow \vec{x} \in A$  の  $\vec{x} \in B$  少なくとも一方成立

集合の交差  $\vec{x} \in A \cap B \Leftrightarrow \vec{x} \in A$  と  $\vec{x} \in B$  両方成立

補集合  $\vec{x} \in A^c \Leftrightarrow \vec{x} \notin A$

・補集合は全体集合を先に決めておく必要あり．この講義では主に  $\mathbb{R}^n$

・高校では補集合を  $\bar{A}$  で表したが，高校以外では  $\bar{A}$  は閉包 (=  $A$  とその境界点の和

集合， $U_r(\vec{0})$  は 2 ページ前の最下行付近の閉球)

包含関係  $A \subset B \Leftrightarrow (\vec{x} \in A \text{ ならば } \vec{x} \in B)$

例： $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

## 開集合，閉集合

---

・  $A \subset \mathbb{R}^n$  が**開集合**とは  $(\forall \vec{x} \in A) \exists r > 0; U_r(\vec{x}) \subset A$  が成立すること  
( $\forall, \exists$ は講義 pdf 2 の2ページ目)， $\exists r > 0$ とは，しかるべき**近傍の存在**が趣旨  
たとえば単位球  $A = U_1(\vec{0})$  のとき，境界（球面）の近くの  $\vec{x}$  は大きな  $r$  をとると  
 $U_r(\vec{x})$  は  $A$  からはみ出すが， $r$  を単位球面との距離以内に選べば  $U_r(\vec{x}) \subset A$ （す  
なわち，開球は開集合）。他方， $A'$  が閉球 ( $A' = \overline{U_1(\vec{0})}$ ) のとき球面上の点  $\vec{x}$  は  
 $\vec{x} \in A'$  だが，どんな小さな正の  $r$  でも  $U_r(\vec{x}) \not\subset A'$ 。閉球は開集合では無い

・  $A \subset \mathbb{R}^n$  が**閉集合**とは， $A^c$  が**開集合**

開球が開集合という説明と同様に，閉球の補集合は境界との距離以内の球を考えるこ  
とで開集合。要するに「境界の点」をまったく要素としない集合が開集合，境界点を  
すべて要素に持つ集合が閉集合，ということだが，境界という言葉の定義が面倒（ $A$   
からも  $A^c$  からも近づけるといいう性質が定義に入ってる必要）それで，  
開集合と閉集合 閉包  $\overline{A}$  ( $A$  を包含する最小の閉集合)  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$  の順に境界  
 $\partial A$  の定義を最後にするのが割と普通



## 教科書 p.1 第1章定理1

---

定理が言っていること： $\mathbb{R}^n$ の部分集合たちについて：

有限個の開集合の和集合も交差も開集合，有限個の閉集合の和集合も交差も閉集合

・ $A \cup B$ は既出，3個以上の和集合は帰納的繰り返し ( $A' = A_1 \cup A_2$ は集合なので  $A' \cup A_3$ は定義済みだから3個の和集合  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A' \cup A_3$ も定義される．以下帰納法．もちろん要するにどれかの  $A_i$ の要素になつてゐる  $\vec{x}$ を全部要素とする集合

開集合は無数個の和集合も開集合，閉集合は無数個の交差も閉集合

# 第1章定理1の証明

---

- ・開集合  $B$  と  $C$  に対して  $A = B \cup C$  も開集合であることの証明： $\vec{x} \in A$  ならば和集合の定義から  $\vec{x} \in B$  または  $\vec{x} \in C$  .  $B$  も  $C$  も開集合なので，前者なら  $U_r(\vec{x}) \subset B \subset A$  , 後者なら  $U_r(\vec{x}) \subset C \subset A$  となる  $r > 0$  があるので  $A$  も開集合
- ・3個以上の有限個の和集合は2個の結果と帰納法でできるが，今の証明（教科書の証明）は帰納法と関係なく無限和でも論理が成り立つ

**ドモルガンの定理**  $(B \cup C)^c = B^c \cap C^c$  ,  $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

（証明は高校でやったはずだが，次のページの問題(c)の無限和の場合と同様）

閉集合の交差  $A = B \cap C$  は，ドモルガンの法則と閉集合の定義から  $A^c$  は開集合たち  $B^c$  と  $C^c$  の和集合なので上に証明したとおり開集合．よって再び閉集合の定義から  $A$  は閉集合（無限和でも同じ理屈成立）

開集合の交差  $A = B \cap C$  は， $\vec{a} \in A$  ならば  $\vec{a} \in B$  かつ  $\vec{a} \in C$  . それぞれ開集合の定義から  $U_{\epsilon_1}(\vec{a}) \subset B$  と  $U_{\epsilon_2}(\vec{a}) \subset C$  を満たす正の  $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  があるが，中心は  $\vec{a}$  で共通だから小さい方を半径とする球が他方に包含されるので，小さいほうの球は  $B$  と  $C$  両方に包含されるので  $A$  に包含される．閉集合の和集合は今の結果とドモルガンの定理から閉集合

- ・上の証明の後半は，無限個の開集合の共通部分だと，一番小さい半径を選ぶことが極限なので，正の列でも0に収束する可能性がある（半径0の球は近傍ではない）から，無限和や無限交差では成り立つとは限らない

## 4 . 関数の連続性 (教科書 p.2)

---

目次 :

$D \subset \mathbb{R}^n$  , 関数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  が連続とは... ,

例 :

$f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) = e^{x^2+y^2}$  は連続関数

$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  は  $(x, y) \neq (0, 0)$  で連続

## $n$ 次元空間の点の表記

講義 pdf 3 (2回目) 2ページ目最下段にも書いた注意だが,

・点とベクトルは1:1だから,  $\mathbb{R}^n$  は  $n$ 次元ベクトル空間でもあり, 同一視 (位置ベクトル) するが, その際点  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  は列ベクトル扱いなので, 建前上  $n = 2$  なら  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と表記.

- ・今回登場する多変数関数の変数も建前上  $f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$
- ・普通の書き方  $f(\vec{x}) = f(x, y)$  も排除しない (紙面の節約)
- ・ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  の座標成分を以後断らずに右下最後の添字で表す
- ・例: 平面内の点列 (= 2次元ベクトルの列)  $\vec{x}_k, k = 1, 2, \dots,$  の第2座標成分 (「 $y$ 座標」) の列は  $x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \dots, x_{k,2}, \dots$

## $\mathbb{R}^n$ の列 ( $n$ 次元ベクトル列 ) の極限と関数の連続

$n$  次元ベクトルの列 ( =  $n$  次元空間の点列 )  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots,$   
(  $n = 1$  単なる数列  $x_1, x_2, \dots, n = 2$  平面内の点列,  $\dots$  )

定義：収束  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{a}\| = 0$

- 教科書は記号  $\lim$  を嫌う諸君を意識して  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$  としか書いてないだけ
- 定義式 ( 右辺 ) は実数列  $c_k = \|\vec{x}_k - \vec{a}\|$  の収束 高校で既知だから定義になれる
- 命題：  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i, i = 1, 2, \dots, n$

( の証明は  $|z_i| \leq \|\vec{z}\|$  から, 逆は,  $i = 1$  から各成分順に, 必要なら  $k$  を大きくしつつ極限に近づければ, 差のノルムも 0 に近い )

$D \subset \mathbb{R}^n$  : 関数の定義域 ( ピンとこない間は  $D = \mathbb{R}^n$  と思い, 慣れたら修正 )  
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (  $f$  が  $D$  上で定義された  $n$  変数実数値関数 であることの記号表現 )  
 $f$  が  $\vec{a} \in D$  で連続とは,  $\vec{x}$  が  $D$  内で  $\vec{a}$  に近づくとき  $f(\vec{x})$  が  $f(\vec{a})$  に近づくこと

## 慣用の記号 — による関数の（1点での）連続

前ページ最後の「近づく」が未定義，という問題 — （イプシロン・デルタ）  
論法という定式化（以下 $\forall$ ,  $\exists$ は初回講義 pdf 2 . 3 ページ目も参照）

$f$  が  $\vec{a} \in D$  で連続（気持ち「点が近ければ関数値も近い」とは，

$$(\forall \epsilon > 0) \exists \delta > 0; (\forall \vec{x} \in D \cap U_\delta(\vec{a})) |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$$

・読み方：任意の  $\epsilon > 0$  に対して， $\delta > 0$  が存在して， $f$  の定義域にあってかつ  $\vec{a}$  の  $\delta$  近傍にあるどんな点  $\vec{x}$  に対しても（言い換え「 $f(\vec{x})$  の存在が保証されていてかつ  $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$  ならば」）， $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$  である

・気持ち：どんな小さな正の許容誤差に対しても，許容に応じての後出しじゃんけん  
とはいえ変数  $\vec{x}$  の注目点  $\vec{a}$  からの距離  $\delta$  を正に取ることができて， $\vec{a}$  から距離  $\delta$  以内のどの点  $\vec{x}$  でも，関数値  $f(\vec{x})$  が定義されていれば注目点での値  $f(\vec{a})$  から，最初に設定した許容誤差の範囲内にある。

・前ページ最後の段階で「近づく」という単語は定義されていなかったが，枠内の本当の定義の記号や「読み方」内の単語はすべて定義されているので，これならば連続という単語の定義に使える（使う）と，昔の偉い人たちが作り上げた定義

## 関数の連続（例）

$f(x, y) = x + y + xy$  で定義される実2変数実数値関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  (が平面  $\mathbb{R}^2$  内のどの点であってもそこ) で連続 ( $\vec{a}$  は建前上列ベクトルだが2ページ目参照)

**証明** . 以後  $\min$  は大きくない方 (小さい方) ,  $\max$  は小さくない方を表す関数とする ( $\min\{1, 2\} = 1$  ,  $\max\{1, 2\} = 2$ ) .

$\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して ,  $\Delta x = x - a_1$  と  $\Delta y = y - a_2$  と置くと ,  
 $f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \Delta x + \Delta y + a_2 \Delta x + a_1 \Delta y + \Delta x \Delta y$

任意の  $\epsilon > 0$  に対して ,  $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3 + |a_1| + |a_2|}\right\}$  と置くと  $\delta > 0$  である .

