微分積分入門（春学期），微分積分（秋学期）

服部哲弥

2009年度慶応大学経済学部

ガイダンス

標準のテキスト（緑）「微分積分」慶應義塾大学経済学部

・評価はほとんど期末試験．演習は出席点で，ボーダーラインの時には考慮．
・演習は教科書の問題中心．

先輩先生方の皆さんへのメッセージ

・最初やさしく見えても講義には出るように.（意外に進度は速い.）おおよそ出席して講義を聴いた人が合格するくらいの合格水準．

・予習はだいじ．試験は教科書と演習問題準拠．

・演習（２回目から）は，

－ さっさと正解してさっさと退出なら文句ない．以下は，そうでない場合．

－ 正解を写して○をつけるくらいならば，隣と相談ＯＫ．

－ 隣との相談は一方的に書き写すだけでなく，考え方を検討し合うほうがよい．

－正解は写すためではなく，理解するため．演習時間の枠をいっぱいに使ってＯＫ．

・秋学期の「微分積分」は必修.「微分積分」は「微分積分入門」の続き　－　「微分積分入門」の内容が必須

春学期　微分積分入門　選択　第１－２章

秋学期　微分積分　必修　春学期の続き　第３－４章，補遺

イントロ　ー　経済学に微積分は

経済理論の初等教科書に必ず出てくる言葉

限界効用

財・商品（物やサービス）を１単位追加消費したときの効用（満足）の増加

限界効用逓減（ていげん）の法則

一時に消費する財（商品）を増やすと，追加分からの効用（感じる満足度の増加）が小さくなること

「人間とはそういうものだ」　→　価格決定（安定性）理論

微分積分学

限界効用　＝　数学的には，効用関数の財の消費量に関する微分

効用関数（総効用）$U = U(x)$, x: 財の量

限界効用＝$U'(x) = \dfrac{dU}{dx}(x)$

限界効用逓減の法則：　$U''(x) \leqq 0$　**とってもコンパクト！**

定量的な研究に基づく経済学的法則は解析学によって理解するのが自然
（自然な理解だから，数式表現がコンパクト）

数学の役割

- **厳密＝論理的に完璧な実現**
  - **知識（公式）の蓄積性** （ピタゴラスの定理は今も正しい）
  - **便利** （使える方法・公式は，どれを使っても同結果と保証されている）
  - **複雑な対象への拡張性** （どこまで拡張しても破綻しないcf.　自然法則，社会法則→適用限界）
  - **定量的研究** （数値計算等の近似の誤差保証，微妙な場合の判定）

- 前世紀以降の経済学の研究は，数学の概念を前提
  - 定量的研究では高度な数学が必要（計量経済学，数理ファイナンス）
  - 数式をいじらない分野に進んでも，知らなければ出遅れる．

marginal utility　　“law” of diminishing marginal utility

- 経済学における数学の可能性を信じる立場でも，否定的な立場でも，数学的概念を前提にして研究が行われる以上は，知らないわけにはいかない．

- 理学：本人の利益追求とは異なる（おたく？）活動の蓄積　→　使わない手はない（敷居の高さは，価値を認めた証としての入会の儀式？）

数学が苦手な諸君も，我慢して受講して単位を取っておくことを強く勧めます.（あとから学ぶ余裕はたぶん無いから.）

復習　ー　数学的帰納法

テキスト最後 p. i - x「基礎知識のまとめ」　（高校数学I,II,A,B）

自然数nを含む主張が全てのnで成り立つことの証明方法．

(1) $n = 1$のとき成り立つことは直接$n = 1$を代入して計算して証明

(2) $n = k$の時成り立つことを**仮定**して，$n = k + 1$のときも成り立つことを証明

•(1)(2)が済めば，全てのnについて，主張が証明できたことになる．

数学的帰納法の例

主張：　定数aが正のとき，全ての自然数nに対して，
$(1+a)^n \geqq 1+na$.

証明：

(1) $n=1$のとき，左辺も右辺も$1+a$に等しいから，成り立つ．
(≧は>か=かが成り立つことを主張．どちらになるかnによって違って良い.)

(2) $n=k$のとき成り立つとする．（つまり，$(1+a)^k \geqq 1+ka$を使って良いとする.）このとき，$1+a \geqq 1 > 0$に注意すると

$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geqq (1+ka)(1+a)$
$= 1+ka+a+ka^2 \geqq 1+(k+1)a$.

これは主張が$n=k+1$のとき成り立つことを証明したことになる．

(1)(2)から，全ての自然数$n=1,2,3,\cdots$に対して
$(1+a)^n \geqq 1+na$.

証明終わり

2項展開（2項定理）

記号（階乗）： $0! = 1! = 1,\ n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\ (n \geqq 2)$．

記号（組み合わせの場合の数）： $${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n)$．

性質（i） $${}_n\mathrm{C}_0 = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1 = {}_n\mathrm{C}_n$$

性質（ii） $k = 1, 2, 3, \cdots,\ r = 1, 2, \cdots, k$ **に対して，**

$${}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1} = \frac{k!}{(k-r)!r!} + \frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!}$$

$$= \frac{k!(k-r+1)}{(k-r+1)!r!} + \frac{k!r}{(k-r+1)!r!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!} = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$$

a, b **実数のとき，** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **（a について降べきの順に表示）**

主張： **任意の自然数 n に対して（n が自然数ならば何であっても）**

$$(a+b)^n$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

2項展開　ー　証明

証明： (1) $n=1$ のときは ${}_1\mathrm{C}_0={}_1\mathrm{C}_1=1$ から明らか．
(2) $n=k$ のとき成り立つとすると，$n=k+1$ のとき，
$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$
$={}_k\mathrm{C}_0a^k(a+b)+{}_k\mathrm{C}_1a^{k-1}b(a+b)+{}_k\mathrm{C}_2a^{k-2}b^2(a+b)$
2項係数の性質 (i)(ii) を使うと（テキスト参照），
$={}_{k+1}\mathrm{C}_0a^{k+1}+{}_{k+1}\mathrm{C}_1a^kb+{}_{k+1}\mathrm{C}_2a^{k-1}b^2+\cdots+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}b^{k+1}$
よって $n=k+1$ のときも主張が成り立つ．

