数理ファイナンス入門I

服部哲弥

START

↱

１．イントロ

・リスク＝未来の選択肢（サイコロの目のどれかが実現する）
・時間発展＝集合の確率から１つの標本に
・国の成長期：銀行に経済的リスクを集中して金融の流動性を維持
（間接金融＋護送船団＝国がリスクを取る）
巨大化（国際化）→リスクの分散の必要
革新による成長→リスクを取る（直接金融）
・リスクの評価（管理）　→　証券化，ヘッジ＝デリバティブ

この講義の目標：

◎ファイナンス数学の初等部分の数学的基礎

ぶっちゃけ：応用線形代数と応用経済数学２．将来習う科目と「高校数３の次」の数学の橋渡しを見ておきたい人向け

・デリバティブの価格の原理：無裁定完備 $\Leftrightarrow$ リスク中立確率の一意存在
・線形代数と分離定理の応用（第１基本定理と第２基本定理）
・２項 T 期モデルのヨーロッパコールオプションの価格付け

（本当は，信用リスクのデータと評価，顔の見えない大向こうが皆が付いてくる，付いてくれば実現するシナリオと裏での仕込み，が日本の弱点だが，そういうだいじな話はできません.）

目次

教科書等・試験等

〇背景知識：

線形代数（線形空間，次元，直交補空間）と経済数学２（分離定理）

必要な説明は時間を割くが，数学の概念に興味を持てることは重要

〇教科書：

服部哲弥web／講義／数理ファイナンス／講義スライドpdf

初等基礎教科書冒頭（離散時間）共通の話題→教科書不指定

数学が比較的きちんとしている例（他にもある）：

楠岡成雄，長山いづみ，数理ファイナンス，東京大学出版会，2015

津野義道，ファイナンスの数理入門，共立出版，2003

〇レポート：　keio.jp　３回の予定（紙掲示無し，講義とkeio.jp要確認）

〇成績・単位：　学期末定期試験

２．２項１期モデルのヨーロッパコールオプション

２項１期モデル

リスク（未来の選択肢）

オプション（リスクヘッジ）

原資産による複製ポートフォリオ

オプションの価格

リスク中立確率測度

今回と次回の計算がうまく行く数学的原理を次々回以降解説します

2項1期モデル

2項1期モデル：安全債券と株式各1種類だけがある金融市場

時刻$t = 0, 1$．初期時刻$t = 0$は確定．

満期$t = 1$は2つの（神の）選択肢＝リスク

時刻tの安全債券は単価B_t，利率r（リスク無し：安全利子率）：

$B_0 = B$，$B_1 = (1 + r)B$

時刻tの株式は単価S_t，1期の収益率$X_1 = 1 + u$または$X_1 = 1 + d$

$S_0 = S,\ S_1 = X_1 S$

原資産の価格：$\overrightarrow{S}_t = (B_t, S_t)$

数理ファイナンス（ざっくり）：

リスクの管理（ヘッジ）の費用の指摘と，その決め方を与えること

定数・変数の条件

- $u > d$としてよい

（記号の違いだけ．$u = d$だとリスクが無いので考察対象が無い）

- $B > 0,\ S > 0,\ 1 + r > 0,\ 1 + u > 1 + d > 0$

（$B_t > 0,\ S_t > 0,\ t = 0, 1$）

恒等的に価格0は市場では存在しないのと同じ（「金が全て」）

注.「場合によって0」，はアリ．オプションがまさにそれ

負の価格は考えない（価格負を売るのは価格正を買うこと）

- $u > r > d$

実は講義の主結論の1つ，数理ファイナンスの第1基本定理．

直感：$r \geqq u$なら不利な株を買わない，$d \geqq r$なら安全債券を買わない

ヨーロッパコールオプション

デリバティブ：デリヴァティヴ(derivative)，金融**派生**商品 $\Leftrightarrow$ 原資産

オプション：$t=0$ の契約価格で未来に売買する**権利**なるデリバティブ

- リスク（株価や為替の変動）と変動前の契約値というリスクの無い量の交換という金融商取引（リスクテイクとリスクヘッジ）

コールオプション：金融商品を契約時の**行使価格**で**買う**権利

ヨーロッパコールオプション：最初に行使価格を契約し，**売買は満期日**

具体例：$t=1$ で 1 株（$t=0$ での単価 S）を行使価格 K で買う権利

オプションの満期時の市場価値

オプションの$t=1$での市場価値（$t=1$での価格）Y：

・株価が高ければ権利行使＝株をKで買う

市場価値は買った株をすぐ市場で売ってみた儲け：$Y=X_1\,S-K$

・安ければ株は市場で直接買えば良いので権利行使しない＝紙くず

市場価値0

オプションの$t=1$での価格$Y(X_1)=(X_1\,S-K)$と0の大きい方

$$x_+=\max\{x,0\}=\frac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases} x, & x\geqq 0\\ 0, & x<0\end{cases}=\text{大きい方}$$

$Y(X_1)=(X_1\,S-K)_+$

興味. $t=0$での価格（オプションの値段）

複製ポートフォリオ

ポートフォリオ：金融商品の組み合わせ（線形結合）
本来の要：変動に応じて組み替える（次回）ことで個人資産を最適化
複製ポートフォリオ：派生商品と恒等的に等価値な原資産の組み合わせ
$t=0$ で係数を決めて $t=1$ の変化（リスク）に臨む定数係数線形結合
注．デリバティブはいつも原資産で複製できるか？
実は講義の主結論の１つ，数理ファイナンスの第２基本定理．
ここでは実際に複製ポートフォリオを（１次方程式を解いて）見つける

$$Y(X_1)=x_BB_1+x_SS_1=x_BB(1+r)+x_SSX_1$$

$\overrightarrow{x}=(x_B,x_S)$：ポートフォリオ（保有枚数の組）．$X_1$ によらない！
$X_1=1+u$: $x_BB(1+r)+x_SS(1+u)=Y(1+u)=((1+u)S-K)_+$,
$X_1=1+d$: $x_BB(1+r)+x_SS(1+d)=Y(1+d)=((1+d)S-K)_+$.

複製ポートフォリオ（続）

$A = \begin{pmatrix} 1+r & 1+u \\ 1+r & 1+d \end{pmatrix}$ とおくと $A^{-1} = \dfrac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -1-d & 1+u \\ 1+r & -1-r \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} Y(1+u) \\ Y(1+d) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -(1+d)Y(1+u) + (1+u)Y(1+d) \\ (1+r)(Y(1+u) - Y(1+d)) \end{pmatrix}$$

たしかめ：(1) x_B, x_S は実際の $t=1$ と無関係に決まっている．

(2) $x_B B_1 + x_S S_1 = Y_1(X_1)$ が $X_1 = 1+u$ と $X_1 = 1+d$ それぞれについて成立．

(x_B, x_S) はオプション Y の**複製ポートフォリオ**

オプションの価格

（再掲）．

$$\begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -(1+d)Y(1+u)+(1+u)Y(1+d) \\ (1+r)(Y(1+u)-Y(1+d)) \end{pmatrix}$$

オプションの現在 $(t=0)$ 価値 E_0 を複製ポートフォリオの現在価値（**無裁定条件による価格**）とすると，$E_0 = x_B B + x_S S = (1\ 1)\begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-d}{u-d}Y(1+u) + \frac{u-r}{u-d}Y(1+d)\right)$$

例．

• $K \geqq (1+u)S$：$Y(X_1) = (X_1 S - K)_+ = 0$，$E_0 = 0$，$\begin{pmatrix} x_B \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$．

株価がどうなっても市場で買った方が安いのでオプションは常に紙屑（客が権利行使に来たら満期時に市場から買って差し出せば良い）

• $K \leqq (1+d)S$：$Y(X_1) = X_1 S - K$，$E_0 = S - \dfrac{K}{1+r}$，$\begin{pmatrix} x_B \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{1+r} \\ 1 \end{pmatrix}$．

株価がどうなってもオプションが安く必ず行使するから証券会社は $t=0$ に株を買っておくしかない（安全債券は K の支払いでポジションを解消するために先に空売り）

オプション価格とリスク中立確率

（再掲）．

$$\begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -(1+d)Y(1+u) + (1+u)Y(1+d) \\ (1+r)(Y(1+u) - Y(1+d)) \end{pmatrix}$$