$\vec{x} \in U_\delta(\vec{a})$  すなわち  $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$  を満たすように  $\vec{x}$  を選ぶと , ノルムの定義から  $\max\{|\Delta x|, |\Delta y|\} = \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} \leq \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$  かつ  $0 < \delta < 1$  なので , 絶対値についての三角不等式から ,

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| &\leq |\Delta x| + |\Delta y| + |a_2| |\Delta x| + |a_1| |\Delta y| + |\Delta x| |\Delta y| \\ &< (1 + |a_2|) |\Delta x| + (1 + |a_1| + \delta) |\Delta y| \leq (3 + |a_1| + |a_2|) \delta \leq \epsilon \end{aligned}$$

よって  $\epsilon > 0$  に応じて上記のように選んだ  $\delta > 0$  に対して  $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$  ならば  $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$  なので前ページ枠の定義から  $f$  は  $\vec{a}$  で連続である . **証明終わり** (このように  $\epsilon$  の関数として  $\delta > 0$  を具体的に見つけるのが前ページの枠内の定義を使うことの内容だが , 見つけるには理解に基づく技量が必要)

# 連続関数

関数が連続とは，定義域  $D$  上のどの点  $\vec{a} \in D$  でも連続なこと

・考察例をかねて，細かい注意． $D \subset \mathbb{R}^n$  が開集合ならば，どの  $\vec{a} \in D$  でも  $U_\delta(\vec{a}) \subset D$  となる  $\delta > 0$  がある（講義 pdf 2（初回））ので，連続の定義（2ページ前の枠内）において十分小さい正の  $\delta$  を選べば  $D \cap U_\delta(\vec{a}) = U_\delta(\vec{a})$  なので，定義の中の  $\vec{x} \in D$  が自動的に満たされることから，最初から  $(\forall \vec{x} \in D \cap U_\delta(\vec{a}))$  を  $(\forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{a}))$  と書いても良くて，それはさらに  $\vec{x}$  と  $\vec{a}$  の距離が  $\delta$  以内ということと同値なので，

$$(\forall \epsilon > 0) \exists \delta > 0; (\forall \vec{x}; \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta) |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \epsilon$$

と書いても同値

・定義域  $D$  が開集合でないとき．内点（境界上の点以外）での定義は上記開集合のときとまったく同じ考察が成立．境界点（ $\vec{a} \in \partial D$ ）のときだけ， $\vec{x} \in D$ ，すなわち  $D$  内だけを通して近づく時に関数値が収束すれば連続と呼ぶ



# 連続な関数

安心な結論の先取り：普段諸君が使うたいの関数は連続

どんな関数が連続か？2ページ前のような定義の直接証明で

- 定数関数 (定数  $c \in \mathbb{R}$  に対して  $f(\vec{x}) = c$  で定義される関数)

- 射影 (座標成分) ( $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $f(\vec{x}) = x_i$  で...)

が  $\mathbb{R}^n$  上で連続関数ことがわかる (2ページ前の証明より単純)

こうやって個別にやっていると切りが無いので, 既知の連続関数から新しい連続関数を見つける定理を作る (以下も2ページ前のように定義から証明できる)

- 連続関数の和とスカラー倍 (まとめると, 線形結合) は連続関数 ( $f$  と  $g$  が連続で  $c \in \mathbb{R}$  ならば  $(cf)(\vec{x}) = cf(\vec{x})$  で定義される関数  $cf$  と  $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$  で定義される関数  $f+g$  は連続)

- 連続関数の四則は連続 ( $f, g$  が連続のとき  $(fg)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x})$  で決まる  $fg$  と, さらに定義域を  $g(\vec{x}) \neq 0$  に制限して  $\frac{f}{g}(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$  で決まる  $\frac{f}{g}$  は連続)

- 連続関数の合成関数は連続 (1変数関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $n$ 変数関数  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が連続の時,  $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$  で定義される  $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続. 一般に

$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ , が連続の時  $\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$

で定義された  $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  と  $f$  の合成関数  $f \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数

## 続・連続な関数

---

・ 前ページの定数関数と座標成分関数と線形結合に関する連続性から、帰納的に、どんな多項式もすべて連続関数

・ さらに商に関するの連続性からどんな有理関数もすべて連続関数

・ 指数関数  $\exp(x)$  (実数変数では  $h(x) = e^x$  と行間の節約目的でまったく同じ意味) は連続関数であることが証明できるので合成関数に関する連続性と合わせると、例えば  $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) = e^{x^2+y^2}$  は  $\mathbb{R}^2$  上の連続関数

・ 対数関数  $\log x$  は  $x > 0$  で連続であることが証明できるので合成関数の連続性と合わせると、例えば  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  は  $(x, y) \neq (0, 0)$  で連続 ( $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  上で連続)

場面毎に必要ななる多数の関数の性質を一括して用意しておくには  $f$  を具体的に書かない定義と定理が必要 (そのための抽象的な定義とこれから先の抽象的な定理と、結果を保証する数学的な証明)

・ (再掲) . 安心な結論：普段諸君が使うたいい関数は連続

## 5 . 連続関数による開集合の像 (教科書 p.3,4)

---

---

### 目次 :

- $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) < c\}$  は開集合
- $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \leq c\}$  は閉集合
- 最大最小問題における位相と関数の連続性の重要性 : 最大値の定理

## 教科書 p.3 第1章定理2

---

教科書の定理の補足 .

- ・  $n \in \mathbb{N}$  と  $c \in \mathbb{R}$  を固定し  $n$  変数実数値連続関数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  も固定する毎に成り立つ性質だが,  $n$  が自然数で  $c$  が実数で  $f$  が  $n$  変数実数値関数なら (それ以外の条件皆無で) 成り立つ性質, ということ
- ・ 前回の4の問(a)のように開集合・閉集合・どちらでもないの判定を定義から証明するのはたいへんだが, この定理によって, 連続関数の値に関わる集合は定義に戻らないで判定できるようになる
- ・ (関数の連続性と集合の開・閉に深い関係があることが背景にある)

## 教科書 p.3 第1章定理2の証明

---

- 教科書の証明の補足 .
- (1) は ,  $\vec{a} \in S$  ごとにて  $U_\delta(\vec{a}) \subset S$  が成り立つ  $\delta > 0$  をうまく見つけること (  $\delta$  は講義 pdf 3 p.6 では  $r$  と置いたが , なんと置いても良い . )  $\delta$  を定めるのに  $f$  の連続性を用いることで ,  $S$  が  $f$  の値を用いて定義されていることに対応するのが教科書の証明の内容 .
- 教科書の (1) の証明は , 開集合の定義と関数の連続の定義だけから証明が成り立つ良い練習なので , 余力がある諸君はていねいに勉強するとよい .

## 教科書 p.3 第1章定理 2(b)(c) の証明

---

---

・ (2) は,  $f$  が連続ならスカラー倍も連続 (講義 pdf 4 の表題「連続な関数」のページ) なので  $-1$  倍の  $-f$  も連続だから, 証明済の (1) で  $f$  を  $-f$  に置き換え同時に  $c$  を  $-c$  に置き換えても (後者は  $\pm c$  と実数だから) 成立つ. つまり  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid -f(\vec{x}) < -c\}$  は開集合. これは教科書のとおり  $T^c$  に等しいから  $T^c$  は開集合.  $T$  が閉集合とは  $T^c$  が開集合のこと (教科書 p.1 の定義) なので,  $T$  は閉集合.

・ (3) は, 開集合の和集合が開集合 (講義 pdf 3 の表題「教科書 p.1 第1章定理 1」のページ) であることを ((2) の証明の議論で) 補集合  $U^c$  に適用

・ 教科書の (2)(3) の証明は教科書 p.2 第1章定理 1 と (1) を利用しているので, やさしくみえるが, (1) の証明がこれらを支えているので結論は同等の難しさ.

## 連続関数の値が定める開集合の例

---

$n \in \mathbb{N}$  .  $\mathbb{R}^n$  における  $n$  次元開球 :  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  と  $r > 0$  に対して , 中心  $\vec{a}$  半径  $r$  の開球  $U_r(\vec{a})$  (定義は講義 pdf 3 p.3)

- $n$  次元開球  $U_r(\vec{a})$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合

- 定理 2(a) を使う証明 :  $f(\vec{x}) = (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2$  で定義される  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n$ 次元空間の点の座標 ( $n$ 次元ベクトルの成分) は右下の添字で表す便宜上の約束 (講義 pdf 4 の p.2)) は , 多項式なので連続関数 (講義 pdf 4 「続・連続な関数」) .  $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|^2$  (右辺の定義は講義 pdf 3 の p.3) なので ,  $c = r^2$  としたときの定理 (1) の集合  $S$  は ,

$\vec{x} \in S \Leftrightarrow f(\vec{x}) < c = r^2 \Leftrightarrow \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \Leftrightarrow \vec{x} \in U_r(\vec{a})$   
だから  $S = U_r(\vec{a})$  となって定理 2(1) からこれは開集合 (証明終わり)

- 定義から証明するには  $\vec{x} \in U_r(\vec{a})$  ごとに  $\vec{x}$  を中心とする開球  $U_\epsilon(\vec{x})$  で  $U_\epsilon(\vec{x}) \subset U_r(\vec{a})$  を満たすものが必要だが , 定理 2(a) を使うと探す手間を省ける

## 教科書 p.3 第 1 章 定理 3

---

・ 先ほどの定理 2 は 1 つの関数の値だけで条件がついた集合だが、複数の関数による条件がついた場合を第 4 章から第 6 章にかけて使うのでその伏線

・ **証明の概要**: 定理 (b)(c) によって、連続関数の値に対して等号または等号付き不等号の条件を満たす点たちの集合は閉集合だが、講義 pdf 3 の表題「教科書 p.1 第 1 章 定理 1」のページ (教科書の定理 1) から、それらの交差 (共通部分) も閉集合。そして  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{条件 1}\} \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{条件 2}\} \cap \dots = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{条件 1, 条件 2, } \dots, \}$  なので定理 3 の集合  $S$  は閉集合 (**証明終わり**)



# 有界集合

---

連続の定義は関数の値の許容誤差  $\epsilon > 0$  を与えたときに後出しで ( $\epsilon$  に応じて) 変数の動く範囲  $\delta > 0$  を選べれば良い

$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $S$  が有界とは, 先に (有限の) 値  $M$  を決めることができ, どの要素  $\vec{x} \in S$  もそのノルム (原点からの距離)  $\|\vec{x}\|$  が  $M$  以下である, そういう集合  $S$  の性質を言う.

例. 原点を中心とする半径  $R$  の開球  $U_R(\vec{0})$  のどの点  $\vec{x} \in U_R(\vec{0})$  も  $\|\vec{x}\| < R$  を (開球の定義から) 満たすので, 開球は有界集合. 中心が原点でなくても (証明が少し煩雑になるだけで) 同様. 閉球でも同様 (集合が有界という概念は, 限りなく遠くの点も要素になってるかどうかを問うだけで, 開・閉とはまったく無関係).

- 上に有界な非減少数列は収束する.
- 教科書上は次の定理 4 の伏線

## 最大値の定理（教科書 p.3 第1章定理4）

---

- ・ 最大値の原理：空でない， $n$ 次元空間の有界閉集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  上で連続な関数は最大値と最小値を持つ．
- ・ 最大値の原理と呼ぶが， $f$ が連続なら  $-f$ も連続（既出）なので，最大値を持つことが証明できれば  $-f$ の最大値，すなわち  $f$ の最小値もある．
- ・ ここで言う「持つ」の大事なポイントは，最大値（最小値）を取る点  $\vec{a} \in S$  が  $S$ の要素としてある，式で書くと，  
 $\exists \vec{a} \in S; (\forall \vec{x} \in A) f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$  ということ．
- ・ 証明は（定理の意味がやや水準が高いので）他の科目に譲って省略し，使うだけとする（この講義ではさほどすごい使い方はしない）．
- ・ 定理5． $\mathbb{R}^n$ の有界な点列は収束する部分列を持つ
- ・ 定理5の証明も精神は定理4の証明に似ている（結果を使うだけで，証明は他の科目に譲る）．

## 6 . 多変数関数の微分 (教科書 p.5,6)

目次 :

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  (偏微分)
- $f$  が  $C^1$  級とは, 偏微分  $f_{x_i}$  が全ての  $i$  について連続 ( $C^2$  級も同様)
- 勾配ベクトル  $\nabla f = (f_{x_1} \ \dots \ f_{x_n})$   $1 \times n$  行列扱い
- ヘッセ行列  $H_f = \nabla^2 f = \nabla({}^t \nabla f)$  •  $f$  が  $C^2$  級なら対称行列
- 全微分可能とは,