証明終わり

高校数学の勉強が不足していると自覚する諸君は
テキスト最後 p. i - x 「基礎知識のまとめ」を復習してください．

p.1–3 数列の極限

$\mathbb{R}$: 実数の集合．

Real(実) ＋太字（テキスト参照）

→　板書は太く塗る代わりに縦に線を追加

→　今はそれが数学界で活字として通用

実数列 $\{a_n\}$ が極限値 α に収束する

(記号：　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とか $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$)

とは，$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ が α に近づくこと．

注．実数列が収束するとしたら極限値は実数

何かの実数に収束するとき，収束するという．

収束しないとき，発散するという．

例．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

例．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ は発散

p.2 数列の発散と収束

限りなく大きくなって発散するとき**正の無限大に発散**

（記号： $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$）（例： $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$）

限りなく小さくなって発散するとき負の無限大に発散

（記号： $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$）（例： $\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$）

収束も正負の無限大にも発散しないとき**振動**ということもある

（例： $\{(-1)^n n\}$ は振動）

定理 1． $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

定理 1'． $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

定理 1"． $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

例． $(-1)^n n$ は振動するが，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-1)^n n} = 0$

p.2 数列の収束　基本性質

定理2． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ は同値．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$ は同値．

後半は，$b_n = a_n - \alpha$ で定義される数列に前半を適用すれば得られる．

例5． **等比数列**の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n$ は，$a > 1$ ならば $+\infty$，$a = 1$ ならば 1，$-1 < a < 1$ ならば 0，$a \leqq -1$ ならば振動．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ **に基づく証明**：　$h = a - 1 > 0$ のとき，$a^n = (1+h)^n$ に2項展開して，各項正なことに注意すると $a^n > nh \to \infty \ (n \to \infty)$

等比数列はよく知っているから証明するまでも無いかもしれないが，**証明方法**は時々顔を出す．

p.3 数列の収束　基本性質（続き）

定理3． $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ **とするとき，**

数列の各項毎の和，差，積，商（ただし，分母の数列は極限とも0でないときのみ），も収束し，それぞれ極限値は $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta,\ \alpha\beta,\ \dfrac{\alpha}{\beta}$

各項毎に一方が大きくなければ，極限値も対応する側が大きくない．

注． $1-\frac{1}{n}<1\ (n=1,2,3,\cdots)$ **だが，極限は両辺とも1で等しい**

→　「$\leqq$ は極限で保存するが，$<$ は保存しない」

定理4（挟み撃ちの原理）．全ての自然数 n **に対して** $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ **で，** $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ **ならば，** $\{c_n\}$ **も収束して極限値は** α**．**

論理上重要なのは，収束するという結論.（具体的に数列を与えなくても，一般論で極限が存在するとわかることがだいじ.）定理3,4とも，極限がこうなるのは直観的に明らか

p.2 数列の収束　参考：近代的な定義

例．非負実数の数列$\{a_n\}$が，$a_{n+m} \leqq a_n + a_m$ を全てのn, mに対して満たすならば$\dfrac{1}{n}a_n$は収束して，極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n = \inf_n \frac{1}{n}a_n$

やや技巧を要するので，証明は省略.(「近づく」，といった言葉では証明しにくい.)

具体的な数列では,「限りなく近づく」といった高校教科書的理解で十分な場合が多いが，**一般論で微妙なケースは近代的な厳密な定義が判定・論証に必要かつ便利.**

収束の近代的な定義.　$\{a_n\}$がαに収束とは，任意の$\epsilon > 0$に対して，自然数$n_0 = n_0(\epsilon)$が存在して，$n > n_0$ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となることを言う.

気持ち.　許容誤差ϵ をどう設定しても，数列の先のほうに行けばαから許容誤差$\pm\epsilon$の範囲に値が収まる.

近代的な論理構成.　全ての定理や例は，上記の定義と,「どんな実数よりも大きな自然数がある」（アルキメデスの原理）と,「上に有界な増加数列は収束」（テキスト p.5 定理 7）から証明する（できる）.

講義では数学の論理構成にこだわりすぎることはやめる．以後，これまで掲げた定理や例は全て用いて良いことにする.

p.4–6 e

今日のメインテーマ：p.6 **定理**8． $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$
$=\{2, 2.25, 2.370370\cdots, 2.44140625, 2.48832, 2.521\cdots, 2.546\cdots\}$
は収束する．

その前に，重要な単語の追加

級数． **実数列の各項を $+$ でつないだ無限に長い記号を暗示させる記号** $a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **のこと**

級数の部分和． $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

級数 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ **が実数** S **に収束．** **実数列** $\{S_n\}$ **が** S **に収束すること**

- **無限に長い足し算のイメージ**
- **数列の収束という一種類の概念で極限に関する全てを論理構成**

p.4 等比級数

例1． $a \neq 1$ **のとき，** $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \dfrac{1-a^n}{1-a}$

よって，等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ **の収束と等比数列** $\{a^n\}$ **の収束は同値で，**
$|a| < 1$ **がその必要十分条件．**

このとき， $1 + a + a^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-a}$

例2． $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ **は発散することが知られている．**

（証明は，積分の応用が一番早い．）

p.5 増大の速さ比べ

定理 5**.** $a > 0$ **のとき** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$

証明の例. $a = 2.1$ **のとき.**

p.5 **の証明で** $m = 2$, $r = \dfrac{2.1}{2+1} = 0.7$, $M = \dfrac{a^2}{2!} = 2.205$.

n **が** $m = 2$ **より大きい自然数のとき** $(n \geqq 3)$,

$$0 \leqq \frac{a^n}{n!} = \frac{2.1}{n}\frac{2.1}{n-1}\cdots\frac{2.1}{3}\frac{2.1^2}{2!} \leqq \left(\frac{2.1}{3}\right)^{n-2} M = \frac{M}{0.7}0.7^{n-1}$$

右辺は公比 0.7 **の等比数列だから** $n \to \infty$ **で** 0 **に収束する. 挟み撃ちの原理から,**

定理 5 **が** $a = 2.1$ **の場合に証明できた.** □

p.5 増大の速さ比べ（続）

定理6．　$a>1$**のとき** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$

テキストp.5 **の証明の方針の解説．**　$a=1+h$**とおくと**$h>0$．$a^n=(1+h)^n$**を**2**項展開して**$h>0$**を用いる（弱い不等式に置き換える取引による話の単純化）．定理**6**の証明には** h^2 **の項だけ残すのが（分子が**n**なので）いちばん単純．**　□