Ｙの$t=1$の価格 $Y(X_1) = (1+r \ \ X_1) \begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix}$

Ｙの$t=0$の価格 $E_0 = (1 \ \ 1) \begin{pmatrix} x_B B \\ x_S S \end{pmatrix}$

$(\mathsf{P}_Q[\,X_1 = 1+u\,] \ \ \mathsf{P}_Q[\,X_1 = 1+d\,]) = (1+r)(1 \ \ 1)A^{-1} = (\frac{r-d}{u-d} \ \ \frac{u-r}{u-d})$ という（選択肢の集合上の）確率 P_Q を定義する $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}_Q[\,X_1\,] = 1+r$（期待収益率が商品間で等しい）**リスク中立確率**

$\rightarrow \quad E_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,Y_1(X_1)\,]$

オプションの価格＝リスク中立確率に関する期待値

- リスク中立確率による価格付けはポジションの解消という決定論的行動
- 保険料の計算は大数の法則と安全割増（個々の事故はバラツキ）

まとめ

２項１期モデル（安全債券と株券）

原資産とデリバティブ（金融派生商品），リスクテイクとリスクヘッジ

ヨーロッパコールオプション

デリバティブの複製と価格付け

２項１期モデルにおけるヨーロッパコールオプションの現在価格

$$Y_0 = \frac{1}{1+r} \mathsf{E}_Q[\, Y_1(X_1)\,]$$

３．２項２期モデルのポートフォリオ組替

２項２期モデル

ポートフォリオ組替

前回と今回の計算がうまく行く数学的原理を次回以降解説します

２項２期モデル

２項２期モデル：安全債券と株式各１種類の市場．

時刻t**の原資産の単価**$\overrightarrow{S}_t = (B_t, S_t)$**，**$t = 0, 1, 2 = T$

$t = 0$**は確定，**$t > 0$**は各時刻毎に２つずつの選択肢（リスク）**

安全（無リスク）債券の安全利子率r**：**$B_t = (1 + r)^t B$**，**$t \in [0, T]$

株式の各期の収益率$X_t = 1 + u$**または**$X_t = 1 + d$**：**$S_t = S \prod_{s=1}^{t} X_s$

パラメータの条件は１期モデルと同じ！

$B > 0,\ S > 0,\ 1+u > 1+r > 1+d > 0$ **（**$B_t, S_t > 0,\ t \in [0, T]$**）**

・条件のうち$u > r > d$**は，１期と同様，実は第１基本定理**

2項2期モデルのヨーロッパコールオプション

デリバティブ価格付け：行使価格 K **のヨーロッパコールオプション**

$Y = (S_T - K)_+ = (SX_1X_2 - K)_+ = Y(X_1, X_2)$

複製ポートフォリオ． $t = 1 \mapsto 2$ **は１期モデルと同様：** $\overrightarrow{x}_2 = (x_{2,B}, x_{2,S})$

$V_2 = V_2(X_1, X_2) := (\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{S}_2) = Y = (S_2 - K)_+$

$t = 1$ **時点のポートフォリオの価値** $V_1 = V_1(X_1) = (\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{S}_1)$

• $t = 1$ **の状況によって値が変わる** $V_1 = V_1(X_1)$ **を** $t = 1$ **を満期とするデリバティブと見ると，２項１期のように** $t = 0$ **で用意した複製で価格付け可能！**

$(*)$ $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{S}_1) = V_1 = (\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{S}_1)$,

$V_2 = Y \neq V_1$ **なので，** $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}_2$ **と限らない（ポートフォリオ組替）**

• $\overrightarrow{x}_2$ **は** $t = 1$ **で** Y **を複製すべく用意したので** X_1 **の関数で** X_2 **について定数，** $\overrightarrow{x}_1$ **は** $t = 0$ **で** V_1 **を目指して用意したので定数（可予測過程）**

•価格付けの観点で方程式 $(*)$ **を立てたが，** $t = 1$ **で市場での売買だけでやりくりしたと見て，自己資金調達的ポートフォリオ組替，と呼ぶ**

2項2期モデルのオプションの価格

$t=1\mapsto 2$ は2項1期（第2回）の結果から，

$$\begin{pmatrix} x_{2,B}B_1 \\ x_{2,S}S_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} Y(X_1,1+u) \\ Y(X_1,1+d) \end{pmatrix},$$

$$(**)\ (\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{S}_1) = V_1(X_1) = (1\ \ 1)A^{-1}\begin{pmatrix} Y(X_1,1+u) \\ Y(X_1,1+d) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-d}{u-d}Y(X_1,1+u) + \frac{u-r}{u-d}Y(X_1,1+d)\right)$$

$$= \frac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,Y(X_1,X_2) \mid \mathcal{F}_1\,]$$ （X_1 を変数のまま X_2 の期待値をとる条件付き期待値）

$t=0\mapsto 1$ も2項1期の結果を $(**)$ に用いて

$$\begin{pmatrix} x_{1,B}B_1 \\ x_{1,S}S_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} V_1(1+u) \\ V_1(1+d) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+r}A^{-1}\begin{pmatrix} \mathsf{E}_Q[\,Y(1+u,X_2)\,] \\ \mathsf{E}_Q[\,Y(1+d,X_2)\,] \end{pmatrix}$$

$$E_0 = x_{1,B}B + x_{1,S}S = (\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{S}_0) = V_0 = (1\ \ 1)A^{-1}\begin{pmatrix} V_1(1+u) \\ V_1(1+d) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}_Q[\,Y(X_1,X_2)\,]$$ （X_1 と X_2 それぞれ2項1期の期待値＝直積確率測度）

補遺：リスク中立確率と実確率

例題． 満期が1年後のデフォルトリスクある割引社債がある．デフォルトしなければ1年後に額面1単位が支払われ，デフォルト（不履行）が起きれば1年後に $1-\delta = 0.6$ 支払われる（デフォルト時損失率 δ，回収率60％）．現時点での市場価格 $p_1 = 0.941$，実確率測度でのデフォルト確率 $\overline{p} = 0.01$，無リスク金利（年利）5% とするとき，リスク中立確率測度下でのデフォルト確率 q を計算せよ． $\diamond$

A.J.McNeil, etal., Quantitative Risk Management, Princeton Univ. (2005) 9.3 節例9.17.； 中川秀俊（2011年首都大学東京集中講義）

割引社債は，額面より割り引いた値で買い，満期に額面どおり引き取ってもらう契約（債券）.（会社はそのお金でその期間に事業をして利益を上げる.）満期前に破産すると契約を履行できず（デフォルト＝不履行），残った財産を債権者間で分配など（精算），得られる割合が回収率．

国債のように（実際は昔の国王は平気でデフォルトさせたらしいが，理想化された概念として）破産が起きない債券の，満期時の値と購入時の値の比が無リスク金利．国債と割引社債で利回りの期待値が等しくなるのがリスク中立確率

例題の答え

例題．デフォルトしなければ 1 年後に額面 1 単位が支払われ，デフォルトが起きれば 1 年後に $1-\delta = 0.6$ 支払われる割引社債の現時点での市場価格 $p_1 = 0.941$，実確率測度でのデフォルト確率 $\overline{p} = 0.01$，無リスク金利（年利）5% とするとき，リスク中立確率測度下でのデフォルト確率 q を計算せよ． $\diamond$

答．期待収益率が商品によらないためには，

$\dfrac{1}{p_1}((1-\delta)\times q + 1 \times (1-q)) = 1.05$．**よって，** $1-\delta q = 1.05\,p_1$．

これを解いて， $q = \dfrac{1}{\delta}(1-1.05\,p_1) = 0.030 \ (q \neq \overline{p})$ $\square$

補足 1： $q = \overline{p}$ **となるとは限らない**

補足 2：満期が 1 年後のデフォルトリスクの無い割引債の現時点の価格 $p_0 = \dfrac{1}{1.05}$．

この期間の信用スプレッド $c = -(\log p_1 - \log p_0) = 0.012$．

ところで $1-\delta q = p_1/p_0$ **だから** $c = -\log(1-\delta q) \fallingdotseq \delta q$

補足 3：この講義は現実の話をしないが，重要でないとは言ってない（重要です）

補遺：リスク中立確率

例題２． ３頭a,b,cによる競馬で，１位のみ予想する最も単純な馬券の締切時点の倍率がそれぞれ２倍，３倍，６倍であった．大勢いる賭のプレーヤーの総意として，それぞれの馬の勝つ確率はいくらか？ ◇