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} (f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})) \text{ と置く}$$

$$\text{とき } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \delta(\vec{x}) = 0$$

- $C^1$  級ならば全微分可能 • 全微分可能ならば連続かつ偏微分可能
- 1変数と違って逆は成り立たないことがあるので用語を使い分けるが, この講義では全部成り立つ場合しか考えない

## 偏微分のベクトル表記（勾配ベクトル）

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  変数関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  の  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  での  $x_1$ -偏微分の定義:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (f(a_1 + \delta, a_2, \dots) - f(a_1, a_2, \dots)) \quad (f_{x_2} \text{ 以降も同様})$$

変数  $x_1$  以外は  $\vec{a}$  の対応する座標を代入して  $x_1$  の **1変数関数として微分**（極限があれば偏微分可能と言うこと，もすべき計算も，**新しいことは皆無**）

**導関数**: 各点ごとに偏微分を対応させる関数．記号:  $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

（添字は紛らわしいが）行節約のため，講義 pdf も教科書同様  $f_{x_i}$  を使う．が， $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  を推奨

**勾配ベクトル**:  $f_{x_i}$  を全座標成分 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) について並べた**行ベクトル**に値を取る  $n$  変数関数  $\nabla f = (f_{x_1} \ f_{x_2} \ \dots \ f_{x_n}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

**勾配ベクトル  $\nabla f$  は  $1 \times n$  行列と同一視**して成分を空白だけで区別し，行列との積も記号を付けない．例． $f(\vec{x}) = x^2 y$  のとき  $\nabla f(\vec{x}) = (2xy \ x^2)$

# 勾配ベクトル

---

・勾配ベクトルの表記の注の続き：cf. 講義 pdf 3 p.2 最下行近くと講義 pdf 4 p.2 中程の**注意の再掲**： $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ( $n$ 次元空間の点 =  $n$ 次元ベクトル) は列ベクトルとい

うか  $n \times 1$  行列  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  と見る．この注と同様に，勾配ベクトルも他の行列

と並ぶと行列の積  $AB$  扱い．例： $\nabla f(\vec{x})(\vec{x} - \vec{a})$  は  $1 \times n$  と  $n \times 1$  行列の積だから  $1 \times 1$  つまり実数 (**勾配ベクトルと位置ベクトルの内積**)

・点の表記で普通の  $f(\vec{x}) = f(x, y)$  も使うとしたのとまったく同様に， $\nabla f(\vec{x}) = (2xy, x^2) = (2xy, x^2)$  などの普通の表記も講義 pdf は使う

**勾配ベクトル  $\nabla f$**  はただ並べただけでなく，ベクトルとしての向きや大きさに意味がある (今回の問 (a) 参照)

## ヘッセ行列, $C^n$ 級関数

---

- **関数記号の注意**: うるさく言うと,  $f_{x_1}$  は  $f$  と同様に関数.  $f(\vec{x})$  や  $f_{x_1}(\vec{x})$  は点  $\vec{x}$  での関数値.  $f$  と違う関数 (だが  $f$  から決まる) ので別だが関連する名前  $f_{x_1}$
- **ヘッセ行列**  $H_f = \nabla^2 f = \nabla({}^t \nabla f)$  すなわち, 偏微分を縦に並べた列ベクトルの各行の勾配ベクトルを並べた正方行列に値をとる関数 ( $i, j$  成分が  $f$  を  $x_i$  で偏微分してから  $x_j$  で偏微分した 2 階偏導関数)
- **注意**. 教科書は  $\nabla^2$  を使うが, わかりにくいので講義では  $H_f$  と書く  
 $f$  が  $C^1$  級とは,  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  が全て連続関数 ( $C^2$  級等も同様)  
 $f$  が  $C^2$  級なら対称行列証明は他科目, **初回復習した対称行列の対角化が使える!**      **ヘッセ行列の固有値は実数で直交行列で対角化できる**

# 1 変数関数の平均値の定理（復習）

---

- 1 変数関数の平均値の定理（復習）:

微分可能なら,  $\exists \theta \in (0, 1); f(x) = f(a) + f'(a + \theta(x - a))(x - a)$

- 1 変数の場合は高校と1年の復習なので証明は略

• ポイントは微分可能なら成り立つこと。多変数関数では、どの成分も偏微分可能、というだけでは平均値の定理は成り立つ保証がない！

- (偏微分可能より厳しく) 全微分可能ならば平均値の定理成立 (次ページ)

• 上記 (次ページ) のように2変数以上では偏微分可能だけでは平均値の定理が成り立たない理由: 偏微分は座標軸方向の微分。京都の道路が平坦でも北東の角は崖になってる (斜め方向に不連続なり微分不可能なりする) と, 斜め方向の関数の変化が偏微分で書けない 平均値の定理不可 合成関数の微分等重要定理が不成立 (困る)

• 全微分可能性 (次ページ): 交差点で斜め方向崖ということがなく, 各点の近傍で関数値 (標高のイメージ) が平面 (1次関数  $ax + by + c$ ) に近いこと (問(a)も参照)

# 全微分可能性

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が全微分可能とは

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} (f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})) = 0$$

・教科書は左辺の極限の中を  $\delta(\vec{x})$  と置いている。

・その最後の項は数ページの記号の注意からベクトルの内積

教科書第2章定理3： $C^1$ 級ならば全微分可能（証明は教科書 p.6 上半分）

全微分可能ならば連続かつ偏微分可能（ここまでの知識で証明可能）

**安心な結論の先取り：1変数と違って逆は成り立たないことがあるので、数学としては  $C^1$  級と全微分可能（と偏微分可能）の用語を使い分けるが、普段諸君が使うたいの関数は全部成り立つ**

Q. 春学期 1/3 使って、そこかよ。

A. (i) 三田に進んでも社会に出ても、まともな教科書（人）なら多変数で細かくなったり口ごもったり回りくどくなる、ということを知っていると、まともな教科書（人）の判断に使える。

(ii) 数学は自然や社会の現象を切り離して理屈**だけ**で正当性を保証するので、どの公式・定理も仮定の理由や重要性が根拠からの論理によって明確にされている必要がある。その「お気持ち」が見えない議論は論理に飛びがあると疑うことができるようになる（数学科目の究極の教育目標の一つ）。



# ヤコビ行列

---

- ・ **ヘッセ行列** : 1つの関数  $f$  の2階微分  $n^2$  個を  $n \times n$  行列にしたもの

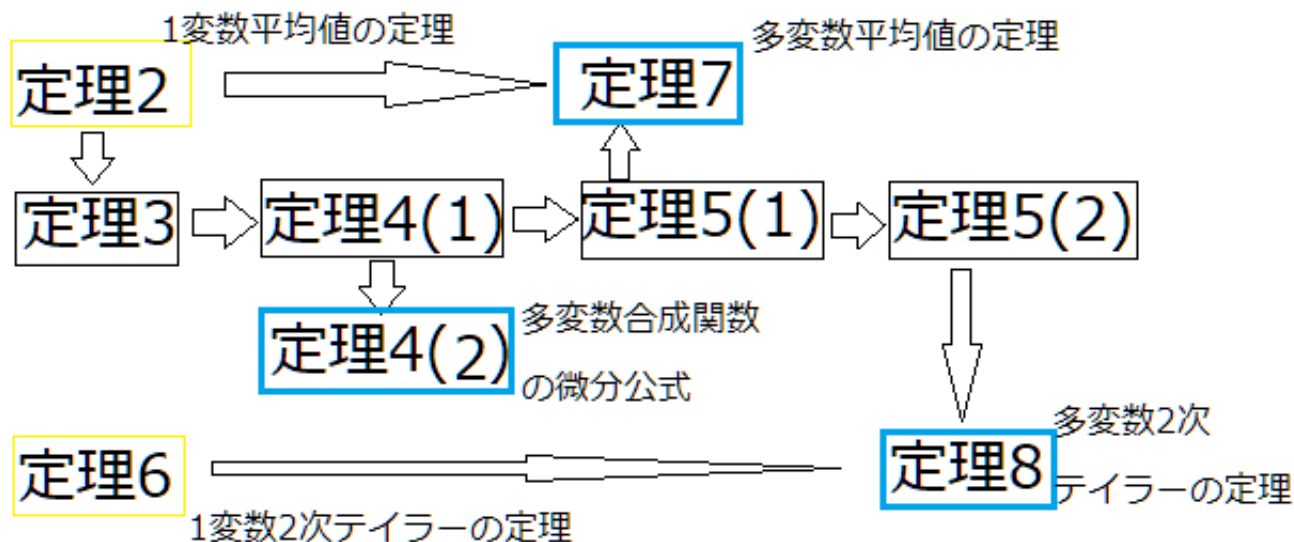
$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & \cdots & f_{x_1,x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n,x_1} & \cdots & f_{x_n,x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_{x_1} \\ \vdots \\ \nabla f_{x_n} \end{pmatrix}$$

- ・  $n^2$  個とは微分する順序込みの個数だが，この講義ではヘッセ行列を使うとき  $C^2$  級関数しか考えないので，対称行列（微分する順序によらず同じ2階導関数  $f_{x_1,x_2} = f_{x_2,x_1}$ （教科書 p.5 第2章定理1，証明は他科目）

- ・ **ヤコビ行列** :  $m$  個の関数（を縦に並べて）それぞれの勾配ベクトルを取って  $m \times n$  行列にしたもの

$$\nabla \vec{g} = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,x_1} & \cdots & g_{1,x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,x_1} & \cdots & g_{m,x_n} \end{pmatrix}$$

# 教科書第2章の定理の相互関係（次回以降の予告）



- ・ 証明技術的には1変数の結果の利用だが，全微分可能性（定理3，「斜め方向の微分の扱い」）が論理の根幹
- ・ 平均値の定理（1次のテイラー），2次のテイラー，合成関数の微分という基礎公式に多変数の場合の「斜め方向の微分」が現れる
- ・ 2章の後半は以上のことを論理的に明らかにするためだけにあるような内容
- ・ 使うときは全微分可能性という，数学者以外にはなじみの薄い，概念を避けて，連続や微分の言葉だけで書ける  $C^n$  級の仮定で進める（応用向けの親切設計）

## 7 . 合成関数の微分 (教科書 p.7,8)

---

### 目次 :

- 合成関数の微分  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$  について ,
- (1変数)  $\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  微分可能ならば  $f \circ \vec{g}$  は微分可能
  - ( $n$ 変数)  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  偏微分可能ならば  $f \circ \vec{g}$  は偏微分可能
  - 「代入してから微分」を「微分してから代入」で表せる
  - 代入される  $f$  は変数がどう近づくかわからないから  $C^1$  を仮定

# 1変数合成関数とその微分法則（復習）

（高校数3，大学1年の復習）1変数の合成関数：1変数関数  $f$  と  $g$  に対して  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , で定義される関数  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

・**例え話**: 入口でお金とボタン選択で食券を受け取れる自動販売機  $g$  とカウンターで食券を出して定食を作ってもらふ店員の作業  $f$  に対して対応  $f \circ g$  : お金と選択  $\mapsto$  定食のこと（教科書に記号が無いのはサボりだが，後から実行する写像  $f$  が合成  $\circ$  の左側）

・1変数の時は  $f$  と  $g$  が微分可能なら  $f \circ g$  も微分可能で，

$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$  . 右辺左の因子  $(f' \circ g)(x) = f'(g(x))$  は，先に  $f(y)$  を微分して後から  $y = g(x)$  を代入