参考．　**定理**5,6**を合わせて，分母が早く大きくなる気持ちを重視した記号**
$n!\gg a^n\gg n^b$ $(a,b$**は定数**$)$
を用いることもある．

p.5 基本性質（続々）

ここでさりげなく，本当はとてもだいじな基本性質（メインテーマの証明に使う）

$\{a_n\}$ が**上に有界**： ある（n によらない）M があって，全ての自然数 n に対して $a_n \leqq M$ が成り立つこと．

例． $1 + \dfrac{1}{n} \leqq 2$ なので，$\{1 + \frac{1}{n}\}$ は上に有界．

例． $\sqrt{n}$ は $\sqrt{n} \leqq M$ と主張しても，$n > M^2$ となる n がある（アルキメデスの原理）ので，上に有界でない．

下に有界も同様

上に有界かつ下に有界のとき**有界**という

$\{a_n\}$ が**増加**： 全ての n で $a_n \leqq a_{n+1}$

（等号を許すことを強調するとき，**非減少**とも言う．

等号を許さないとき，**狭義増加**という単語も使う.）

減少（非増加，狭義減少）も同様

定理 7． <u>上に有界な増加数列は収束する．</u>

（下に有界な減少数列は収束する.）

定理というより認めるべき公理（論理構成は省略する約束だった…）

p.6 e

定理８． **数列** $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$

$= \{2, 2.25, 2.370370\cdots, 2.44140625, 2.48832, 2.521\cdots, 2.546\cdots\}$

は収束する．極限値を e **と書く** $(= 2.718281828459\cdots$**，自然対数の底**$)$**．**

例．元本1**，利率**$r = 0.01$**，**1**年複利で**10**年後の元利合計**$1.01^{10} = 1.10462\cdots$**．**
3**ヶ月複利で**3**ヶ月利率**$r/4 = 0.0025$**だと**10**年で**$1.0025^{40} = 1.10503\cdots$**．**
どんどん細かくすると $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{0.01}{n})^{10*n} = e^{0.1} = 1.10517\cdots$**．**
ちゃんと期間で割り算していればアコギな商売ではありません．

定理8**の難しいところ．** $\frac{1}{n}$ **は減少** 1 **より大きい数の** n **乗は増加**
→微妙なバランス→基本性質と数学的論証の出番
証明の方針．
(1) a_n **と** a_{n+1} **の**2**項展開を項毎に比べて増加数列であることを証明**
(2) **各項毎に単純化，具体計算できる等比級数で押さえることで，上に有界を証明**
(3) **定理**7 **と**(1)(2)**とから収束を証明**

p.7–9 関数の連続性

・かなり違う概念を，論理構成上統一的に扱う

数列 $\{a_n\}$ の収束：　項が進む（添字 n が大きくなる）と，値がどこかに近づく

関数 $f(x)$ の極限：　変数 x が a に近づくと，値がどこかに近づく

・連続性の帰結　–　中間値の定理，最大値の定理

形式的な定義が関数の値という実質的な内容を持つこと

区間：　以下の特別な形（**連結性**）の実数の集合たち

$[1,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leqq x\leqq 2\}$ （有界閉区間）

$(-\infty,-2]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqq -2\}$ （閉区間）

$\pm\infty$ は単なる記号.「無限」という実数は無い！

$(1,2)=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<2\}$ （有界開区間）

$(1,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x\leqq 2\}$ （左側開右側閉区間）

$\mathbb{R}$ （開区間であり閉区間でもある）

p.7 関数の極限

I：開区間，$f: I \to \mathbb{R}$，$a \in I$

関数fの点aにおける**極限値**がℓである

（$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ または $f(x) \to \ell \ (x \to a)$）

とは，xがaに近づくとき $f(x)$がℓに近づくこと

近代的厳密定義：　任意の正の実数ϵに対応して，ある実数δがあって

$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$

注.「極限値がℓ」と言うときは，$f(a) = \ell$でも$f(a) \neq \ell$でもかまわない

- 端点を含む$(I = [0,1])$とき，左の端点$x = 0$では**右極限**（右から近づく極限）$\lim_{x\to a+0} f(x) = \ell$ など．左極限も同様．
- $I = [0, +\infty)$ のとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ （「xが限りなくおおきくなるとき…」）
- 極限値を持たないケースは数列の時と同様(例．$\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$)

細かい注．　閉区間$[1,2]$で定義されていれば開区間$(1,2) \subset [1,2]$ で定義されるので，極限の定義が使える.「Iが開区間」と強調するのは,（1点などでなく）近づくことのできる範囲で定義されていることを強調するおまじない

p.8 関数の極限の基本性質

定理9．　関数 f と g が，点 a に近づくときの極限値をそれぞれ持てば，関数の和，差，積，商（ただし，分母の関数が a を含む何らかの開区間で0にならないとき）は，それぞれ a に近づくときの極限値を持ち，その値はそれぞれ，和，差，積，商になる．

点 a を含む何らかの開区間で f の値が g の値に比べて大きくないならば，a に近づくときの極限値も対応して大きくない．

（以上，数列の定理3 に対応）

注（定理3 と同じ）．　「$\leqq$ は極限で保存するが，$<$ は保存しない」

定理10（挟み撃ちの原理）．　$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \ell$ ならば $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$．

（数列の定理4 に対応）

例．$f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ は $x = 0$ で激しく振動するが，$-x \leqq f(x) \leqq x$ なので挟み撃ちの原理から，グラフをイメージできなくても $x = 0$ で連続であることは論理的にわかる．（近代数学的方法の便利さ）

p.8 関数の連続性

関数が連続： $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

注．　閉区間 $I = [a, b]$ **で定義された関数** $f: \ I \to \mathbb{R}$ **が** $I = [a, b]$ **で連続とは，** (a, b) **の各点で連続で，** $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ **（右連続）かつ** $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ **（左連続）.（端点** $c = a, \ c = b$ **では片側からしか近づけない.）**