答． リスク中立確率は $\mathrm{P}_Q[\,\{a\}\,]=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}_Q[\,\{b\}\,]=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}_Q[\,\{c\}\,]=\dfrac{1}{6}$, で定まる．これが参加者の総意． □

将来の利益（リターン）の期待（掛け金を予想的中者の中で分配）に賭参加者が手持ちのお金を払う：

N 人が１単位ずつ馬券を買う．馬a,b,cの１位をそれぞれ N_a, N_b, N_c 人が予想（対応する馬券を買う）．$N_a+N_b+N_c=N$ — (*)

（合計 N 単位のお金が集金される．参加費や場所代や手数料等は簡単のため無視.）

Aが勝てば当てた N_a 人で N 単位のお金を分配→一人 N/N_a 単位獲得．

- １単位の馬券で獲得したので $O_a=N/N_a$ が馬aの**倍率**．O_b, O_c

リスク中立確率（続）

$\Omega = \{a, b, c\}$； $a =$「1位は馬a」，$b =$「1位は馬b」，…．(*)から，

倍率の逆数 $p_a = \dfrac{N_a}{N},\ p_b = \dfrac{N_b}{N},\ p_c = \dfrac{N_c}{N}$ は **Ω 上の確率測度**を定義：

$\mathsf{P}_Q[\ \{a\}\ ] = p_a$，…，$\mathsf{P}_Q[\ F\ ] = \sum_{x \in F} \mathsf{P}_Q[\ \{x\}\ ]$：**リスク中立確率**

- 倍率低いほど大勢の参加者が勝つ**可能性が高いと思っている**ので，(Ω, P_Q) は参加者の状況判断の**総意**を表す確率空間とみなせる．
- P_Q の下で**期待収益率**＝倍率 $O_x \times p_x$ が $x = a, b, c$ で等しい．

（$N \gg 1$ の時）馬券の1単位変更で平均的にリターンの差がない．

リスク中立確率測度：全馬券等価なので賭が成立した，という**リスク**（将来価値のバラツキ）判断をする人の立場を表す確率空間

実確率とリスク中立確率

- 実確率：何回も実験して統計法則（分布についての**大数の法則**）
- リスク中立確率：1回限りや複雑すぎるとき

- 実確率測度：財務等に基づく過去の統計（会社の存廃，デフォルト）→リスクの目安はリターンの標準偏差**（バラツキ）**
- リスク中立確率：金融派生商品はリスクヘッジ／テイクの思惑が錯綜→参加者の総意で決まる

- 統計的予測もリスク中立確率も現場に存在する，**確率測度の定義を満たす**，量．矛盾の無い数学的対象．

実際に起きることは神のみぞ知るという意味ではどちらも抽象的な量．

まとめ

2項2期モデル $\overrightarrow{S}_t = (B_t, S_t)$，$t = 0, 1, 2 = T$

$$B_t = (1+r)^t B,\ S_t = S \prod_{s=1}^{t} X_s,\ X_t = 1+u \text{ または } X_t = 1+d$$

$B > 0,\ S > 0,\ 1+u > 1+r > 1+d > 0$（1期モデルと同じ）

行使価格 K のヨーロッパコールオプション $Y = (S_T - K)_+$

複製ポートフォリオ $\overrightarrow{x}_t = (x_{t,B}, x_{t,S})$（可予測過程）

$$V_2 = V_2(X_1, X_2) := (\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{S}_2) = Y = (S_2 - K)_+$$

自己資金調達的ポートフォリオ組替

$$(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{S}_1) = V_1 = V_1(X_1) = (\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{S}_1)$$

オプションの価格 $E_0 = x_{1,B}B + x_{1,S}S = (\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{S}_0) = V_0$

$$= \frac{1}{(1+r)^2} \mathsf{E}_Q[\, Y(X_1, X_2)\,]$$

４．分離定理

分離定理（理論経済学の種々の基礎で使う「親玉」の数理的概念）

→　Gordan の定理とその「親戚」

→　（無裁定市場モデルにおけるリスク中立確率の存在定理）

前回と前々回の計算がうまく行く種明かし（つまり同様にオプションの価格付けが可能なモデルの特徴）を，春の終わりまで延々説明します

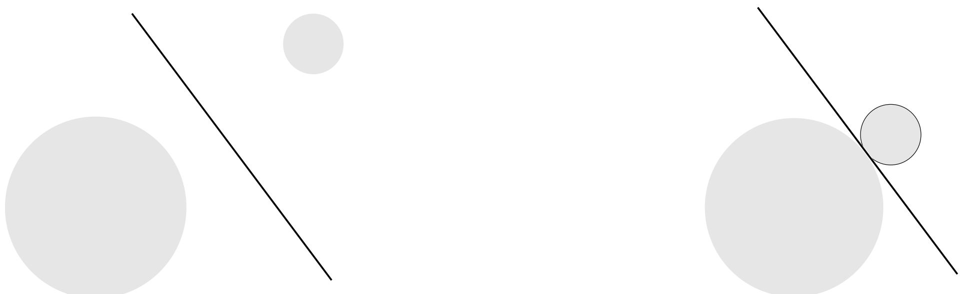
しばらくファイナンスから離れて基礎数学の勉強をします

レポート１ ＠ keio.jp

凸集合と分離定理（直感）

凸集合：　「膨らませた風船」

分離定理：　２つの風船の間に仕切りを入れて別の半空間に入れられる



- 何次元空間でもよい（$\mathbb{R}^n$ ならば仕切りは $\mathbb{R}^{n-1}$）
  「仕切り」を（超）平面と呼ぶ　（空間が平面なら，直線のことを超平面）
- 接していてもよい（少なくとも一方の図形が接点を含まないなら，超平面を接点を含む図形の半空間にくっつけることで分離できる）
- ２つの図形が**共有点を持たない凸集合**という仮定だけで成立

・数学の定理：真偽が明確（式で書くと日常語の曖昧さを排する役に立つ）
　　　　　　　正しい証明（証明を確認するまでは正しくても予想）

・数学の良い基礎定理：条件が少ない
　　　　　　　　　　　条件が少しでも破れると成り立たない例が多出（ぎりぎり一杯の条件）

分離定理

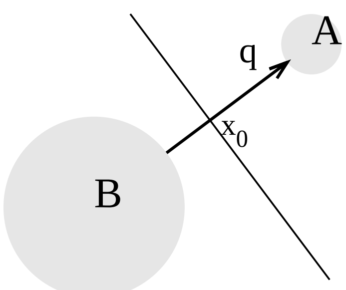
証明で線形演算　→　点を位置ベクトル（原点を始点としたときの終点）で表す．$(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$ は内積

$A\subset\mathbb{R}^n$ が**凸集合**：$\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in A$ かつ $0<t<1$ なら $t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}\in A$

定理．$A,B\subset\mathbb{R}^n$ が凸集合で $A\cap B=\emptyset$ ならば，どの $\overrightarrow{x}\in A$ も $(\overrightarrow{q},\overrightarrow{x})\geqq c$ かつどの $\overrightarrow{y}\in B$ も $(\overrightarrow{q},\overrightarrow{y})\leqq c$ を満たす，ゼロでないベクトル $\overrightarrow{q}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\overrightarrow{0}\}$ と実定数 c の組がある．

特に上に加えて，A,B 共に閉集合の場合は，どの $\overrightarrow{x}\in A$ も $(\overrightarrow{q},\overrightarrow{x})\geqq c+c'$ かつどの $\overrightarrow{y}\in B$ も $(\overrightarrow{q},\overrightarrow{y})\leqq c$ を満たす，ベクトル $\overrightarrow{q}\in\mathbb{R}^n$ と実定数 c と正定数 c' の組がある．(特に以下は $\overrightarrow{q}\neq\overrightarrow{0}$ は自動的）　◇

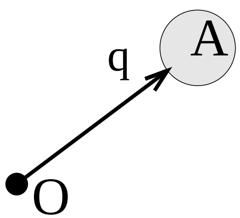
分離超平面 $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{q})=0$　（$\overrightarrow{x_0}$ を通り $\overrightarrow{q}$ を法線）$\Leftrightarrow$　$c=(\overrightarrow{q},\overrightarrow{x_0})$