・「代入してから微分」を「微分してから代入」で表せる．即ち，導関数が既知の  $f$  と  $g$  から，新しい関数  $f \circ g$  も微分可能なことと既知の  $f'$  と  $g'$  と代入で  $(f \circ g)'$  を表せる，ということ

多変数の1変数との違い： $f$  と  $g$  の偏微分可能性では不十分（次ページ）

## 教科書第2章定理4(2) (多変数合成関数の微分)

**定理** .  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$ 級,  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 偏微分可能ならば,

$$f \circ \vec{g} \text{ も偏微分可能で } \frac{\partial f \circ \vec{g}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \vec{g} \right) \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

・1変数の復習と同様に公式の左辺は先に合成(代入)してから全体を偏微分, 右辺は個別に偏微分し, 代入は後から(多変数なので成分について和をとるが, 教科書は行列の積でこれを表示(講義pdf6の3ページ目参照)):

$$\frac{\partial f \circ \vec{g}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \vec{g} \right) \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = ((\nabla f) \circ \vec{g}) \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_i}$$

これを第*i*成分とする行ベクトルで表示したのが教科書の記号:

$$\nabla(f \circ \vec{g}) = ((\nabla f) \circ \vec{g}) \nabla \vec{g}$$

右辺は勾配ベクトル(に  $\vec{x} = \vec{g}$  を代入したもの)とヤコビ行列の行列としての積

(次ページに続く)

## 続・教科書第2章定理4(2) (多変数合成関数の微分)

(前ページから続き)

・成分の添字の和を取ることで以外の1変数との本質的違いは、前ページ最後の予告通り偏微分可能だけでは不足で左側(食券 定食)の関数  $f$  に  $C^1$  級を仮定すること(偏微分計算のため特定の座標  $x_i$  だけを変化させても  $\vec{g}$  の全成分が変化するので、 $f$  にとって全変数一斉に変化するから、前回の連続性でも書いたことと同様に、1変数と異なる新規事情として、「斜め方向の微分」が偏微分で書ける必要がある

・自動販売機はボタンのように離散的なので、変化率を扱う微分法則はたとえにくい。むしろ、微分を扱うと合成関数の微分法則の右辺が成分ごとのかけ算の成分についての和という単純な形で書けるから、微分はわかりやすい(たとえば差分では複雑)

## 教科書 p.7 の概要

---

多変数合成関数の微分法則（定理 4(2)）までの教科書の証明上の（理屈の）道筋（前回講義 pdf 6 最後のほうの流れ図参照）:

- 定理 2（1 変数平均値の定理の復習）

- 定理 3（ $C^1$  級関数は全微分可能）（ここまで，前回講義 pdf 6）

$C^1$  級の  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  について（全微分可能な  $f$  でも以下成立するが）

- 定理 4(1)（1 変数） $\vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  が微分可能ならば  $f \circ \vec{g}$  も（全微分可能性の定義式（教科書 p.6 ( $D^1$ ) または講義 pdf 6 の p.6）の  $\vec{x}$  に  $\vec{g}(x+h)$ ， $\vec{a}$  に  $\vec{g}(x)$  を代入して  $h \rightarrow 0$ ）

（次ページに続く）

## 続・教科書 p.7 の概要

---

(前ページから続き)

定理 4(2) ( $n$ 変数)  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  偏微分可能ならば  $f \circ \vec{g}$  も  
(各座標成分  $x_i$  ごとにそれ以外の変数を固定すれば 1 変数の定理 4(1) に同じ)

・ 各々の定理の証明の上記より詳しいことは、教科書の証明が詳しい

前回の全微分可能性の復習 (というか, 補足)

全微分可能: 関数値の変化は変数の差の 1 次式に近い

1 次式 = 勾配ベクトルと変数の差のベクトルの内積 =  $\|\nabla f(\vec{a})\| \|\vec{x} - \vec{a}\| \cos \varphi$   
変数の差が一定なら  $\varphi = 0$  のとき関数値の変化最大

1 次式のときの計算は、数ページあとの前回の pdf6 の問 (a) の略解も参照

= 勾配ベクトルの方向が関数値の変化最大の方向



## 教科書 p.8 の概要

---

多変数合成関数の微分法則（定理4(2)）以降の教科書の証明上の（理屈の）道筋（引き続き前回講義 pdf 6 最後のほうの流れ図参照）:

定理5は定理6（1変数の2次のテイラーの定理）とともに，次回予定の多変数の平均値の定理（1次のテイラーの定理）と2次のテイラーの定理の準備のためだけの定理

・定理4(1)（前のほうのページ）

定理5(1)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^1$  級るとき， $F(t) = f(a + tb)$  で定義される  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は微分可能で  $F'(t) = (\nabla f)(\vec{a} + t\vec{b}) \vec{b}$   
（ $F'(t)$  の右辺は  $1 \times n$  と  $n \times 1$  行列の積（=ベクトルの内積）．

定理4(1)で  $\vec{g}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$ （1次式）を考えると  $\vec{g}'$  が計算できる）

（次ページに続く）

## 続・教科書 p.8 の概要

---

(前ページから続き)

定理 5(2)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^2$  級 のとき, 前ページの  $F$  は 2 階微分可能で  $F''(t) = {}^t \vec{b} H_f(\vec{a} + t \vec{b}) \vec{b}$

$F''(t)$  の右辺は  $1 \times n$ ,  $n \times n$ ,  $n \times 1$  行列の積. 定理 5(1) の  $F'$  を定理 5(1) 自身の  $F$  として代入する前に公式  ${}^t \vec{a} \vec{b} = a_1 b_1 + \dots = {}^t \vec{b} \vec{a}$  で行列の積の見栄えを維持

• 定理 6 は 1 変数の 2 次のテイラーの定理の復習で次回の伏線, 定理 3-5 とは無関係

## 8 . テイラーの定理 (教科書 p.9,10)

---

### 目次 :

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍  $D \subset \mathbb{R}^n$  で定義された  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  について ,

・ 多変数の**平均値の定理** :  $f$  が  $D$  で  $C^1$  級 のとき ,

$\exists \epsilon > 0; U_\epsilon(\vec{a}) \subset D, (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})) \exists \theta = \theta(\vec{x}); 0 < \theta < 1,$   
 $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a} + (\vec{x} - \vec{a})\theta) (\vec{x} - \vec{a})$

・ 多変数の**テイラーの定理** :  $f$  が  $D$  で  $C^2$  級 のとき ,

$\exists \epsilon > 0; U_\epsilon(\vec{a}) \subset D, (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})) \exists \theta = \theta(\vec{x}); 0 < \theta < 1,$   
 $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) (\vec{x} - \vec{a})$   
 $+ \frac{1}{2} {}^t(\vec{x} - \vec{a}) H_f(\vec{a} + \theta(\vec{x} - \vec{a})) (\vec{x} - \vec{a})$

## 教科書 p.9 第2章定理7 (平均値の定理)

---

論理的な根拠 (証明) の詳細は前回の講義 pdf 7 参照 .

・ 多変数の平均値の定理 (教科書定理7):  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍で  $C^1$  級 のとき, 近傍の点  $\vec{x}$  について  $0 < \theta = \theta(\vec{x}) < 1$  が存在して

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a} + \theta(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})$$

・  $\theta$  は  $\vec{x}$  によるが,  $\vec{x}$  の成分間で共通

・ 1変数の平均値 (1次のテイラー) の定理 (1年既出の定理2) で  $f = F$ ,  $a = 0$ ,  $x = 1$  と置くと,  $F(1) = F(0) + F'(\theta)$  と  $0 < \theta < 1$  を満たす  $\theta$  が存在 (これで多変数の定理7も証明できる)

## 続・教科書 p.9 第2章定理7 (平均値の定理)

簡単な1変数の定理2から複雑に見える多変数の定理7を得る理由

・1変数の平均値の定理  $F(1) = F(0) + F'(\theta)$  と  $0 < \theta < 1$  と多変数の平均値の定理7を直接つなぐのが、前回の定理5(1)

・上記の  $F$  を定理5(1)の  $F$  とすると、定理5(1)の結果から  $F'(\theta)$  を  $\nabla f$  で書き直せる

・定理5(1)は1変数多成分の合成関数の微分法則(定理4(1))を1次関数  $\vec{g}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$  に適用したものだだったが、その定数項を  $\vec{b} = \vec{x} - \vec{a}$  と置くと定理7を得る。

・上記最後の項目は、 $n$ 次元空間の2点  $\vec{a}$  と  $\vec{x}$  を線分で(まっすぐ)結んで、全長を1としたときの途中点の位置を1変数実数パラメータ  $t$  で表すことで、 $f(\vec{a})$  から  $f(\vec{x})$  までの線分にそっての値の変化を1変数  $t$  の関数  $F = f \circ \vec{g}$  のグラフに直した、ということ(そうやって複雑に見える多変数の問題を1変数の問題に直した)( $C^1$ 級関数ならそういう理屈が正当化される、ということ)

## 教科書 p.9 第2章定理8 (2次テイラーの定理)

・ 1変数の平均値の定理の特別簡単版  $F(1) = F(0) + F'(\theta)$  の2次のテイラーの定理版 (1年の復習の定理6で  $f = F$ ,  $a = 0$ ,  $x = 1$ )

$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$  と  $0 < \theta < 1$  を満たす  $\theta$  が存在することを使えば, 同様に多変数2次のテイラーの定理を得る

多変数のテイラーの定理:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍で  $C^2$  級のとき, 近傍の点  $\vec{x}$  について  $0 < \theta = \theta(\vec{x}) < 1$  が存在して

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}{}^t(\vec{x} - \vec{a}) H_f(\vec{a} + \theta(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})$$

・ 証明は, 定理7の証明の定理5(1)の代わりに定理5(2)を使うだけ

## 続・教科書 p.9 第2章定理8 (2次テイラーの定理)

---

定義域についての注意：

連続性や全微分可能性を含めて関数に仮定する性質等々の成り立つべき範囲（定義域）を明示せずに来たが，目次のように，注目点の近傍で定義されて仮定する性質が成り立てば十分

・例えば有理関数では分母が0にならない，対数関数では真数正，合成関数の微分では○の右の（先に計算する）関数の値が左の関数の定義域に入っている必要，などを満たす  $\mathbb{R}^n$  の集合（の部分集合）でのみ考えるべき．教科書が時々うるさく定義域を  $D$  と指定するのはその注意（具体計算では多くの場合避けるべき点がわかりやすいので，pdfはお行儀がたいへん悪いが行数を節約）

## 先取り済みの安心な結論

---

---

ここまでの結論：合成関数の微分法則と平均値の（1次のテイラーの）  
定理が成り立つための前提：全微分可性（ $C^1$ 級なら十分）

2次のテイラーの定理が成り立つための前提：1階微分がすべて全微分  
可能（元の関数が $C^2$ 級なら十分）

$C^\infty$ 級（すべての $k$ で $C^k$ 級） ...  $C^2$ 級  $C^1$ 級 全微分可能

どんな関数でこれらが成り立つか？

**安心な結論**：講義 pdf 4 の終わりのほうの表題「連続関数」「続・連続関数」に出てきた関数はすべて（分母が0にならない，対数関数では真数正，の条件を満たすすべての点の集合上で）任意の自然数 $k$ に対して $C^k$ 級である（このことを $C^\infty$ 級と呼ぶ）。