連続・不連続の違いは解析学的には決定的だが，社会的にも大きい
例．　不連続な例：タクシーメーター.（その他かなり多くのものの料金・値段）
例．　ノックアウト（オプション）．株価がちょっとでも基準値以下になると，紙切れになる（オプション）.（満期が近づくと怪しげな株価の動きが起こる原因の一つ.）　関数（株価変動）の集合の上の不連続（汎）関数．→作った人が数学的考察に敬意を払う暇がなかった（か，よからぬ意図を持っていた）例？
例．　所得税は所得の連続関数になるように定義されている．→作った人が数学的本質をわかっていた例．
でも，扶養控除の適用は不連続　→　仕事量を調節，アルバイト代の壁
例．　学生支援機構奨学金の返還免除（対象者の上位 $1/10$ **の学生は全額免除，次の** $2/10$ **は半額免除，残りは免除無し）．**
支払いは連続なほうが経済学的には活性化しやすいと思う（個人的感想）．

p.8 連続関数はたくさんある

定理 11． 関数 f と関数 g が点 a で連続ならば，和，差，積，定数倍，商も a で連続（ただし，商の場合は割る関数は $f(a) \neq 0$ の場合）．

証明． 極限に関する定理 9 と連続性の（極限に基づく）定義から明らか．
定理の意義． 知っている連続関数から新しい連続関数を無数に作れる．
例 4． $f(x) = x$ は定義を直接確かめれば $\mathbb{R}$ で連続．定理 11 から $f(x) = x^n$ は連続，多項式は全て連続，有理関数は（分母が 0 になる有限個の点を除いて）連続．

補題． 連続関数 f が点 a で 0 でなければ，a の近くで（a を含むある開区間が存在して）$f(x) \neq 0$．
証明のイメージ． $\alpha = f(a) < 0$ とすると $\alpha/2 < 0$ だが，f が連続ならば，x が a にある程度近いと（つまり，$\delta > 0$ がとれて $a - \delta < x < a + \delta$ ならば）$f(x) < \alpha/2 < 0$．特にこの範囲で 0 にならない．
注． この補題は，p.22 定理 11 の極大と 2 階微分の関係を始め，定理の仮定を短くするためなどに随所で使われる．

p.9 連続関数の基本性質 — 中間値の定理

定理12（中間値の定理）． $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で $f(a) < f(b)$（$f(a) > f(b)$ でも同様だが）で，$f(a) < k < f(b)$ ならば，$f(c) = k$ かつ $a < c < b$ となる c が存在する．

証明の方針例1． 値が k を挟む区間を選びながら $[a,b]$ を2分割していく（**区間縮小法**）と，**極限点**が求める点．（「解析学序説」一松信，裳華房）（「解析入門」杉浦光夫，東京大学出版会）
証明の方針例2． 先ほどの**補題**から，値が k 未満の点の集合の上限が求める点．（「解析概論」高木貞治，岩波書店）

集合の上限． その集合のどの点 (実数値) z に対しても $z \leq M$ となる M のうち最小のもの．（M にいくらでも近い点がある．）有界集合の上限は必ずある．

p.9 指数関数

指数関数． 任意の自然数 n と実数 $a > 0$ に対して，x^n の連続性と中間値の定理から，$x^n = a$ の解が存在する．x^n は x について狭義増加なので解はただ一つ．それを $a^{1/n}$ と書く（a の n 乗根）．（m 乗することで）任意の正の有理数 p に対して a^p が定まる．$a^0 = 1$, $p < 0$ のときは $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}}$．$a > 1$ のとき p について増加，$0 < a < 1$ のとき減少．（有理数上で極限を取ることで）実数 x に対して $f(x) = a^x$ が連続になるように a^x の値を定義する．

p.9 閉区間上の連続関数 — 最大値の定理

定理13（最大値の定理）． 閉区間上の連続関数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ は，$[a,b]$ で最大値をとる．(最小値もとる．)

注． 「$[a,b]$ で最大値をとる」とは，$a \leqq c \leqq b$ かつ，$a \leqq x \leqq b$ を満たす全ての x に対して $f(c) \geqq f(x)$ となること．$f(c)$，と具体的に書けることが要．
・連続でないと，$[a,b] = [0,2]$ での $f(x) = x\chi(x<1)$ などの反例．
・閉区間でないと $(a,b) = (0,1)$ での $f(x) = x$ などの反例．
どちらの例も $f(x)$ は 1 に限りなく近づくが $f(x) = 1$ となる点は範囲内にない．

補題． 閉区間上の連続関数は，閉区間で有界．

証明の方針． 有界でないとする．区間縮小法によって有界でないところをピンポイントで１つ選び，点 c とおく．$a \leqq c \leqq b$ だから，$f(c)$ は実数値（有限；それが $[a,b]$ 上定義されている，ということ）．有界でないから，すぐ近くに $f(c)$ から離れた値をとる点がいくらでもあることになって，連続性に矛盾．

定理13の証明のイメージ例1． f の $[a,b]$ 上での値の上限を M とおく．もし，$[a,b]$ 上で $f(x) \neq M$ ならば $\dfrac{1}{x-M}$ は連続だから，補題から有界になるが，M が上限であることに矛盾．

定理13の証明のイメージ例2． $[a,b]$ を２分割して，大きい値を含むほうをとる．区間縮小法で到達する点 c において，連続性から $f(c)$ が最大値．

p.10–12 対数関数

$f: I \to \mathbb{R}$ が**増加**（非減少）関数とは： I の任意の２点 x_1 と x_2 に対して，$x_1 \leqq x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となること．

- 減少関数も同様
- **狭義増加**関数： $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$

定理14（**逆関数**）． $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ が**連続な狭義増加関数**ならば，$f(a) \leqq y \leqq f(b)$ なる y に対して $y = f(x)$ を満たす $x \in [a,b]$ が唯一ある．

逆関数 $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$： 定理の対応 $y \mapsto x$ のこと

- $f(f^{-1}(x)) = x,\ f^{-1}(f(x)) = x$
- グラフは $y = x$ に関する f のグラフの折り返し
- f が連続な狭義減少関数でも同様

対数関数

対数関数：　**指数関数**a^x **の逆関数**　　$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

自然対数 $\log = \log_e$　　$e^{\log x} = x \ (x > 0)$,　$\log e^x = x \ (x \in \mathbb{R})$

注.　**エクセルなどでは**$\log = \log_{10}$ **（常用対数），** $\ln = \log_e$

$a = e^{\log a}$ **なので，** $a^x = e^{x \log a}$

- **指数関数の性質の言い換え**

$\log(ab) = \log a + \log b$,

$\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$,

$\log a^b = b \log a$

e（続）

定理 15． $$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

証明の方針： x を自然数で上下から挟んで，e の（数列の極限による）定義に帰着．あとは変数変換 $y=-x$ と $t=1/x$

例． $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{a}{n})^{n/a}\right)^a=\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x})^x\right)^a=e^a$$