・分離超平面の作図は $\overrightarrow{q}$ と $\overrightarrow{x_0}$ を求めることだが，分離定理を理論で使うときは定理のように $\overrightarrow{q}$ と c の存在保証として使うことが多い
・次２頁の証明粗筋で得る $\overrightarrow{q}$ は A と B の最短線（A が終点），c は $(\overrightarrow{q},\overrightarrow{y})$, $\overrightarrow{y}\in B$, の上限（「最大値」）
・講義では，Gordan の定理と Stiemke の補題の証明は前半の形，Farkas の補題の証明は「特に」の形を次ページ（原点と閉凸）の形，で使う

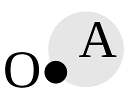
証明の準備の粗筋　ー　原点と凸集合

補題． $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉凸集合で $\overrightarrow{0} \notin A$ ならば，どの $\overrightarrow{x} \in A$ も $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{x}) \geqq c'$ となる，$\overrightarrow{q}$ と正定数 c' の組がある（$\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{0}$ は自動的） $\diamond$



証明粗筋 (1) 最小値の原理を $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|$ に用いると，
$\exists \overrightarrow{q} \in A;\ c' := \|\overrightarrow{q}\|^2 \leqq \|\overrightarrow{x}\|^2,\ \ \overrightarrow{x} \in A$
(2) A が閉集合で $\overrightarrow{0} \notin A$ なので $c' > 0$
(3) A が凸なので $\overrightarrow{x} \in A$ と $0 < t < 1$ に対し $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{q} + t(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{q}) \in A$ だから
$\|\overrightarrow{y}\|^2 \geqq \|\overrightarrow{q}\|^2$．内積に直して展開すると $2(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{q}) \geqq -t\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{q}\|^2$ $\square$

補題． A が凸で $\overrightarrow{0} \in \overline{A} \setminus A$ ならば $\exists \overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{0};\ (\forall \overrightarrow{x} \in A)\ (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{x}) \geqq 0$． $\diamond$



証明粗筋 A を少し $\overrightarrow{0}$ からずらした A' の閉包 $\overline{A'}$ に上記補題を使い，得られた $\overrightarrow{q}$ を規格化して，A' を A に近づける（詳細は略） $\square$

$B = \{\overrightarrow{0}\}$ の場合は（A が $\overrightarrow{0}$ と離れていれば A の閉包に最初の補題を使うことで）全て上の 2 つの補題に帰着（詳細は略），次の定理を得る．

定理． $A \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合で $\overrightarrow{0} \notin A$ ならば，
$\exists \overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ (\forall \overrightarrow{x} \in A)\ (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{x}) \geqq 0$． $\diamond$

分離定理の証明の粗筋

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して $A - B = \{\vec{x} - \vec{y} \mid \vec{x} \in A,\ \vec{y} \in B\}$ とおく．

命題．$A, B \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合ならば $A - B$ も凸集合． ◇

例．A と B が線分なら $A - B$ は平行四辺形
三角形と線分なら 5 角形
三角形どうしなら 6 角形まで

$A - B$ の図形形状は複雑に見えるが，命題の証明は定義式の式変形が便利

証明．$\vec{z_i} \in A - B,\ i = 1, 2,,$ と $0 < t < 1$ に対して，$\vec{z_i} = \vec{x_i} - \vec{y_i},\ \vec{x_i} \in A,$ $\vec{y_i} \in B,$ と書けて，A と B が凸なので

$t\vec{z_1} + (1-t)\vec{z_2} = (t\vec{x_1} + (1-t)\vec{x_2}) - (t\vec{y_1} + (1-t)\vec{y_2}) \in A - B$． □

分離定理の証明．（A, B どちらか空集合だと無意味なので両方空でないとする．）定理の仮定（A と B が凸で $A \cap B = \emptyset$）と上の命題から $A - B$ も凸で $\vec{0} \notin A - B$ だから，前ページの定理の結論で A を $A - B$ とした結果が成立．

$c = \sup\limits_{\vec{y} \in B} (\vec{q}, \vec{y})$ とおくと，A, B が空でないので c は（有限値で）決まり，$A - B$ についての上の結果と合わせると定理の主張の 2 つの不等式が成り立つ．

両方とも閉集合の場合の c' は前ページの補題の $c' > 0$ が加算される． □

凸関数の値域と分離定理　−　minimax定理

凸集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ **上の実数値関数** $f:\ S \to \mathbb{R}$ **が凸関数とは，**
$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in S$ **かつ** $0 < t < 1$ **ならば必ず**
$f(t\overrightarrow{x} + (1-t)\overrightarrow{y}) \leqq tf(\overrightarrow{x}) + (1-t)f(\overrightarrow{y})$ **となること（下に凸）．**
定理． $S \subset \mathbb{R}^n$ **は凸集合，** $\overrightarrow{h}:\ S \to \mathbb{R}^k$ **は凸関数（各成分** $h_i,\ i = 1, \ldots, k,$ **が凸関数）で** $\displaystyle \min_{\overrightarrow{x} \in S}\ \max_{i=1,\ldots,k} h_i(\overrightarrow{x}) \geqq 0$ **を満たすと，**
$$\exists \overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ \ \min_{\overrightarrow{x} \in S} (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})) \geqq 0.$$
特に，仮定の不等式が等式ならば結論も等式． $\diamond$

- **「特に」の部分の証明．仮定の不等式が等式ならばすべての** i **で** $h_i(x) \leqq 0$ **なる点** $x = x_0$ **があるので，結論の式の左辺で** $x = x_0$ **を考えれば等号になる．**

- **次回以降** $\overrightarrow{h}$ **が線形写像（**1 **次同次式）のときに限るが，分離定理経由の上記は一般の凸関数で成立．特にminimax定理の証明にも使える（非協力ゲーム理論，統計的決定論，線形計画法など）**

凸関数の値域と分離定理　－　補足

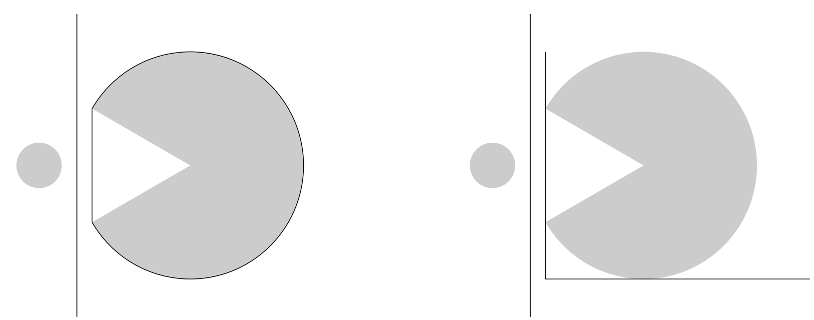
- 定理の式の**説明**：h_i たちが凸関数のとき，

仮定：　定義域のどの点 $\overrightarrow{x}$ でもどれかの値 $h_i(\overrightarrow{x})$ は非負，ならば，
結論：　h_i の非負係数 $(\overrightarrow{p} \geqq \overrightarrow{0})$ 非自明 $(\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0})$ 線形結合が常に
非負になるよう $\overrightarrow{p}$ を選べる：$(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})) = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i(\overrightarrow{x}) \geqq 0$　◇

- **逆**・裏は容易：h_i が一斉に負値になる点 $\overrightarrow{w}$ があれば $h_i(\overrightarrow{w})$ の非負値非自明線形結合は負．**定理は凸関数なら２つの不等式が同値と主張**