（簡単な理由説明は次ページ以降）



## 続・先取り済みの安心な結論

---

**再掲**．講義 pdf 4 の終わりのほうの表題「連続関数」「続・連続関数」に出てきた関数はすべて（分母が0にならない，対数関数では真数正，の条件を満たすすべての点の集合上で）任意の自然数  $k$  に対して  $C^k$  級

略証．偏微分可能性は1変数の微分と同じ（定義）だから，連続性の議論と同じ順序で進む：（詳しくは次ページ）

（脇道）**安心な結論**をふまえて，以後，行数の節約のため，講義 pdf では関数についての仮定に言及せずにテイラーの定理等を使うことがある（が，数学者はみんな仮定を驚異的にしつこく覚えているので，将来諸君が使うときは，一人前と認めてもらえるまでは，この件に限らず定理を使うたびに仮定を確かめていることに言及すること）

## 続々・先取り済みの安心な結論

---

証明の概観：

- ・ 定数関数の偏導関数は偏微分の定義から恒等的に0とすぐわかる
  - ・ 射影  $f(\vec{x}) = x_i$  の偏導関数は  $\nabla f = \vec{e}_i$  (第  $i$  成分だけ1, それ以外は0の単位ベクトルを値とする定数関数), 以上, 特に偏微分可能,
  - ・ 線形結合の微分と四則の微分法則で知られるとおり, 講義 pdf 4 「連続関数」と同様に帰納的に議論できるので, 多項式は偏微分可能で, 次数が1低い多項式になることも知っているから何回でも繰り返せる(途中から恒等的に0になるだけ),
  - ・ 商の微分によって有理関数も偏微分可能で結果は有理関数,
  - ・ 指数関数や対数関数や三角関数は連続性と同様に別の議論が必要だが, 結論は高校数3に出てくるとおりすべて微分できる)
- (略証終わり)

## 9 . 多変数関数の極値 (教科書 p.12,13)

---

### 目次 :

- ・ 対称行列  $A$  (2次形式  ${}^t \vec{x} A \vec{x}$ ) の符号 (復習)
- ・ 固有値の符号列との同値関係, 首座小行列式の符号列との同値関係
- ・ 関数が定義域内のある点で極小値【極大値】をとるとは,  
「 $\vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})$  ならば  $f(\vec{x}) \geq$  【 $\leq$ 】  $f(\vec{a})$ 」  
を満たす  $\epsilon > 0$  があること  
「井の中の蛙 (かわず)」【「お山の大将 (たいしょう)」】

# 対称行列の符号（復習）

---

1 年線形代数続論の復習（初回講義 pdf 2 を参照）

実対称行列  $A$  は実直交行列で対角化可： ${}^t P P = E$  かつ  $A = P D {}^t P$

・固有ベクトル，固有値との関係： $A \vec{p}_i = \vec{p}_i \alpha_i, i = 1, \dots, n$

・  $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n)$ （講義 pdf 2 の列の小箱表示）， $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

対称行列の固有値は実数だから正負を論じられる：

$A$  が正定値とは  $(\forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n) {}^t \vec{x} A \vec{x} > 0$ （負定値とは  $< 0$ ），

$A$  が非負定値とは  $(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n) {}^t \vec{x} A \vec{x} \geq 0$ （非正定値とは...），その

他の  $A$  は不定符号つまり  $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n; {}^t \vec{x} A \vec{x} > 0$  かつ  $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n; {}^t \vec{x} A \vec{x} < 0$

内積  $h_i(\vec{x}) = (\vec{p}_i, \vec{x})$  と置いて  $A = P D {}^t P$  を代入することで，

・ 2 次形式  ${}^t \vec{x} A \vec{x} = \alpha_1 h_1(\vec{x})^2 + \cdots + \alpha_n h_n(\vec{x})^2$

・  $h_i(\vec{x})$  は  $\vec{x}$  の 1 次同次式（定数項無し）なので，

右辺は左辺の 2 次関数の平方完成．その係数が固有値！

## 教科書 p.12 第3章定理1 (固有値の符号との関係)

**定理1** .  $n$  次実対称行列  $A$  の固有値  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , について, 以下の同値関係が成り立つ (「 $\Leftrightarrow$ 」は「同値」の意味):

$A$  が**正定値**  $\Leftrightarrow \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n$  ( **負定値**  $\Leftrightarrow \alpha_i < 0$  )

$A$  が**非負定値**  $\Leftrightarrow \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n$  ( **非正定値**  $\Leftrightarrow \alpha_i \leq 0$  )

$A$  が**不定符号**  $\Leftrightarrow \exists i, j; \alpha_i > 0, \alpha_j < 0$

証明 . 前ページ最後の平方完成  ${}^t \vec{x} A \vec{x} = \alpha_1 (h_{11} x_1 + \dots + h_{1n} x_n)^2 + \alpha_2 \dots$  と行列の符号の定義 (2次形式の正負) から, 高校1年の1変数の時とまったく同様

当たり前だから教科書に無いけど最初に気づくべき**定理X** .

$A$  が**正定値**  $\Leftrightarrow -A$  が**負定値**

$A$  が**非負定値**  $\Leftrightarrow -A$  が**非正定値**

$A$  が**不定符号**  $\Leftrightarrow -A$  が**不定符号**

証明 .  $-A$  はすべての要素を  $-1$  倍することなので, 定義からわかる

# 小行列

---

---

- ・ **固有値の計算** (定義  $A\vec{x} = \alpha\vec{x}$  を解いて固有ベクトルと同時に求めるか, 線形代数続論の  $|tE - A| = 0$  を解く必要) はめんどい
- ・ **固有値を直接求めず** に { 正定値・...・不定符号 } の区別だけすますために小行列式を用いる公式のための準備
- ・ **小行列**: 行列  $A$  の一部の行と一部の列 (の共通部分にある要素たち) だけで作られた行列 (数学でのいつものように「一部」と言っても全部も許す)

例: (i) 元の行列  $A$  (ii) 特定の要素  $a_{34}$  ( $1 \times 1$  行列),

- ・ **主小行列**: 選ぶ行番号の集合と列番号の集合が等しい小行列 例:  
$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{pmatrix}$$
 (行番号集合, 列番号集合, とともに  $\{2, 5\}$ )

(次ページに続く)

# 小行列式と対称行列の符号

---

(前ページから続き)

• **首座小行列** :  $k = 1, \dots, n$  に対して, 主小行列の定義で書いた行と列の共通選択の番号の集合が  $\{1, \dots, k\}$  である (左上から切り取るということ) 主小行列

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{k1} \\ & \cdots & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

• 用語の意味が (存在も) 「線形代数続論」とやや違うようだが, ここだけの用語として扱う

**定理 2** . (1)  $A$  が正定値  $\Leftrightarrow |A_k| > 0, k = 1, \dots, n$  ( $|A|$  は行列式)

(2)  $A$  が負定値  $\Leftrightarrow (-1)^k |A_k| > 0, k = 1, \dots, n$

(2) の証明は今回の講義 pdf 3 ページ目の **定理 X** と (1) で  $A$  に  $-A$  を代入した主張から得る . (1) の証明は  $i = k + 1, \dots, n$  に対して  $x_i = 0$  である  $\vec{x}$  について  ${}^t \vec{x} A \vec{x}$  を考えるなどの工夫でできるが, 細かいことなので以下略

## 続・小行列式と対称行列の符号

---

定理2のとおり，正定値（負定値）の判定は行列式で問題ないが，

- ・ **行列式による符号判定は固有値の中に0がある行列には無力**
- ・ だから教科書に正定値でない非負定値（負定値でない非正定値）の判定条件が無い
- ・ だから不定符号は部分的判定（十分条件）しか教科書にない（次の定理3）  
（小行列で行（列）を飛び飛びや逆順に選ぶことで「0固有値を避け」れば，必要十分条件に近づくが，固有方程式  $|tE - A| = 0$  を解いた方が早くなるかも）

**定理3**．奇数次の主小行列式の中に正のものと負のものがあるか，偶数次の主小行列式の中に負のものがあれば，元の行列は不定符号

定理3の略証．仮定されている現象が起きれば定理2から正定値や負定値でないことがわかるので不定符号と決まる．

具体例は教科書 p.13 下半分を参照



# 極値

---

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f$  が  $\vec{a}$  で極小値を取るとは  
 $\exists \epsilon > 0; (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})) f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$   
が成り立つこと ( $U_\epsilon(\vec{a})$  は開球, 第1章参照)

「井の中の蛙」(井戸の外にもっと深いマリアナ海溝があるかもしれないが都合の悪いことは見ないで判断する)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f$  が  $\vec{a}$  で極大値を取るとは  
 $\exists \epsilon > 0; (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a})) f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$   
が成り立つこと

「お山の大将」(彼方にもっと高い富士山があるが都合の悪いことは見  
ず判断するのが  $\exists \epsilon > 0; (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a}))$  の「空で無い範囲を取れる  
( $\exists \epsilon$ )」ということの含意)

- ・ 極大値と極小値を合わせて極値と呼ぶ

## 強い意味の極値

---

・前ページの(標準の)極値の定義では便宜のため等号を許すので、たとえば  $f$  が定数関数だとどの点も極小を取りかつ極大を取って、使い道によっては不都合なので、

$f$  が  $\vec{a}$  で強い意味の極小値を取るとは

$$\exists \epsilon > 0; (\forall \vec{x} \in U_\epsilon(\vec{a}) \cap \{\vec{a}\}^c) f(\vec{x}) > f(\vec{a})$$

が成り立つこと

・  $\{\vec{a}\}$  を除く(補集合)のは、細かい注意であって、 $\vec{x} = \vec{a}$  のときは無条件に等号  $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$  が成り立つから(強い意味でない定義では等号を許していたので、この条件は不要だった)

・強い意味の極大値も同様

応用上欲しいのは多分最小値や最大値(最大多数の最大幸福、効用の最大化...)だが、微分法を応用するために近傍だけで決まる極小・極大を重視

## 10 . 条件無し極値問題と微分 (教科書 p.14,15)

### 目次 :

- ・(極値の必要条件)  $f$  が  $\vec{a}$  で極小(大)値をとるとき ,  
 $f$  が  $\vec{a}$  の近傍で  $C^1$  級ならば  $\nabla f(\vec{a}) = 0$   
 $f$  が  $\vec{a}$  の近傍で  $C^2$  級ならば  $H_f(\vec{a})$  は非負(非正)定値
- ・対偶で  $H_f(\vec{a})$  が不定符号ならば  $\vec{a}$  で極値を取らない(鞍点, 峠点)
- ・(極値の十分条件)  $f$  が  $\vec{a}$  の近傍で  $C^2$  級 ,  $\nabla f(\vec{a}) = 0$  かつ  $H_f(\vec{a})$  が正(負)定値ならば  $f$  は  $\vec{a}$  で強い意味の極小(大)

次に進む前に前回 pdf 後半問の前のページの極値の定義を再確認せよ

## 教科書 p.14 第3章定理4(1) (勾配ベクトル)

---

極値を取るための1階偏微分への必要条件

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍で  $C^1$  級のとき,  
 $f$  が  $\vec{a}$  で極小(大)値をとるならば  $\nabla f(\vec{a}) = 0$

証明. 各成分  $x_i$  毎に, 他の成分を  $\vec{a}$  の対応成分に固定したとき,  $x_i$  の1変数関数が  $x_i = a_i$  で極値を取ることになるから (高校~大学1年の) 1変数関数の結果と偏微分の定義 (1変数関数と思って微分, 講義 pdf 6 の2ページ目) から  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$ .  
どの  $i$  でも同じ議論が成り立つ (証明終わり)