定理 16． $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

証明の方針： **定理** 15 と $\log x$ の連続性から最初の式が 1 に等しい．あとは変数変換 $t=e^x-1$．

p.13–15 導関数

I: 開区間， $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$， $a \in I$

f が a で微分可能： 極限 $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在すること．

$f'(a)$： f の a における**微分係数**

f が I の各点で微分可能なとき，

$f': I \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto f'(x)$ f の**導関数**．

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$$

p.13 導関数の例

$f(x) = c,\ f'(x) = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ **（ここまで直接計算と前回までの結果）**

$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$

p.14 微分可能と直線近似

定理１． f が a で微分可能ならば a で連続．

証明． 定義の極限が存在するには，分母が０に近づくので，分子も０に近づかないといかない． □

注． 逆は成り立たない．$f(x) = |x|$ は $\mathbb{R}$ で連続だが０では微分可能でない．

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$： f の a における**接線** （**直線近似**）

命題． f が a で微分可能ならば，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \delta(x)(x-a)$$

となるように $\delta: I \to \mathbb{R}$ を定義すると，$\lim_{x \to a} \delta(x) = 0$

証明． $\delta(a) = 0$ および，$x \neq a$ のとき $\delta(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ □

注． $x = a$ 近くで，$f(x) =$ 残る（定数）項＋$(x-a)$ の１次で消える項＋ もっと早く消える項（**高次の微少量**）

この気持ちをくむ記号： $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

（記号としてはあか抜けてないが，気持ちの上では便利なので，専門家の長い計算では頻繁に使われる）

p.14–15 導関数はたくさんある

定理2． f と g が開区間 I で微分可能ならば，定数 k に対して $f \pm g$, $k\,f$, $f\,g$, $\dfrac{f}{g}$（商については，分母の関数は I 上 0 でないとき）も微分可能で，

(1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$, (2) $(k\,f)' = k\,f'$,

(3) $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$,

(4) $\displaystyle (\frac{f}{g})' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

(5) $\displaystyle (\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$

注1． 今までの例と定理2 から**たくさんの関数の導関数の存在**と具体形がわかる（多項式，有理関数）．

注2． 証明は，微分の定義と極限存在の伝搬に関する定理9．ただし，極限との差と $x-a$ との比の連続性なので，結果の公式がやや複雑．

注3． 符号を覚えるのが苦手ならば，(4) は直接覚える代わりに (3) と (5) から毎回導くのもアリ．

例． $(x^2 \log x)' = 2x \log x + x$

p.16–18 合成関数の微分

さらに複雑な関数の微分可能性と微分係数の具体形

合成関数 $g \circ f$**：**　$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

定理３（合成関数の微分）．　**開区間** I, J**，** $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ **（**f, g **とも微分可能）ならば，** $g \circ f$ **は** I **で微分可能で，** $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$

$((g(f(x)))' = g'(f(x))\, f'(x))$

証明．　$g(f(x+h)) - g(f(x))$ **を変形する．**

$a \in J$ **ならば** $g(y) = g(a) + g'(a)(y-a) + \delta(y)\,(y-a)$; $\lim\limits_{y \to a} \delta(y) = 0$

（テキスト p.14 **定理１ のすぐ上.）**

$x \in I$ **のとき** $a = f(x) \in J$**．** $h \neq 0$ **に対して** $y = f(x+h)$**．これらを代入して（微分の定義を見ながら）** h **で割って** $h \to 0$ **として，** f **の微分可能性と連続性と** δ **の性質を使う．** □

p.16–17 例

例 1． $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}\, f'(x)$

任意の実数 α **に対して** $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

例 2． $(f(x)^{\alpha})' = \alpha\, f(x)^{\alpha-1}\, f'(x)$

例 3． $a > 0$ **のとき，** $(a^{x})' = a^{x} \log a$

例． $$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$(\sin f(x))' = \cos f(x) \times f'(x)$,

$(\cos f(x))' = -\sin f(x) \times f'(x)$

p.17 最大値と微分

定理4． I 開区間，$f:\ I \to \mathbb{R}$ 微分可能で，$a \in I$ で最小値または最大値をとるとき，$f'(a) = 0$．

証明． 便利な o（テキストでは δ）を使う．最小性（不等式）を利用するために $x > a$ と $x < a$ に場合分けして，微分可能の定義の極限の取り方をわける
$f(a)$ が最小値のとき，
$0 \leqq f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \delta(x)\,(x-a);\ \lim_{x\to a}\delta(x) = 0$．よって，
$x > a$ ならば $f'(a) + \delta(x) \geqq 0$
$x < a$ ならば $f'(a) + \delta(x) \leqq 0$
$x \to a$ で $\delta(x) \to 0$．いっぽう $f'(a)$ は定数．
不等式を両方満たすのは $f'(a) = 0$ しかない □

注． 微分可能と仮定したので，$f'(a)$ は存在する（実数値）
注． なぜか名前が付いていないが，微分法の基礎理論では決定的に重要

p.17 例

例. $f(x)=x^2+ax+b=(x+\frac{1}{2}a)^2+b-\frac{1}{4}a^2$ **は** $x=-\frac{1}{2}a$ **のとき最小値.**

定理４を使って確認すると, $f'(x)=2x+a=0$ **を解いて**
$x=-\frac{1}{2}a$**. 高校で習った結果を再現した.**

実用的な例（最小２乗法）.