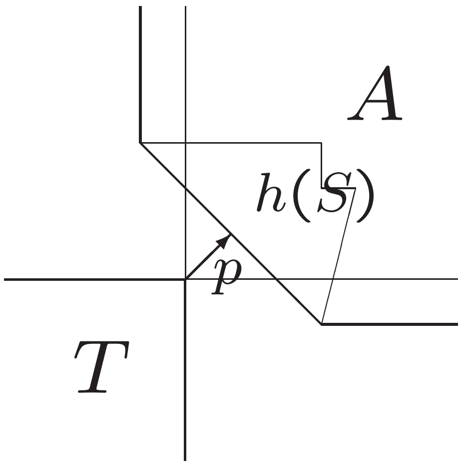
- 証明のための**補足**：分離定理は強力だが，使うのに工夫を要する

分離できるために凸の仮定が必要な状況



非凸集合に分離定理を用いる技巧例（凸包と錘）

凸関数の値域と分離定理　－　証明



証明. $A = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \overrightarrow{x} \in S;\ \overrightarrow{u} \geqq \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\}$
$T = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i < 0,\ i = 1, \ldots, k\}$ 第３象限（除境界）　→　$A \cap T = \emptyset$，T は凸，$\overrightarrow{h}$ が凸関数だから A も凸　＋　分離定理　→
$(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{u}) \geqq c \geqq (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u} \in A,\ \overrightarrow{v} \in T,$
となる $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と $c \in \mathbb{R}$ の組がある.
T の中で $v_i \to -\infty$ とできるので $p_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, k$.
さらに T の中で $\overrightarrow{v} \to \overrightarrow{0}$ とできるので $c \geqq 0$.
$\overrightarrow{x} \in S$ なら $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) \in A$ だから主張を得る. $\square$

線形写像の値域と分離定理　－　予告

・１次同次式（線形写像）$h_i(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{x})$は凸関数．
$A = (\overrightarrow{a_1} \ \cdots \ \overrightarrow{a_k})$: $n \times k$，$S = \mathbb{R}^n$ のときにminimax型定理　→
${}^t\overrightarrow{x}A$が全成分負な$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$がない$\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\}; A\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$
・注．定理の注のとおり，$\Leftarrow$は容易．応用で使うのは$\Rightarrow$

微妙に異なる多数の定理（次回）：

・　細かい差異（仮定と結論から一部または全部等号を除いた形，Gordanの定理，Stiemkeの補題，Farkasの補題等）
・　証明には分離定理以外に線形空間の性質も必要（分離定理などの極限の考察を含まず線形空間の性質だけの厳密証明などもあるが，当然長い）
・　講義では$S = \mathbb{R}^n$とするが，非負成分ベクトル全体$\mathbb{R}^n_+$で得る結果を上記定理・補題名で呼ぶ場合もあるようだ

まとめ

凸集合

超平面の方程式（1**点の位置ベクトルと法ベクトル）**

分離定理（共有点を持たない2**つの凸集合は超平面で分離）**

集合 $A - B$**，**A **と** B **が凸なら** $A - B$ **も凸**

証明：原点と凸集合→最小値の原理（＋極限）

凸関数の値域における分離定理（minimax**定理）**

関数が1**次同次式の場合**(Gordan, Stiemke, Farkas)**（続く）**

５．線形写像の値域と分離定理

分離定理　→　Gordanの定理　→　Fritz–John条件（経済数学２）

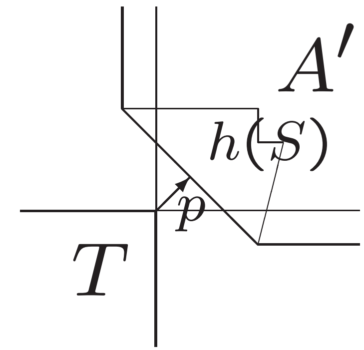
Gordanの定理の「親戚」の定理
　Stiemkeの補題
　Farkasの補題　→　Kuhn–Tukcer条件（経済数学２）

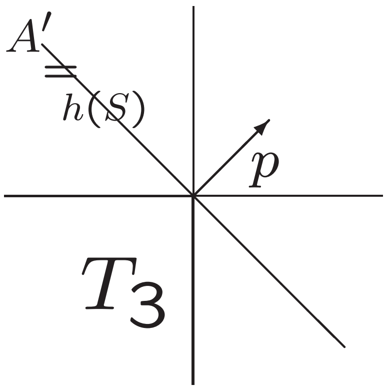
（→　無裁定市場モデルにおけるリスク中立確率の存在定理）
（　　裁定の定義の微妙な違いが使う定理の違いと結びつく）

前回の基礎数学勉強残りを片付けます（ファイナンスとの関係は次回）

凸関数としての線形写像の値域と分離定理

minimax型定理（前回）の証明における分離定理の適用（再掲）:
第３象限 $T = T_3 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i < 0,\ i = 1, \ldots, k\}$ は凸．
$\overrightarrow{h}$ が凸関数だから A' も凸．定理の仮定下で
$A' = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \overrightarrow{x} \in S;\ \ \overrightarrow{u} \geqq \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})\}$
→ $A' \cap T = \emptyset$,





A : $n \times k$．**線形写像** $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = {}^tA\overrightarrow{x}$（1次同次式）
→ S が凸なら $A' = \{{}^tA\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in S\}$ も凸！
定理の仮定下で $A' \cap T_3 = \emptyset$ → 前回のminimax型定理の結論より強く等号 $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})) = 0$

・線形写像で強い結果を得る**直感**：
定義域が線形空間 $\mathbb{R}^n$ なので値域も $\mathbb{R}^k$ 全体か k 次元未満の原点を通る超平面
→ 第３（または１）象限と交わらないから全体は排除
→ 成分定符号の法ベクトル $\overrightarrow{p}$ がある（法線＝直交）

Gordanの定理（択一型）

択一型の主張：「PかQの一方が必ず成り立ち，同時には成り立たない」
A: $n \times k$，ベクトルは列ベクトル，^{t}は転置，$\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$は全成分非負．
Gordanの定理． $^t\overrightarrow{x}A$の全成分が負になる$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ （連立１次不等式 $x_1a_{1i} + \cdots x_na_{ni} < 0,\ i = 1, \ldots, k,$ の解）があるか，連立一次方程式 $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$が$\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$と$\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$を満たす解を持つか二者択一 ◇

注．

- $^t\overrightarrow{x}A$の全成分が**正**な$\overrightarrow{x}$の存在と$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$の非負非自明解の存在も択一
- ^tAをAと書いた,「$A\overrightarrow{x}$が全成分負になる$\overrightarrow{x}$があるか，$^t\overrightarrow{y}A = \overrightarrow{0}$が非負値非自明解を持つか択一」等も同値 （$A$と$\overrightarrow{x}$の位置関係はヒントにならない）
- 等号の有無が違う親戚の結果があるので，**記号$\overrightarrow{x} > \overrightarrow{0}$は誤解に注意**

不等号の使い方	流儀１	流儀２	流儀３
全成分非負で０ベクトルではない	$\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{x} \underset{\neq}{>} \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{x} > \overrightarrow{0}$
全成分正	$\overrightarrow{x} > \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{x} > \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{x} \gg \overrightarrow{0}$

Stiemkeの補題，Farkasの補題

Stiemkeの補題． ${}^t\overrightarrow{x}A \geqq \overrightarrow{0}$ かつ ${}^t\overrightarrow{x}A \neq \overrightarrow{0}$ を満たす $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ があるか，連立一次方程式 $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ が全成分正 $(y_j > 0,\ j = 1, \ldots, k)$ の解を持つか二者択一 ◇

Farkasの補題． $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ のとき，${}^t\overrightarrow{x}A \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}) < 0$ を満たす $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ があるか，連立一次方程式 $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$ を満たす解を持つか二者択一 ◇

注（予告で既出）．
- 証明には分離定理以外に線形空間の性質（直交補空間など）も必要（分離定理などの極限の考察を含まず線形空間の性質だけの厳密証明などもあるが，当然長い）
- 定理と補題たちは，応用先の問題の仮定（裁定の定義）に応じて使いわける
- 値域の分離定理で $S = \mathbb{R}^n_+$ として得る（線形空間を使わない）定理を用いる本もある（前回に戻れば同様に扱えるが，以下略）

択一型の命題と同値条件型の命題

- 「P と Q が択一」と「P でない $\Leftrightarrow Q$」は同値

・$P =$ 「$\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$; ${}^t A \overrightarrow{x}$ の全成分が負」の否定：「${}^t A \overrightarrow{x}$ の形に書けるベクトルの集合と全成分が負のベクトルの集合の共通部分は空集合」

$T_3 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i < 0,\ i \leqq k\}$, $T_1 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i > 0,\ i \leqq k\}$ （除境界）

$\overline{T_3} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i \leqq 0,\ i \leqq k\}$, $\mathbb{R}^k_+ = \overline{T_1} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i \geqq 0,\ i \leqq k\}$ （含境界）