極値を取るための必要条件ということは, 方程式  $\nabla f(\vec{x}) = 0$  の解が極値を取る点の候補

## 教科書 p.14 第3章定理4(2)とその系 (ヘッセ行列)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍で  $C^2$  級するとき,

極値を取るための2階偏微分 (ヘッセ行列  $H_f(\vec{a})$ ) への**必要条件**  
 $f$  が  $\vec{a}$  で極小(大)値をとるならば  $H_f(\vec{a})$  は非負(非正)定値

**極値を取らないための2階偏微分への十分条件**

$H_f(\vec{a})$  が不定符号ならば  $\vec{a}$  で極値を取らない (鞍点, 峠点)

・ **系** (論点内容 (仮定) とあまり関係なく一般論や論理だけで, 元の定理から導ける定理を系と呼ぶ) の内容:  $f$  が東経北緯指定すると標高を与える関数のとき, 本州の尾根を縦走する登山家にとって一番  $f$  が小さく (低) く, 太平洋側と日本海側を行き来する運送業にとって一番  $f$  が大きい点に峠の茶屋がある (峠点). 馬の鞍の形もそうなので鞍点と呼ぶことが多い. 教科書に用語は無いが数学的に重要なので単語「鞍点」は使っていく. 非協力ゲームは各自自己の利得を最大化するが, ゼロ和ゲームなら自分にとっては均衡点は鞍点になるので経済学でもとても重要

## 教科書 p.14 第3章定理 4(2) とその系の証明

定理 4(2) の証明 . (i) 2 次のテイラーの定理 (教科書 p.9 第2章定理 8 , 講義 pdf 8 の4 ページ目) で  $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$  と置いて今回の pdf 前々ページの定理 4(1) と極小(大)値の定義を使い, いったん  $t \neq 0$  も仮定して  $t^2$  で割ると  $t\vec{b} H_f(\vec{a} + t\vec{b}) \vec{b}$  の符号が (極小値なら非負, 極大値なら非正と) 決まる .

(ii)  $f$  が  $C^2$  級 (仮定) なので  $H_f$  が連続だから,  $t \neq 0$  としたが絶対値が小さければ任意なので  $t \rightarrow 0$  とすると  $t\vec{b} H_f(\vec{a}) \vec{b}$  の符号も同じとわかる .

(iii)  $\vec{b}$  は任意なので  $\vec{x}$  と名前を付け直せば  $H_f$  が非負定値 (非正定値) の定義 (講義 pdf 9 の2 ページ目) を満たす (証明終わり)

極値を取るための必要条件とは,  $\nabla f(\vec{x}) = 0$  で得た候補のうち, 候補を極大, 極小にわけて絞り込むために使える不等式ということ

## 教科書 p.14 第3章定理5 (ヘッセ行列)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍で  $C^2$  級するとき,

極値を取るための2階偏微分 ( $H_f(\vec{a})$ ) からの**十分条件**

$\nabla f(\vec{a}) = 0$  かつ  $H_f(\vec{a})$  が正定値ならば  $f$  は  $\vec{a}$  で**強い意味の極小**

- ・「正定値」のところが「負定値」なら「極小」を「極大」として成立
- ・(定理4との対比: ) 必要条件は極値であるために成り立つ必要があるから, 1階偏微分と2階偏微分の条件をバラバラに書けるが, 十分条件は**成り立つと極小(極大)が保証される**という意味だから, 1, 2階微分同時に条件を書く必要
- ・仮定が非負(非正)定値**ではなく正(負)定値**なので,  $\vec{a}$  から少しでもずれると  $f$  の値は増える(減る)ので**強い意味の極値**(逆に非負定値しか仮定しないと0固有値方向は増えるか減るか2次までではわからないので十分条件が得られない)
- ・ $f$  が**2次多項式**ならば,  $\nabla f(\vec{a}) = 0$  条件から変位  $\vec{x} - \vec{a}$  の1次の項が無いことと合わせて,  $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$  は2次同次式なので**講義 pdf 9 の  $A = H_f(\vec{a})$  の対角化と2次形式の平方完成の関係から, 上記(教科書定理5)が成立!**

## 教科書 p.14 第3章定理5の略証

---

(0) 3次以上(や指数関数等)が結論に影響しないことを言うために講義pdf 7まで(教科書第2章で)長々と準備した2次のテイラーの定理を用いる(抽象的な議論を苦手を感じる諸君は $f$ が2次式の場合に講義pdf 9から定理5の結論を導いてみよ)

(i) 教科書の証明で小行列の議論が長いが、言ってることは、 $H_f(\vec{x})$ の固有値が $\vec{x}$ の連続関数ということ

(ii)  $H_f$ の固有値の連続性を認めれば、連続関数の常のとおり、 $A = H_f(\vec{a})$ が正定値という定理の仮定から、 $\vec{x}$ が $\vec{a}$ の十分近く(小さな $\epsilon$ の $\epsilon$ -近傍)にいれば、 $H_f(\vec{x})$ も正定値だから、テイラーの定理の剰余項は $\vec{x}$ が $\vec{a}$ の近傍にいる限り正( $A$ が負定値なら剰余項は近傍で負)

(iii) テイラーの定理(教科書p.9第2章定理8)から、剰余項が正ならば $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ の仮定と合わせて $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$ が $\vec{a}$ の近傍で $\vec{x} \neq \vec{a}$ のとき成り立つから極小の定義に照らして、 $f$ は $\vec{a}$ で極小値を取る

(iii') もちろん $A$ が負定値ならば不等号が逆になるだけなので $f$ は $\vec{a}$ で極大値  
(略証終わり)



## 例1 (教科書 p.15)

---

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^3 - 3xz - 4y .$$

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 - 3z, 2y - 4, 3z^2 - 3x) , H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix} .$$

$\nabla f(x, y, z) = 0$  の実数解は2つ,  $\vec{x}_1 = (0, 2, 0)$  と  $\vec{x}_2 = (1, 2, 1)$  と置く .

$A_1 = H_f(\vec{x}_1)$  の固有多項式は  $|tE - A_1| = (t^2 - 9)(t - 2)$  だから固有値は  $\pm 3, 2$  なので  $A_1$  は不定符号だから第3章定理4の系から  $\vec{x}_1$  は  $f$  の鞍点 (極値ではない) .

同様に  $A_2 = H_f(\vec{x}_2)$  は  $|tE - A_2| = ((t - 6)^2 - 9)(t - 2) = (t - 3)(t - 9)(t - 2)$  だから固有値は  $2, 3, 9$  なので  $A_2$  は正定値だから第3章定理5から ,

$f$  は  $(x, y, z) = \vec{x}_2 = (1, 2, 1)$  で (強い意味の) 極小値  $f(1, 2, 1) = -5$  を取る .

**注** .  $g(x, z) = f(x, 2, z)$  で定義される2変数関数  $g$  で変数を東経と北緯,  $g$  を標高として地図の等高線を書き, 上記の極小値を与える点と鞍点付近を含めてどんな地形か想像を巡らして見よ .

## 例2 (教科書 p.15)

---

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i^3 - x_i^2) \cdot \nabla f(\vec{x}) = (3x_1^2 - 2x_1, \dots, 3x_n^2 - 2x_n),$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & 6x_n - 2 \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(\vec{x}) = 0$  の実数解は  $2^n$  個，各成分ごとに 0 または  $\frac{2}{3}$  の可能なすべての組合せ． $H_f(\vec{x})$  はすべての  $\vec{x}$  で対角行列なので主対角線上の  $n$  個の要素が固有値．すべての座標成分が  $\frac{2}{3}$  のとき正定値，すべて 0 のとき負定値，それ以外の  $2^n - 2$  個の  $\nabla f(\vec{x}) = 0$  を満たす点（定理 4(1) によって極値を与える候補の点）では不定符号だから鞍点（極値は取らない）．

定理 5 と以上から， $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)$  と  $\vec{x}_1 = (\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3})$  と置くと（いずれも強い意味で） $f$  は  $\vec{x}_0$  で極大値  $f(\vec{x}_0) = 0$ ， $\vec{x}_1$  で極小値  $f(\vec{x}_1) = -\frac{4n}{27}$  を取る．

## 1 1 . 極値 ( 2変数・等式条件 ) ( 教科書 p.16,17 )

目次 :

未定乗数法 ( 2変数関数の場合 ): 実2変数関数  $f$  と  $g$  が  $C^1$  級のとき , 条件  $g = 0$  の下で  $f$  が点  $(a, b)$  で極値を取るならば ,

$$(1) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad (\text{条件の退化}) , \text{ または}$$

$$(2) L = f + \lambda g \text{ について } \frac{\partial L}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial L}{\partial y}(a, b) = 0 \text{ を満たす } \lambda \in \mathbb{R}$$

がある

## 陰関数定理（2変数）

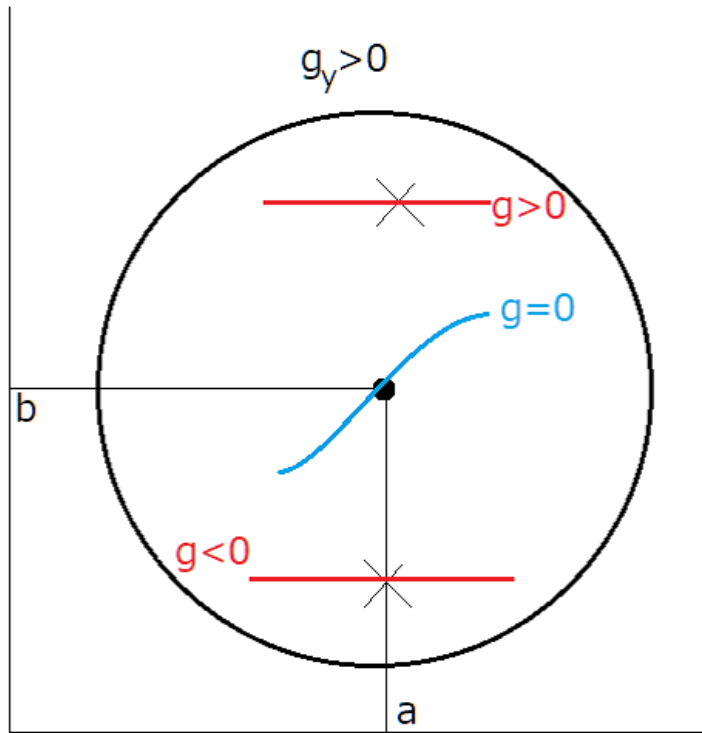
---

（わかりにくいと感じるけど教科書の記述を口実にして  $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$  などの行数節約記号に戻る）

**2変数の陰関数定理**：点  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  とその近傍  $U_r(a, b)$ （つまり  $r > 0$  の存在）と  $C^1$  級関数  $g : U_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  があって、 $g(a, b) = 0$ 、 $g_y(a, b) \neq 0$  が成り立っているとき、 $\epsilon > 0$  がとれて、 $\phi(a) = b$  と、 $a$  を中心とする幅  $2\epsilon$  の开区間上で恒等的に  $g(x, \phi(x)) = 0$  を満たす連続関数  $\phi : (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  がただ一つ存在し、しかも同じ区間の各点で微分可能である。

微分可能と分かれば合成関数の微分公式（教科書 p.6 第2章定理 4(1) で  $m = 2$ 、 $g_1(x) = x$ 、 $g_2(x) = \phi(x)$ ）を  $g(x, \phi(x)) = 0$  の微分の左辺に使うと、 $g_x(x, \phi(x)) + g_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$ 。  $\phi(a) = b$  と合わせることで、 $\phi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$  と定まる！

# 陰関数定理（2変数）の $\phi$ の存在の証明



仮定  $g_y(a, b) \neq 0$  から  $g_y(a, b) > 0$  か  $g_y(a, b) < 0$  . 後者なら以下の議論で  $y$  軸方向上下逆にすれば良いので  $g_y(a, b) > 0$  の場合で証明する .  $C^1$  級の仮定から  $g_y$  も連続なので点  $(a, b)$  を中心とするある円内で  $g_y > 0$  (つまり, 図の黒円内で  $g$  は  $y$  方向に増加関数) .  $g(a, b) = 0$  なので, 図の  $y > b$  で  $g(a, y) > 0$  ,  $y < b$  で  $g(a, y) < 0$  (図の  $\times$  印) .  $C^1$  級は  $C^0$  級, つまり  $g$  も連続なので, 図の赤線の範囲も  $g(x, y)$  の符号は不変 .  $g_y > 0$  だから各  $x$  ごとに上下の赤線の間で  $g < 0$  から  $g > 0$  に増加するから  $g(x, y) = 0$  となる  $y$  が  $x$  ごとにただ一つ決まる . つまり  $y$  は  $x$  の関数 . それを  $y = \phi(x)$  と置く (図の青線のグラフ) と,  $g(x, \phi(x)) = 0$  が恒等式 (証明終わり)

$g$  を具体的に与えてない (公式を作る定理) ので  $\phi$  も具体的にないが存在が証明できた .