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

$$f'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=2nx-2\sum_{i=1}^{n}a_i$$

（x の次数で整理し直す高校流でも可）

$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$ **（平均値）のとき最小値**

最小２乗法は平均値を用いる「根拠」（変分原理による表現）
（計量経済学の統計分析の根本的な原理）

p.17–18 逆関数と微分

定理５（逆関数の微分）． I は開区間，$f:\ I \to \mathbb{R}$ は狭義増加（または狭義減少）で微分可能で０にならないならば，逆関数（テキストp.10）f^{-1} も微分可能で，$y = f(x)$ とすると

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\ \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right).$$

覚え方． $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

証明． **方針．** $(f{-}1)'(b)$ の存在を言うために，$b = f(a)$ となる $a \in I$ をとって，$f'(a)$ の定義に持って行く．

$y = f(x)$ とすると $f^{-1}(y) = x$ で，$y \to b$ のとき $x \to a$ だから

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \to \frac{1}{f'(a)},\ y \to b.$$

すなわち f^{-1} は微分可能で，定理の主張の式が成り立つ．

p.19–21 テイラーの定理

定理6（ロルの定理）． $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続，(a,b) で微分可能，$f(a)=f(b)$ ならば $a<c<b$ かつ $f'(c)=0$ を満たす c がある．

証明． f が閉区間上連続と仮定したので，最大値の定理（テキスト p.9 定理13）が使え，さらに微分可能と仮定したので，p.17 定理4が使える． □

注1． たとえば，f が増加してから減少する，とイメージすると，f' が正から負に変わるから，導関数 f' に中間値の定理を使ってすぐわかる，と言いたくなるが，f' が連続，とは仮定していないので，この証明は不十分．ロルの定理（さかのぼると，p.17 定理4）は，微分の詳細・基礎的な性質を見ている．（強力な定理である．）

注2． ロル，平均値，テイラー，マクローリンの各定理は数学的本質は同じ．便利に言い換えている．

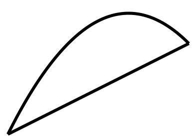
p.19 平均値の定理

定理7（平均値の定理）． $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続，(a,b) で微分可能ならば，$a < c < b$ かつ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす c がある．

注1． 平均値の定理はロルの定理の単なる言い換えだが，仮定が少ないので，数学ではより完成された定理として多用される．

注2． c はどこにあるかは f, a, b に複雑に依存するので，$a < c < b$ という情報しか使わなくてすむときしか役立たない．でも，役立つことがたいへん多い．（先ほどのロルの定理も，次のテイラーの定理も同じ．）

証明． $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ にロルの定理を使うだけ． □



p.19 テイラーの定理

導関数 $f' : I \to \mathbb{R}$ が I で微分可能の時，関数 f' の導関数 f''．一般に $f^{(n)}$ を f の n 階導関数（n 次微分）．

定理８（テイラーの定理）．　開区間 I の中の２点 $a < b$ と I で n 階導関数を持つ $f : I \to \mathbb{R}$ に対して，

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

剰余項： $R_n = R_n(a,b) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$

$c = c(f,n,a,b)$ **は** $a < c < b$ **を満たす実数．**

証明の方針．　平均値の定理の証明と同様．f から主要項と（端点での値を揃えるために）$(x-a)^n$ の適当倍を引いた関数にロルの定理を使う． □

点 a での情報（$f(a)$，接線の傾き，など）で他の点での関数値を近似．
高階微分が I で大きくなく，近くの点での値に興味があるとき有効．

p.20 マクローリンの定理

定理9． 0を含む開区間Iでn階導関数を持つ$f: I \to \mathbb{R}$と$x \in I$に対して，

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

剰余項： $R_n = R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$

$\theta = \theta(f, n, x)$は $0 < \theta < 1$を満たす実数．

証明． テイラーの定理で$a = 0$, $b = x$． □

系（マクローリン展開）． fが0を含む開区間で何回でも微分可能で，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ならば，

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \quad \text{（級数の収束の意味で）}$$

テイラー展開も同様．

p.21 例

例． $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n,$

$0 < \theta = \theta(n,x) < 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n = 0$（テキストp.5 定理5）なので，

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

$a, b > 0$のとき$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0$

証明． e^xのマクローリンの定理の結果で$x > 0$のとき各項正なので，$\frac{x^n}{e^x} < n!$が全ての自然数nと正の実数xに対して成り立つ．よって任意の実数aに対してaより大きいnを持ってくることで$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$．$b > 0$のとき，$x$を$b\log x$に置き換えることで$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0$． □

p.22–24 関数の追跡

定理10． $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ は連続，(a,b) で微分可能のとき：
(a,b) で $f'=0$ ならば f は $[a,b]$ で定数関数（逆も成り立つ）
(a,b) で $f'>0$ ならば f は $[a,b]$ で狭義増加関数
(a,b) で $f'\geqq 0$ ならば f は $[a,b]$ で増加関数（逆も成り立つ）

注1． 減少関数も同様

注2． 狭義増加から恒等的に $f'(x)>0$ とは言えない．例：$f(x)=x^3$．

証明の方針． 平均値の定理を書き下して仮定を用いる．逆は明らか，または，既出 □

p.22 極大・極小

I 開区間，$f\colon\ I \to \mathbb{R}$，$a \in I$

f が a で**極大**とは，a を含むある開区間 J が存在して，$x \in J$ ならば必ず $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つことを言う．$f(a)$ を**極大値**．極小も同様．

イメージ． J は**後出し**で決める上に，どんなに**小さくても良い**．a に立って足下すぐ周囲を見渡すと自分が「**お山の大将**」になっている．(でも，そのすぐ向こうに東京タワーがそびえているかもしれない.) **最大**は（考えている範囲で）一番ということを指す．

注． 極大点で微分は（J での最大なのでテキスト p.17 定理 4 から）0．

p.22 極大・極小と２階微分

定理11． 関数 f は点 a を含む開区間で定義され２階まで微分可能で，$f'(a)=0$ を満たし，f'' が連続とする．このとき

$f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値

$f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値

注1． 定理11 では f'' が連続関数と仮定（制限）していることに注意．1点 a だけの正（負）ではなく，a を含むある開区間で正（負）であること（p.8 定理11の下で説明した補題）を使って，定理10に持ち込むため．

注2． $f''(a)=0$ のときはこの事実だけからは何もわからない．

例． $a=0$．$f(x)=x^4$ のとき極小，$f(x)=-x^4$ のとき極大，$f(x)=x^3$ のときどちらでもない（変曲点）．

証明の方針． テイラーの定理からすぐ． □

p.23 凹凸

I 開区間，$f:\ I \to \mathbb{R}$

f が I で（上に）凸とは，任意の３点 $x_1 < x < x_2$ に対して（$y = f(x)$ 上の点たち）$P(x, f(x))$ が $P_1(x_1, f(x_1))$ と $P_2(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の下にあること．

凹も同様．

定理12． f が開区間 I で微分可能ならば，
I で f が凹であることと f' が I で増加関数であることが同値，
I で f が凸であることと f' が I で減少関数であることが同値．