$A:\ n \times k$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$

Gordan の定理． $\{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \cap T_3 = \emptyset \Leftrightarrow \{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \cap T_1 = \emptyset$

$\Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ◇

Stiemke の補題． $\{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \cap \overline{T_1} = \{\overrightarrow{0}\}$

$\Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in T_1;\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ◇

Farkas の補題． ${}^t A \overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}\ \Rightarrow\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}) \geqq 0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{b} \in \{A\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}\}$ （錘）

注． Farkas の補題を他と似せて書くと，

$$\{\begin{pmatrix} {}^t A \\ -{}^t\overrightarrow{b} \end{pmatrix} \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} \cap \{\begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \\ v \end{pmatrix} \mid \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k_+,\ v > 0\} = \emptyset$$

$\Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in \overline{T_1};\ (A\ (-\overrightarrow{b}))\begin{pmatrix} \overrightarrow{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$ ◇

線形写像の値域と分離定理　−　証明の準備

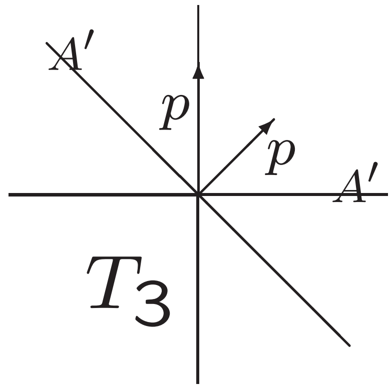
同値条件型＝証明に分離定理を利用しやすい形（単に同値条件型だけでなく，集合を用いて共通部分が空，という形に直したのも分離定理がすぐ使えるための変形）

- $\Leftarrow$ の証明は容易（分離定理不使用）：Gordan の定理．$\overrightarrow{x}$ を任意に選び $\overrightarrow{c} = {}^t A \overrightarrow{x}$ とおく．仮定から，$c_1 y_1 + \cdots + c_k y_k = {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = 0$．$y_i \geqq 0$，$i = 1, \ldots, k$，で $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ だから c_i たち全て同時に正（同時に負）はあり得ない．つまり $\overrightarrow{c}$ は T_1 (T_3) の要素でない．$\square$
- （Stiemke の補題，Farkas の補題の $\Leftarrow$ の証明は自習）
- $\Rightarrow$（応用上おもに利用する向き）：分離定理と線形空間の性質

→　次ページ以降

Gordanの定理の証明

第３象限内部$T_3 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i < 0,\ i \leqq k\}$ （第１象限T_1）
$A' = \{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$．Gordanの定理「⇒」（ここの証明の目標）．
$A' \cap T_3 = \emptyset \ \Leftrightarrow\ A' \cap T_1 = \emptyset \ \Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ◇



証明．A'は（線形空間なので）凸，T_3も凸（が定義から証明できる）．$T_3 \cap A' = \emptyset$なので分離定理($n = k,\ A = A',\ B = T_3,\ \overrightarrow{q} = \overrightarrow{y}$)から，どの$\overrightarrow{u} \in A'$も$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}) \geqq c$かつどの$\overrightarrow{v} \in T_3$も$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{v}) \leqq c$を満たす，$\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\overrightarrow{0}\}$と実定数$c$の組がある．（分離定理使い終わり.）

$\overrightarrow{0} \in A'$なので$c \leqq 0$．いくらでも$\overrightarrow{0}$に近い$T_3$の要素があるので$c \geqq 0$ 故に$c = 0$．A'は線形空間なので$\overrightarrow{u} \in A'$なら$-\overrightarrow{u} \in A'$．分離定理の結論で$\overrightarrow{u} \mapsto -\overrightarrow{u}$と$c = 0$を使うと$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}) \leqq 0$故に $= 0$． □

・$A' \cap T_1 = \emptyset$との同値性も同様に直接示せる（自習）
・**参考**．Fritz–John条件（経済数学２）では，点$\overrightarrow{a}$で$g_i(\overrightarrow{a}) = 0$となる不等式条件の関数$g_i$の勾配ベクトル$\nabla g_i(\overrightarrow{a})$たちと極値を求める関数$f$の$\nabla f(\overrightarrow{a})$を列ベクトルとして横に並べたのが上記の行列$A$

直交補空間と生成（線形代数からの準備）

・Stiemkeの補題の証明の最短方針．証明済みGordanの定理に，直交補空間と線形部分空間の生成（いずれも線形代数続論参照）を適用

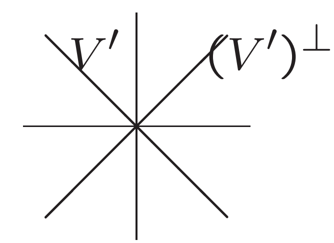
・等号の有無の細かい違いだが，分離定理から直接証明するのは長い

・$V \subset \mathbb{R}^k$ が線形（部分）空間とは線形結合について閉じてること

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V,\ c, d \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ c\overrightarrow{x} + d\overrightarrow{y} \in V)$，($\{\overrightarrow{0}\}$，原点を通る超平面，$\mathbb{R}^k$)

・部分空間はすべて $\overrightarrow{0}$ を要素に持つ

・部分空間 V の直交補空間　（詳しくは９．で）



$V^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^k,\ (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = 0,\ \overrightarrow{x} \in V\}$

・直交補空間は線形空間であって $(V^{\perp})^{\perp} = V$

・$k \times n$ 行列 B に対して $\mathrm{Im}(B) = \{B\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$ と $\mathrm{Ker}({}^tB) = \{\overrightarrow{y} \mid {}^tB\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}\}$ は $\mathbb{R}^k$ の線形部分空間

・部分空間 $V \subset \mathbb{R}^k$ は $V = \mathrm{Im}(B)$ と書ける自然数 n と $k \times n$ 行列 B がある（$\mathrm{Im}(B)$ は B の列ごとのベクトルたちが生成）

$(\mathrm{Im}(B))^{\perp} = \mathrm{Ker}({}^tB)$ $(\overrightarrow{y} \in (\mathrm{Im}(B))^{\perp} \ \Leftrightarrow\ {}^tB\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0})$　　◇

Stiemkeの補題の証明

$T_1 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i > 0,\ i \leqq k\}$, $\mathbb{R}^k_+ = \overline{T_1} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i \geqq 0,\ i \leqq k\}$

定理．線形空間 $V \subset \mathbb{R}^k$ **において** $V \cap T_1 = \emptyset \ \Leftrightarrow\ V^\perp \cap \overline{T_1} \neq \{\overrightarrow{0}\}$ ◇

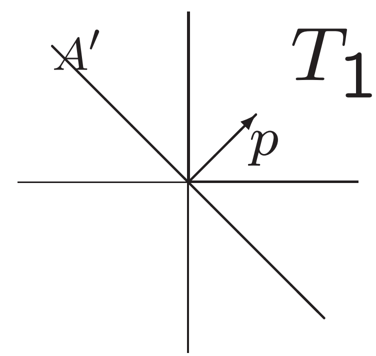
証明． $V = \{{}^tA\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$ **となる** n **と** $n \times k$ **行列** A **がある（前ページ）から，** (*) $V \cap T_1 = \emptyset \ \Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ （Gordan）．$\overline{T_1} = \mathbb{R}^k_+$ **で** $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{y} \in V^\perp$ **（$V^\perp$ の定義）だから，** (*)$\Leftrightarrow\ \overline{T_1} \setminus \{\overrightarrow{0}\} \cap V^\perp \neq \emptyset$**．前ページから** $V^\perp$ **は線形空間だから** $\overrightarrow{0}$ **を要素に持つので** (*)$\Leftrightarrow\ \overline{T_1} \cap V^\perp \neq \{\overrightarrow{0}\}$ □

・定理で $V = A' = \{{}^tA\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$ **としたのが Gordan の定理，** $V = (A')^\perp$ **としたのが Stiemke の補題．**

Stiemkeの補題の証明．定理で $V = (A')^\perp$**．** $(A')^{\perp\perp} = A'$ **（前ページ）なので，**

(**) $A' \cap \overline{T_1} = \{\overrightarrow{0}\} \ \Leftrightarrow\ (A')^\perp \cap T_1 \neq \emptyset$ **（対偶）．**

$A' = \mathrm{Im}({}^tA)$ **と前ページから，** $\overrightarrow{y} \in (A')^\perp = \mathrm{Ker}(A) \ \Leftrightarrow\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$**．よって，** (**)$\Leftrightarrow\ \exists \overrightarrow{y} \in T_1;\ A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$**．** □