## 未定乗数法への道

---

---

- (i) 恒等式とは等式条件  $g = 0$  の代わりに  $y = \phi(x)$  で良いということ
- (ii) つまり, 最初の  $g = 0$  条件下  $f$  の極値問題は  $h(x) = f(x, \phi(x))$  の条件無し1変数極値問題と (候補の点  $(a, b)$  の近傍で) 同値
- (iii) よって,  $(a, b)$  が等式条件下極値を与えることの必要条件として (1変数条件無しの場合の)  $h'(a) = 0$  を得る
- (iv) (ii)(iii) の青い式と合成関数の微分法則と  $\phi(a) = b$  と2ページ前の陰関数定理の最後の行の青い式から具体形不明の関数  $\phi'(a)$  を消去:  
 $f_x(a, b) g_y(a, b) = f_y(a, b) g_x(a, b)$
- (v) (iv) が等式条件下極値の必要条件なのだが, 条件無し2変数の  $\nabla f(a, b) = 0$  と見かけが違いすぎて覚えにくいので  
未定乗数法: 条件無しの際の1次の必要条件  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$  に似た (覚えやすい) 形に (昔の偉い人たちが) (iv) を整形した (次ページ)

## 未定乗数法

---

・陰関数定理から得た，2変数等式  $g = 0$  条件下極値問題の1階微分必要条件  $f_x(a, b) g_y(a, b) = f_y(a, b) g_x(a, b)$  を見やすくするために，

$$\lambda = -\frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ と置いて今の式に代入すると } f_x(a, b) = -\lambda g_x(a, b)$$

だから  $L = f + \lambda g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  と置くと  $\nabla L(a, b) = 0$  を得て，条件無しの  $\nabla f(a, b) = 0$  と似た形！

- ・未知数  $\lambda$  を増やしたが，等式条件  $g(a, b) = 0$  が方程式に参加して間に合う
- ・陰関数定理以来  $g_y(a, b) \neq 0$  を仮定したが  $g_x(a, b) \neq 0$  なら  $x$  と  $y$  の役割を入れ替えれば良いので，等式条件下極値の必要条件として(1)  $\nabla g(a, b) = \vec{0}$  または(2)  $\nabla L(a, b) = 0$  を採用可能（未定乗数法）

## 未定乗数法（2変数）

教科書 p.16 第4章定理1（2変数のときの未定乗数法）.  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  の近傍  $U_r(a, b)$  上で  $C^1$  級の2変数実関数  $f$  と  $g$  に対して, 条件  $g = 0$  の下で  $f$  が  $(a, b)$  で極値を取るならば

(1)  $\nabla g(a, b) = \vec{0}$  または

(2)  $L = f + \lambda g$  について  $\nabla L(a, b) = 0$  となる  $\lambda$  がある

・注 . (1) または (2)  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \nabla f(a, b) \\ \nabla g(a, b) \end{vmatrix} = 0$

(実際, 行列式が0ということは各行(各列でも良いが)の「小箱」のベクトルたちが1次従属であることと同値なので,  $c \nabla f(a, b) + d \nabla g(a, b) = 0$  を満たす  $(c, d) \neq (0, 0)$  があることと同値だが,

$c \neq 0$  ならば  $\lambda = \frac{d}{c}$  と置くと (2) の  $\nabla L(a, b) = 0$  と同値だし, さもなければ  $c = 0$  かつ  $d \neq 0$  だから (1) と同値.)

・教科書にある上記注は, 未定乗数法が陰関数経由の泥臭い議論ではなく, 線形代数と勾配ベクトルを用いた別の証明があることを示唆する. それは2変数関数ではいらなないかもしれないが, 一般の多変数関数の場合に見通しよく理解するのに役立つかもしれない. ただし, 教科書も講義も一般の多変数の議論に深入りすることは避ける.



# 教科書 p.21 例 1

**例** .  $x^4 + y^4 = 1$  の下で  $xy^2$  の最大値と最小値 .

**注** . 高校でも注意していたが , 最大値とは , 考えている範囲  $S$  のどれかの点  $\vec{a} \in S$  で  $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$  が全ての  $\vec{x} \in S$  に対して成り立つときを言うので , たとえば  $f(x) = -e^{-x}$  は 0 にいくらでも近づくが  $f(a) = 0$  となる点は無いので **最大値無し** (最小値も同様) . 経済学など応用の場面では最大値がある問題を最初から考えることが多いので下記 (i) のような議論はピンとこないかもしれないが , 定理の仮定を満たすための数学的口実と思ってもさしあたり差し支えない .

**解** . (0) (準備)  $f(x, y) = xy^2$  と  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$  で 2 変数  $C^1$  級関数 (多項式)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を定義すると , 等式条件は  $g = 0$  と書ける .

(i) (最大値最小値の存在) 条件を満たす点の集合を  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$  と置くと ,  $S$  は  $0 \leq x^4 = 1 - y^4 \leq 1$  と  $0 \leq y^4 = 1 - x^4 \leq 1$  から有界閉集合 (教科書第 1 章 , 講義 pdf 5 参照) であって ,  $f$  は  $C^1$  級だから  $C^0$  級 (または多項式) , すなわち連続関数でもあるので最大値の原理から , 最大値と最小値がある (同前参照) . その候補は条件  $g = 0$  の下での  $f$  の極値であり ,  $f$  と  $g$  は  $C^1$  級だから , それを求めるのに未定乗数法が使える .

(ii) (条件の退化する点)  $\nabla g(x, y) = 0$  を解くと ,  $x = y = 0$  .  $g(0, 0) = -1 \neq 0$  なので条件を満たさないから極値を取る点の候補ではない (次ページに続く)

## 続・教科書 p.21 例 1

---

(前ページからの続き) (iii) (未定乗数法)  $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy^2 + \lambda(x^4 + y^4 - 1)$  とおいて,  $\nabla L(x, y) = \vec{0}$  を解く. 第2成分の  $L_y(x, y) = 2xy + 4\lambda y^3 = 0$  から  $y = 0$  か,  $y \neq 0$  かつ  $x = -2\lambda y^2$ .  $y = 0$  のとき  $L_x(x, y) = y^2 + 4\lambda x^3 = 0$  から  $\lambda = 0$  か  $x = 0$  ( $(0, 0)$  は条件を満たさないことを既に見たので最後の選択肢は除外).

(iii-1) ( $y = \lambda = 0$  のとき) 等式条件  $g(x, y) = 0$  から候補は  $f(\pm 1, 0) = 0$ .

(iii-2) ( $x = -2\lambda y^2$ ,  $y \neq 0$  のとき)  $L_x(x, y) = 0$  に  $x$  を代入消去して  $y \neq 0$  を使うと  $2\lambda y = \pm 2^{-1/4}$  なので  $x = -2\lambda y^2 = \mp 2^{-1/4} y$ .  $g(x, y) = 0$  と合わせると  $(x, y) = (\pm(\frac{2}{3})^{1/4}, \pm(\frac{1}{3})^{1/4})$  が候補 (複号任意で4個) で  $f(x, y) = xy^2 = \pm(\frac{2}{27})^{1/4}$  (複号は  $x$  の符号に一致).

(iv) 以上の候補を比べると最大値は  $(x, y) = ((\frac{2}{3})^{1/4}, \pm(\frac{1}{3})^{1/4})$  のとき  $f(x, y) = (\frac{2}{27})^{1/4}$ , 最小値は  $(x, y) = (-(\frac{2}{3})^{1/4}, \pm(\frac{1}{3})^{1/4})$  のとき  $f(x, y) = -(\frac{2}{27})^{1/4}$ .

( (iii-1) の  $(\pm 1, 0)$  は極値だが最大値や最小値では無い.)

## 1 2 . 等式条件下の極値 (教科書 p.18,19)

---

### 目次 :

・多変数の未定乗数法 :  $n$  変数  $\mathbb{R}^m$  値関数  $\vec{g}$  と  $n$  変数実数値関数  $f$  が  $C^1$  級するとき, 条件  $\vec{g} = \vec{0}$  (すなわち, 実数換算  $m$  本の等式条件  $g_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) の下で  $f$  が  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  で極値を取るならば,

(1) (条件の退化) ヤコビ行列  $\nabla \vec{g}(\vec{a})$  の rank が  $m$  未満, または

(2) (未定乗数法)  $L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$  について

$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\vec{a}) = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0$  を満たす  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  が

ある

# 未定乗数法

教科書 p.17 第4章定理2 (未定乗数法) .  $n$  と  $m$  を  $m < n$  を満たす自然数たちとする .  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  の近傍  $U_r(\vec{a}) \subset \mathbb{R}^n$  上でいずれも  $C^1$

級の , 実数値関数  $f : U_r(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\mathbb{R}^m$  値関数  $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} :$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して ,  $\vec{g}(\vec{a}) = \vec{0}$  が成り立つとき , 条件  $\vec{g} = \vec{0}$  の下で  $f$  が  $\vec{a}$  で極値を取るならば

(1) (条件の退化) ヤコビ行列  $\nabla \vec{g}(\vec{a})$  の rank が  $m$  未満 , または

(2) (未定乗数法)  $L = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$  について

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\vec{a}) = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0 \text{ を満たす}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  がある

## 注（未定乗数法）

- ・ 前回の2変数関数の場合を思い出すと、等式条件  $g_i = 0$  ごとにそれを解いて変数を消去すれば  $n - m$  変数関数の条件無し極値問題に帰着するというのが雑な期待
- ・ 候補の点  $\vec{a}$  の近傍で等式条件の勾配ベクトルたちが1次従属だと、実質の方程式が減るから、等式条件のヤコビ行列のランクを  $R = \text{rank } \nabla \vec{g}(\vec{a})$  と置くと、本当に消去できるのは  $R$  個の変数だから、 $n > R$  なら変数が残って未定乗数法が使えるはずだが、簡単のため  $n > m$  を仮定したのが教科書の定理であり、 $R = m$  でないとき（条件の退化）は消去できる変数が減るので、扱いが異なるというのが、定理の場合分け(1)（教科書注2は以上の絡み）
- ・ ランク  $R$  は行列の行標準変形後の標準形の対角線に並ぶ「①」の個数（1年の線形代数参照）だから  $R \leq \min\{m, n\}$  であって、 $m < n$  のとき、教科書の「 $m$  次小行列式が0」は  $R < m$  と同値で、論理的には単なる言い換え

**注**．前回の2変数の時の定理1の注と同様に，

(1) または (2)  $\Leftrightarrow \nabla f(\vec{a}), \nabla g_i(\vec{a}), i = 1, \dots, m$ , が1次従属

$$\Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \nabla f(\vec{a}) \\ \nabla \vec{g}(\vec{a}) \end{pmatrix} \leq m$$

## 教科書 p.21 例2

**例** . 条件  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ ,  $x + 2y + 3z = 0$  の下で  $x + y + z$  の最大最小

**解** . (0) (準備)  $f(x, y, z) = x + y + z$  と  $g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$  と  $g_2(x, y, z) = x + 2y + 3z$  で3変数関数  $C^1$  級 (多項式)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  を定義して  $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  と置くと等

式条件は  $\vec{g} = \vec{0}$  と書ける .