証明の方針． 凸ということと，$x_1 < x < x_2$ ならば
$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ が成り立つことが同値であることを用いる．□

p.24 凹凸と２階微分

定理13． f が I で２階微分可能ならば，
I で f が凸，と，I で $f''(x) \geqq 0$ が同値，
I で f が凹，と，I で $f''(x) \leqq 0$ が同値．

証明の方針． p.22 定理10において f を f' とした結果と，p.23 定理11 をつなぐ． □

例1． $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, のグラフ
（$\alpha = 0$ で増減，$\alpha = 1$ で凹凸，がそれぞれ異なる）
例2． $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, のグラフ

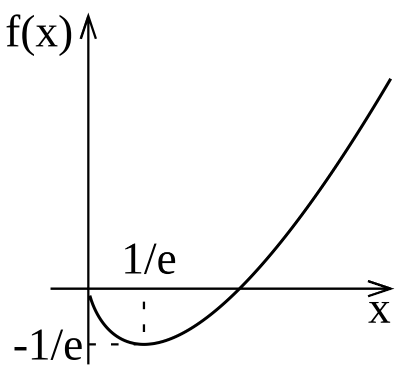
復習

関数の振る舞いはもちろんだいじ（経済成長率の変化，株価動向，失業率の変化）

それを図示するのも当然

数学理論→関数が数式で与えられることが多い→その図示（の，練習を今やってる）

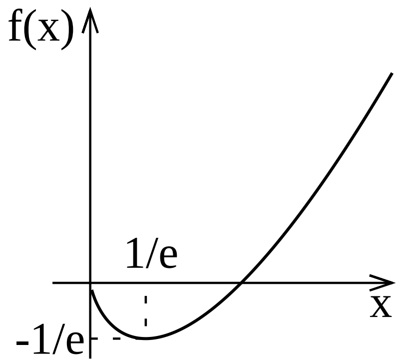
例．　テキスト p.24 問(7) $f(x) = x \log x \ (x > 0)$ のグラフ



増減表

$x > 0$ の部分は普通に微分して $f'(x) = \log x + 1,\ f''(x) = \dfrac{1}{x}$

x	$+0$	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-1/e$	$\nearrow +\infty$



端の様子も必要

$x \to +\infty$ はこの場合はわかりやすい（単調増加 $+\infty$ に発散）

$x \to +0$

$x \log x$ は '$0 \times -\infty$' 型だから「速さの比較」が必要

極限

$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ （テキスト p.21 問2）

$x = e^{-t}$, $t \to +\infty$

$\displaystyle = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t = +\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$ **に持って行く**

和，差，積，商と極限，挟み撃ちの原理，不等号の保存　を利用

任意の実数tに対して，$\displaystyle e^t \geqq 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 \geqq \frac{1}{2}t^2$ **（差を取って増減表 ← 元はテイラーの定理）**

$\displaystyle 0 \leqq \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} \leqq \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$