Farkasの補題の証明

対偶（＋平行移動表記） $\overrightarrow{0} \notin \{A\overrightarrow{y} - \overrightarrow{b} \mid \overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}\}$
$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{b} \notin \{A\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}\}$
$\Leftrightarrow \ \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n;\ {}^tA\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0},\ (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}) < 0$ （の$\Rightarrow$）を証明．
原点と閉凸集合の分離定理（補題）から，
どの $\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$ も $(\overrightarrow{q}, A\overrightarrow{y} - \overrightarrow{b}) \geqq c'$ を満たす，$\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^n$ と正定数 c' の組がある．$\overrightarrow{y} = 0$ のとき $(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{b}) \leqq -c' < 0$．
もし $(\overrightarrow{q}, A\overrightarrow{y_0}) = -\alpha < 0$ なる $\overrightarrow{y_0} \geqq \overrightarrow{0}$ があると，
$k \geqq 0$ ならば $k\overrightarrow{y_0} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ，$(\overrightarrow{q}, Ak\overrightarrow{y_0} - \overrightarrow{b}) = -k\alpha - (\overrightarrow{q}, \overrightarrow{b})$ はいくらでも小さい値になるので c' の存在が不成立．よって
$({}^tA\overrightarrow{q}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{q}, A\overrightarrow{y}) \geqq 0$ が任意の $\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$ で成り立つので，(どれかの成分のみ１他０の場合を考えて）${}^tA\overrightarrow{q} \geqq \overrightarrow{0}$．
$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{q}$ が求めるものである． $\square$

補：Farkasの定理の分離定理を使わない証明概略

$f(\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\left\|A\overrightarrow{y} - \overrightarrow{b}\right\|^2$ を $\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$ ($\overline{T_1}$ 上) で考える．

補題1． f は最小値をある点 $\overrightarrow{\widehat{y}} \geqq \overrightarrow{0}$ で取る． ◇

補題2． $\overrightarrow{\widehat{y}}$ で f が $\overline{T_1}$ 上の最小値を取ることと次の成立が同値：
$\overrightarrow{\widehat{y}} \geqq \overrightarrow{0}$, ${}^tA(A\overrightarrow{\widehat{y}} - \overrightarrow{b}) \geqq \overrightarrow{0}$, ${}^t\overrightarrow{\widehat{y}}\,{}^tA(A\overrightarrow{\widehat{y}} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$, ◇

補題1,2を認めたときのFarkasの補題の⇒の証明． $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ に $\overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}$ なる解がないと，補題2から $\overrightarrow{\widehat{y}} \geqq \overrightarrow{0}$ なので $\overrightarrow{\widehat{x}} = A\overrightarrow{\widehat{y}} - \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$．補題2から ${}^tA\overrightarrow{\widehat{x}} \geqq \overrightarrow{0}$, さらに ${}^t\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{\widehat{x}} = -\left\|\overrightarrow{\widehat{x}}\right\|^2 < 0$．よって⇒の対偶が証明できた． □

補題1の証明について． f は連続だが定義域を有界集合に限れると限らないので面倒．省略

補題2の証明について． $\overrightarrow{\widehat{g}} = {}^tA(A\overrightarrow{\widehat{x}} - \overrightarrow{b})$ とおいて $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{\widehat{x}}) + {}^t(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\widehat{x}})\overrightarrow{\widehat{g}} + \frac{1}{2}\left\|A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\widehat{x}})\right\|^2$ を使うと⇐は $f(\overrightarrow{x}) \geqq f(\overrightarrow{\widehat{x}})$ が直接示せる．⇒は，$\widehat{g}_k < 0$ なら $t\left\|A\overrightarrow{e_k}\right\|^2 < -\widehat{g}_k$ なる $t > 0$ をとると $f(\overrightarrow{\widehat{x}} + t\overrightarrow{e_k}) < f(\overrightarrow{\widehat{x}})$ から背理法．最後に $\widehat{x}_k > 0$ かつ $\widehat{g}_k > 0$ のとき，$0 < t < \widehat{x}_k$ かつ $\frac{1}{2}t\left\|A\overrightarrow{e_k}\right\|^2 < \widehat{g}_k$ なる $t > 0$ をとると，$f(\overrightarrow{\widehat{x}} - t\overrightarrow{e_k}) < f(\overrightarrow{\widehat{x}})$ □

・**参考**．Kuhn–Tucker条件（経済数学2）では，点 $\overrightarrow{a}$ で $g_i(\overrightarrow{a}) = 0$ となる不等式条件の関数 g_i の勾配ベクトル $\nabla g_i(\overrightarrow{a})$ たちを列ベクトルとして横に並べたのが A，極値を求める関数 f の $\nabla f(\overrightarrow{a})$ が ${}^t\overrightarrow{b}$．なお，経済数学2では，Farkasの補題の同値条件ではなく，制約想定と呼ぶ適用範囲の狭い十分条件を扱う．

まとめ

「第１象限」$T_1 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i > 0,\ i \leqq k\}$（除境界），$\mathbb{R}^k_+ = \overline{T_1} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^k \mid u_i \geqq 0,\ i \leqq k\}$（含境界），線形空間$V \subset \mathbb{R}^k$に対して：

・分離定理＋線形空間の性質（直交補空間，生成＝線形写像の値域）→

定理． $V \cap T_1 = \emptyset \iff V^\perp \cap \overline{T_1} \neq \{\overrightarrow{0}\}$

→ $V = \{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}$とするとGordanの定理，

$V = \{{}^t A \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\}^\perp$とするとStiemkeの補題．

$\{A\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \geqq \overrightarrow{0}\}$に閉凸集合と１点の分離定理でFarkasの補題．

択一型：

Gordanの定理． ${}^t\overrightarrow{x}A$の全成分が負になる$\overrightarrow{x}$があるか，$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$が全成分非負の非自明解を持つか択一 ◇

Stiemkeの補題． ${}^t\overrightarrow{x}A \geqq \overrightarrow{0}$かつ${}^t\overrightarrow{x}A \neq \overrightarrow{0}$を満たす$\overrightarrow{x}$があるか，$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$が全成分正の解を持つか択一 ◇

Farkasの補題． $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$のとき${}^t\overrightarrow{x}A \geqq \overrightarrow{0}$かつ$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}) < 0$を満たす$\overrightarrow{x}$があるか，$A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$が非負解を持つか二者択一 ◇

★裁定の定義と使う定理が結びつくので本を読み比べるときは注意

６．裁定とリスク中立確率

裁定

リスク中立確率 (state price)

数理ファイナンスの第１基本定理

前２回の基礎数学をファイナンスの基本定理の１つに結びつけます

N項1期市場

自然数N．N個（銘柄＝いろんな発行元など）の**原資産**（株，債券など有価証券）を売買する（金融）**市場**（＝モデル）

時刻$t=0,1$での価格ベクトル$\overrightarrow{S}_t = \begin{pmatrix} S_{t,1} \\ \vdots \\ S_{t,N} \end{pmatrix}$．$\overrightarrow{S}_0$は確定値．

$S_{t,i}$：銘柄iの時刻tでの単価．以後，株価変動：未来$t=1$の**（予測できない）**種々の値の組の可能性$\Omega = \{\omega_j \mid j=1,\ldots,M\}$，がある**（から研究する）**$S_{1,i}:\ \Omega \to \mathbb{R}$．

$t=1$で起こりうる値の組をすべて並べる**荒技**の行列：

$$D = \begin{pmatrix} S_{1,1}(\omega_1) & \cdots & S_{1,1}(\omega_M) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{1,N}(\omega_1) & \cdots & S_{1,N}(\omega_M) \end{pmatrix} = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$$

ポートフォリオ

市場の特定参加者の**ポートフォリオ** $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$：$t=0$ で原資産 i を x_i 単位，$i=1,\ldots,N$ の組み合わせ

注．T 期モデルでは市況に応じて組み替え→ポートフォリオは t の関数（確率過程）

ポートフォリオ $\overrightarrow{x}$ の価値（$t=1$ で確率変数→確率過程）：

$$V_t = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_t) = x_1 S_{t,1} + \cdots + x_N S_{t,N} \ (t=0,1)$$