(i) (最大値最小値の存在)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{g}(x, y, z) = \vec{0}\}$  と置くと,  $(x, y, z) \in S$  ならば  $g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$  を満たすので,  $|x| \leq \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = 1$  および, 同様に  $|y| \leq 1$  と  $|z| \leq 1$  から  $S$  は有界であり, 連続関数の等号で定義されている集合なので閉集合  $f$  は  $C^1$  級だから  $C^0$  級 (または多項式), すなわち連続関数でもあるので最大値の原理から, 最大値と最小値がある (以上全て前回の例と同様に教科書第1章, 講義 pdf 5 参照). その候補は条件  $\vec{g} = \vec{0}$  の下での  $f$  の極値であり,  $f$  と  $\vec{g}$  は  $C^1$  級だから未定乗数法が使える.  
(次ページに続く)

## 続・教科書 p.21 例2

---

(前ページからの続き)

(ii) (条件の退化する点)  $\nabla g_1(x, y, z) = (2x \ 4y \ 6z)$  と  $\nabla g_2(x, y, z) = (1 \ 2 \ 3)$  が1次従属になるのは  $\nabla g_2(x, y, z) \neq (0 \ 0 \ 0)$  なので  $(2x \ 4y \ 6z) = k(1 \ 2 \ 3)$  となる  $k \in \mathbb{R}$  があるとき, つまり  $x = y = z$  のときだが,  $g_2(x, x, x) = 0$  から  $x = y = z = 0$  となって  $g_1(0, 0, 0) = -1 \neq 0$  だから等式条件不成立で, 極値を取る点の候補ではない.

(iii) (未定乗数法)  $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$  とおいて,  $\nabla L(x, y, z) = \vec{0}$  を解く.

(iv) ( $\lambda_i$  たちの消去) 単なる連立高々3次方程式だから, どう解いても良いが, 例え

ば  $A = \begin{pmatrix} \nabla f(x, y, z) \\ \nabla g_1(x, y, z) \\ \nabla g_2(x, y, z) \end{pmatrix}$  と置くと  $A$  が  $3 \times 3$  行列で  $\nabla L(x, y, z) = (1 \ \lambda_1 \ \lambda_2) A$

と書けていることを次のように利用する. もし逆行列  $A^{-1}$  があれば  $A^{-1}$  を右から  $\nabla L(x, y, z) = \vec{0}$  に掛けると  $(1 \ \lambda_1 \ \lambda_2) = (0 \ 0 \ 0)$  となるので矛盾. つまり  $A$  は正則でない. これは行列式  $|A| = 0$  と同値 (1年の線形代数参照).  $3 \times 3$  の行列式はサラスの方法でも掃き出し法でも好きに解けば良くて  $0 = |A| = 2x - 8y + 6z$ .

(次ページに続く)

## 続々・教科書 p.21 例2

---

(前ページからの続き)

(v) (等式条件との連立) (iv) と等式条件  $g_2 = 0$  から,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
を得る. 行標準変形(1年線形代数参照)で

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
と同値だから  $y = 0$  と  $x = -3z$  を得る. 未使用の

$g_1(x, y, z) = 0$  に代入すると  $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \mp\frac{1}{6}\sqrt{3})$  (副合同順) と, 極値の候補を与える点が決まる.

(vi) ( $f$  の値の比較)  $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \mp\frac{1}{6}\sqrt{3}) = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$  なので  $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{6}\sqrt{3})$  で最大値  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ,  $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{6}\sqrt{3})$  で最小値  $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$  を得る.

(終わり)



## 1 3 . 非負条件と等式条件下の極値 (教科書 p.20)

今回は, 前回と今回の間の略解を両方とも掲載します

**目次:**  $m < n$  とする

$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}, \vec{x} \geq \vec{0} \}$  が有界閉集合の場合

最大値の定理から, 連続関数は  $S$  で最大値と最小値がある

$f: \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \geq \vec{0} \} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\vec{g}: \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \geq \vec{0} \} \rightarrow \mathbb{R}^m$  は連続で, 内部で  $C^1$  級とし,  $f$  が  $\vec{a} \in S$  で最大(最小)をとるならば

(0)  $a_1 \cdots a_n = 0$  (少なくとも1つが0の意味) (ここだけ新しい), または,

(1)  $a_i$  たちが全て正で  $\text{rank } \nabla \vec{g}(\vec{a}) < m$ , または,

(2)  $a_i$  たちが全て正で  $L = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$  について

$Lx_1(\vec{a}) = \cdots = Lx_n(\vec{a}) = 0$  を満たす  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  がある

(証明は, 境界点 ( $a_i = 0$  が少なくとも1つの  $i$  で成り立つ) 以外での極値は, 非負条件が関係なくなるから, 等式条件だけの場合に帰着)

## 教科書 p.21 例3

**例** .  $\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, m$  を正の定数とし, 予算制約  $p_1x_1 + p_2x_2 = m$  と  $x_1 \geq 0$  と  $x_2 \geq 0$  の条件下での効用  $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$  の最大・最小を計算する

**注** . ・教科書は  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  も仮定しているが, 結果が少し簡単になるだけで途中の計算は変わらないのでここでは仮定しない

・経済学で最小化は狙わないし結論はわかりきっているが, 同時に解けるので計算チェックを兼ねて調べる

**解** . (0) (準備)  $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$  と  $g(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - m$  で2変数実関数  $f$  と  $g$  を定義すると条件は  $g = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  .

(i) (最大値最小値の存在) 条件を満たす点は第1象限の端点を含む線分なので有界閉集合で,  $f$  は第1象限で連続関数だから最大値と最小値がある. また両端点を除けば  $f$  は  $C^1$  でもあるから未定乗数法が使える.

(ii) (端点)  $x_1x_2 = 0$  すなわち  $x_1 = 0$  または  $x_2 = 0$  のとき  $f(x_1, x_2) = 0$  . 以下  $x_1 > 0$  かつ  $x_2 > 0$  とする.

(次ページに続く)

## 続・教科書 p.21 例3

---

(前ページからの続き)

(iii) (等式条件の退化する点)  $\nabla g(x_1, x_2) = (p_1 \ p_2)$  で価格は正の定数としたから  $\nabla g \neq \vec{0}$  . よってここに候補は無い,

(iv) (未定乗数法)  $L = f + \lambda g$  に対して  $\nabla L(x_1, x_2) = \vec{0}$  を若干整理すると,  
$$-x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} \lambda p_1 x_1 = \frac{1}{\alpha_2} \lambda p_2 x_2 .$$

(v) ( $\lambda$ の消去) 仮定から左辺は負で0ではないので  $\lambda \neq 0$  だから  $\frac{p_1}{\alpha_1} x_1 = \frac{p_2}{\alpha_2} x_2 .$

(vi) (等式条件との連立) 予算制約  $g = 0$  と (v) を合わせると

$(x_1, x_2) = \frac{m}{\alpha_1 + \alpha_2} \left( \frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2} \right)$  でこの点での  $f$  の値は  
 $\left( \frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{m}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2}$  である .

(vii) ( $f$ の値の比較) (結果は初級ミクロを勉強した諸君は周知と思うが,) (ii)の端点(一方の財を購入しない選択)が効用最小(0)で(vi)の点(予算を  $\alpha_1 : \alpha_2$  で配分する選択)が効用最大である .

## 例．相加平均と相乗平均の関係

---

**例**． $n$  が自然数， $i = 1, \dots, n$  に対して  $x_i \geq 0$  ならば相加平均  $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$  は相乗平均  $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$  以上である．

**注**．数学的に基礎的な事実で種々の証明が考え得るが，あえて未定乗数法を用いた解を考えてみる．

**解**． $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = m$  を固定して相乗平均の最大値を計算してそれが  $m$  以下であることが言えれば良い．各変数は  $0$  以上  $nm$  以下だから取り得る  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  の集合は有界閉集合で， $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$  で定義される  $n$  変数関数は連続関数だから最大値の定理から相乗平均の最大値は存在する．

どれかの変数が  $0$  のとき相乗平均は  $0$  である．すべての変数が正ならば相乗平均は正だから， $0$  は最大値では無いので，すべての変数が正のところに最大値が存在する．  
(次ページに続く)

## 続・相加平均と相乗平均の関係

(前ページからの続き)

そこで全ての変数が正の場合を調べることにして,  $y_i = \log x_i$  に変数変換すると,

$$g(\vec{y}) = e^{y_1} + \dots + e^{y_n} - nm \text{ と } f(\vec{y}) = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \text{ で決まる } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

と  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対して等式条件  $g = 0$  の下で  $\mathbb{R}^n$  での  $f$  の最大値  $f_m$  を求めれば, 元の相乗平均の, すべての  $x_i$  たちが正の範囲での最大値は  $e^{f_m}$  である. 最大値は極大なので, 未定乗数法で候補を探す.

$\nabla g(\vec{y}) = (e^{y_1} \dots e^{y_n})$  は  $\vec{0}$  になることはないので, 等式条件が退化することは無い. そこで最大値の候補は  $L = f + \lambda g$  と置くと  $\nabla L(\vec{y}) = \vec{0}$  の解である.

具体的に計算すると  $\frac{1}{n} + \lambda e^{y_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n,$  を得るので,  $y_1 = \dots =$

$y_n = -\log(-\lambda n)$  と決まるから,  $g(\vec{y}) = 0$  に代入すると  $-\frac{1}{\lambda} - nm = 0$  だから

$\lambda = -\frac{1}{nm}$  となって  $y_1 = \dots = y_n = \log m$  と決まる. これが唯一の候補なので最大値をこのときとるから,  $f_m = f(\log m, \dots, \log m) = \log m$ . よって最初に戻って相乗平均の最大値は  $e^{f_m} = m$ . すなわち, 相乗平均は相加平均  $m$  以下である.

(終わり)

## 文献

---

標準のテキスト（水色）「経済数学」慶應義塾大学経済学部  
春学期 経済数学I 第1 - 4章  
（秋学期 経済数学II 春学期の続き 第5 - 7章）

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/2nen.htm>

Google検索キーワード 服部哲弥