挟み撃ちの原理で， $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

★微分だけでは不十分．極限も理解しておかないといけない．

連続性とグラフ

微分可能ならば連続（p.14 **定理**1）

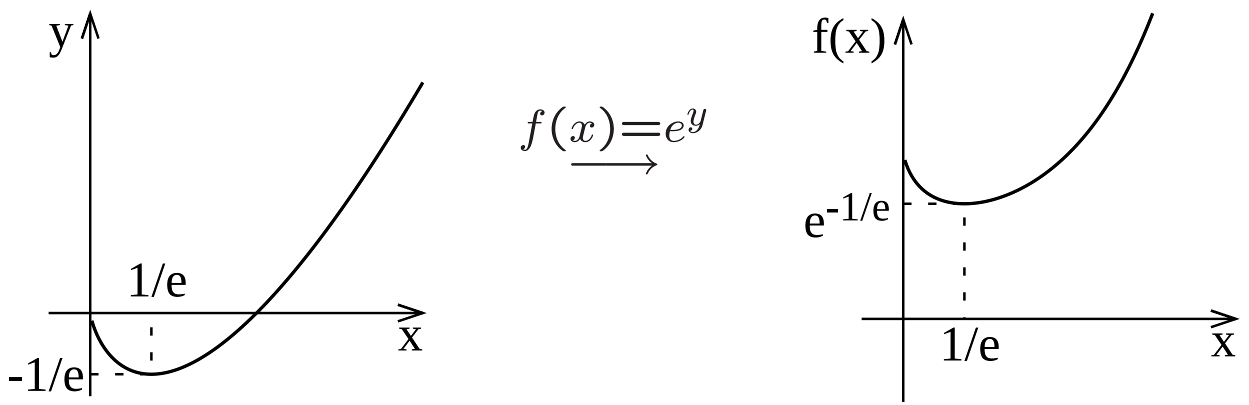
微分可能性を通じての間接的な役割だけではなく直接的にも重要

例1． $y = f(x) = x^x$ **のグラフ**

出発点： $y = x \log x$ **のグラフを知っているので，**

$f(x) = x^x = e^{x \log x}$

$y = x \log x$ **のグラフを知っているので，**



不十分 $x = 0$ **では** $x \log x$ **も** x^x **も未定義**

連続性

$x\log x$ の $x=0$ 付近のグラフは $x=0$ での**値ではなく，$x\to 0$ の極限（近づく様子）**

$x^x = e^{x\log x}$

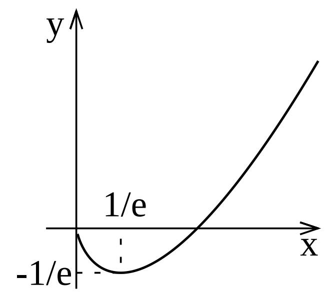
$x\to 0$ のとき $y = x\log x \to 0$ は既出

$y\to 0$ のとき $e^y \to 1 = e^0$ か？

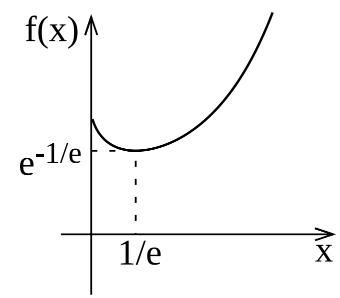
e^x が連続関数であること

（$x=0$ で連続なこと）を使う！

関数の連続性がないと極限が生きない

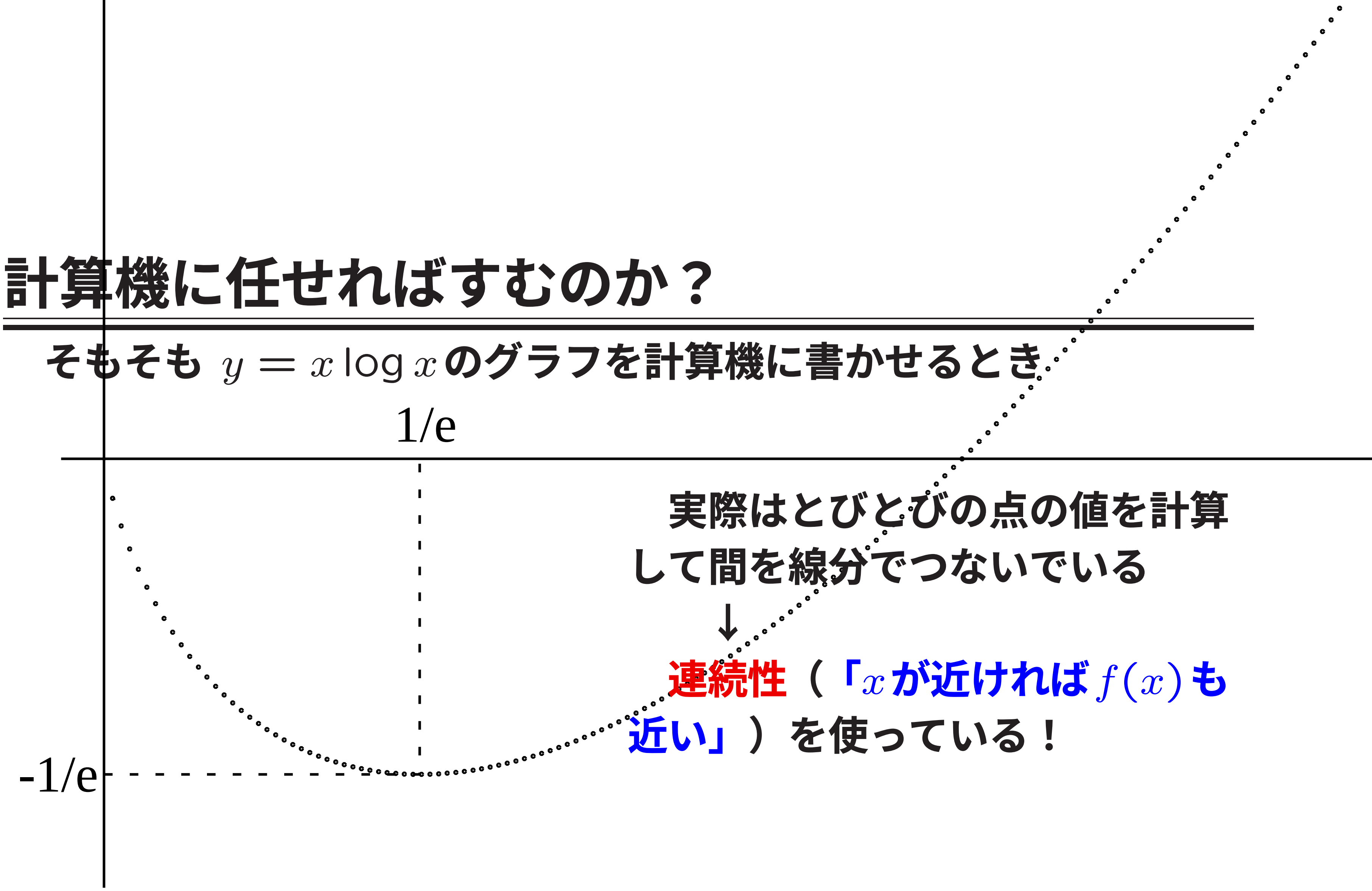


$\downarrow \quad x^x = e^y$



計算機に任せればすむのか？

そもそも $y = x\log x$ のグラフを計算機に書かせるとき



実際はとびとびの点の値を計算して間を線分でつないでいる

↓

連続性（「x が近ければ $f(x)$ も近い」）を使っている！

補足：　指数関数a^x（復習）

$a > 0$　　　　**指数関数$f(x) = a^x$の定義（復習）**

- $f(0) = 1$，および，$x < 0$のとき$a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$で定義するので $x > 0$

だけ定義すればよい

- x が自然数のとき，$a^x = a \times \cdots \times a$（$x$回かけ算）
- x が正の有理数$x = \dfrac{p}{q}$（p, q自然数）のとき，$a^x = (a^{1/q})^p$
- $y = a^{1/q}$は $f(y) = y^q = a$のただ一つの正の解

（中間値の定理；f は連続，狭義増加，$f(0) = 0$, $\lim\limits_{y \to \infty} f(y) = +\infty$）

- xが無理数の時，

実数の連続性

★ 実数は有理数列の極限として得られる

実数は無限数列で書ける $e = 2.7182818284590\cdots$

$c_1 = 2,\ c_2 = 2.7,\ c_3 = 2.71,\ \cdots$

注．本当は話の順序が逆で，有理数の極限を集めた集合を実数と呼ぶ

無理数 x に対して a^x を定義したい

x に収束する有理数列 $\{c_n\}$ で，$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{c_n}$ と定義する

収束するの？→ $\{c_n\}$ として増加列をとる上に有界な増加列は収束する

列のとりかたによって違ったら困る？

★ a^x が有理数上で連続関数→列の取り方によらない

証明の骨子は $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

収束や連続性の近代的定義は，これら全て（および，もっとたくさん）を矛盾無く曖昧さ無く説明する（それほど重要で，重要さを説明しきれない）

試験

テキストそのまま出すことはしないが，基本的に類題

- 極限：　数列の極限，関数の極限（第１章だけではない）
- 微分：　p.13–18 例や公式は全て基本→使えるように覚える
- 増減表とグラフ：　p.24 の類題
- 定義（極限，連続，微分など）も再確認しておくこと（基本だから）

文献

標準のテキスト（緑）「微分積分」慶應義塾大学経済学部

春学期　微分積分入門　選択　第１－２章

秋学期　微分積分　必修　春学期の続き　第３－４章，補遺

http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/suukiso.htm

Google 検索キーワード　　服部哲弥