前提（数式にこめられた暗黙の）．

- ポートフォリオ初期値を持つには有史以前にバイトで金を貯めて買っておいたり，遺産を相続している必要→そこは問わずに「あるとき $\overrightarrow{x}$ を持っていた」としてその後の増減の公式を調べる（**初期値問題**）．
- $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ 自由に取れる＝(1) **無制限に大量**の特定銘柄，(2) **負**の所有（**空売り**）
- 空売り：株が印刷物だった時代→売買後郵送→持ってるふりして売買して後で調達して…もあり得たからこその名前かも，だが，現代的には借りた株 $-x_i > 0$ 単位を売り払った状態が $t=0$ （$t=1$ に買い戻す必要．売った代金や借り賃は有史以前として見ない）．
- 例．$V_0 = 5S_{0,1} - 10S_{0,2} < 0$ とは，有史以前に銘柄 2 を 10 単位借りて売り払い，代金の一部で銘柄 1 を 5 単位買って残金 $-V_0$ を生活費に充てた状態が $t=0$．

(3) （ついでに）取引手数料や制限条項（摩擦）無し (4) 細分可能

裁定

- インサイダー（犯罪）にとっての市場の例（必ず株が下がるという情報の場合）：

$N=2$, $S_{t,1}=1$：リスク（未来の分岐）無しの国債，簡単に，利子 0

$\Delta S = S_{0,2}-S_{1,2}>0$：インサイダー情報を得た（犯罪）株

裁定．$\vec{x} = \begin{pmatrix} S_{1,2} \\ -1 \end{pmatrix}$ （1 枚借りて売却し $S_{0,2}$ 得たうち $S_{1,2}$ で国債を買い，$\Delta > 0$ は借りるための手数料と生活費に充てた，までが前回のお話，という意味）

$$V_0 = x_1 + x_2 S_{0,2} = -\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = x_1 + x_2 S_{1,2} = 0$$

（$t=1$ で国債を売って，安くなった株 1 単位を買い戻し，借り主に返却，の意味.）

裁定 (arbitrage)：市場のリスクに無関係に必ず借金がちゃらになるポートフォリオ（数式による定義は次ページ以降）

- 裁定があると（$k \gg 1$ 倍して）無制限に儲かる（数理的単純化）

→数理ファイナンス研究の基礎的前提：裁定が無い場合を基準とする

無裁定（弱）の仮定

適用する定理の違いで強弱２種類の裁定の概念が初等解説に出回る．

狭義裁定：$V_0 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_0) < 0$ かつ $\begin{pmatrix} V_1(\omega_1) \\ \vdots \\ V_1(\omega_M) \end{pmatrix} = {}^tD\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ となる（リスク無関係に正定数 $(-V_0)$ 以上儲かる）ポートフォリオ $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$

定理．市場が無裁定（弱）（＝狭義裁定が無いこと）と次は同値：

$$\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j)\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$$ を満たす非負値の $\psi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ がある ◇

証明．$\overrightarrow{x}$ が狭義裁定：$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_0) < 0$ かつ ${}^tD\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$

市場が無裁定（弱）：${}^tD\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_0) \geqq 0$ 同値型 Farkas の補題 $(A = D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M)),\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{S}_0,\ y_j = \psi(\omega_j))$ から同値条件を得る □

※　「チラシしかない $(\overrightarrow{S}_0 = \overrightarrow{0})$ と皆が思ってたら割引券が混じってた」を無裁定とするので，後に追加仮定が必要だろう（最小限の仮定から始める流儀）

無裁定（強）の仮定

広義裁定：$\begin{pmatrix} -V_0 \\ V_1(\omega_1) \\ \vdots \\ V_1(\omega_M) \end{pmatrix} = {}^t(-\overrightarrow{S}_0\ D)\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $\neq \overrightarrow{0}$ となる（リスク無関係に損は無く，正に儲かる目（運）がある）ポートフォリオ $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$

定理．市場が**無裁定（強）**（＝広義裁定が無いこと）と次は同値：

$$\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j)\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$$ を満たす**正値**関数 $\psi : \ \Omega \to \mathbb{R}_+$ がある◇

証明．**市場が無裁定（強）**：$\{{}^t(-\overrightarrow{S}_0\ D)\overrightarrow{x}\} \cap \overline{T_1} = \{\overrightarrow{0}\}$

Stiemke の補題 $(A = (-\overrightarrow{S}_0\ \ D) = (-\overrightarrow{S}_0\ \ \overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \ \cdots\ \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M)))$ から，

$y_0\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} y_j\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$ なる $y_j > 0,\ j = 0, 1, \ldots, M,$ があることと同値．

$\psi(\omega_j) = y_j/y_0 > 0,\ j = 1, \ldots, M,$ の対応で主張の同値条件を得る □

State priceとリスク中立確率

ψが state price：$\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \overrightarrow{S}_1(\omega_j)$ を満たすΩ上の非負値関数

基本定理．市場が**無裁定**と state price ψの存在は同値．但し，
無裁定（弱）$\Leftrightarrow$ ψは非負値
無裁定（強）$\Leftrightarrow$ ψは正値 $\diamond$

無裁定で $\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \neq 0$ のとき（無裁定（強）か，無裁定で $\overrightarrow{S}_0 \neq \overrightarrow{0}$ ならOK），

$r = -1 + \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j)}$，$\rho = (1+r)\psi$ とおくと $\sum_{j=1}^{M} \rho(\omega_j) = 1$ で $\rho(\omega_j) \geqq 0$ な

ので，$\mathrm{P}_Q[\, A\,] = \sum_{\omega \in A} \rho(\omega)$ は（未来の分岐Ω上の**確率**：**リスク中立確率**

数理ファイナンスの第１基本定理

再掲． $\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \overrightarrow{S}_1(\omega_j)$, $\rho = (1+r)\psi$．よってリスク中立確率 P_Q についての期待値を E_Q と書くと $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r} \mathrm{E}_Q[\, \overrightarrow{S}_1 \,]$．逆にこの式が成り立つ P_Q と $r > -1$ があれば $\psi(\omega_j) = \dfrac{1}{1+r} \mathrm{P}_Q[\, \{\omega_j\} \,]$ はstate price．よって

第１基本定理． $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r} \mathrm{E}_Q[\, \overrightarrow{S}_1 \,]$ を満たす $r > -1$ と確率 P_Q があることと，無裁定（弱）でstate priceが $\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \neq 0$ の成立が同値．さらに無裁定（強）と全ての j で $\mathrm{P}_Q[\, \{\omega_j\} \,] > 0$ が同値 ◇

注． 確率が１つに決まるとは言ってない（→第２基本定理）

無裁定の仮定

注．定理の仮定ではないので注記が見られないが，価格の時間変化が利率（正数の掛け算）なので，$\overrightarrow{S}_0$ の全成分が正は事実上の前提

- State priceがあれば総和は正と思ってる
- 裁定の，負（非正）から正（非負）の定式化は本質の一部

（再掲）裁定：市場のリスクに無関係に必ず借金がちゃらになるポートフォリオ
（どの証券を買っても必ず儲かるのは裁定では無く高度経済成長）
（再掲）裁定があると（$k \gg 1$ 倍して）無制限に儲かる（数理的単純化の結果）

→　無裁定の場合の研究が（有限の答えが出て）やりやすい

- 現実にも，大きな裁定は生じても短時間で消えるだろう（思考実験）
  - 混乱（例：誤発注）で裁定機会が生じれば殺到
    →理想化された理論と違って発行数等有限で終了
  - インサイダーは犯罪（市場の発展を阻害するという認識？）
- 小さな裁定は手数料などの摩擦で儲けにつながらない

- （長時間安定な）市場モデルは無裁定を仮定して良いだろう

※　当選して買えたアイドルコンサート券をヤフオクで高く売る
→　リスク中立確率はそのような現象には使えない
  - 日本のGDPに比べて0で近似(?)
  - 商売は社会の現実を見て制度や証券を慎重に設計する必要
  - 裁定のある場合の研究をやる

まとめ

市場（1期）.（原資産の）価格：確定値 $\overrightarrow{S}_0$，分岐 ω_j のある $\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$
ポートフォリオ $\overrightarrow{x}$ の価値 $V_t = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_t)$（$x_j < 0$：空売り）
$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ が**裁定** (arbitrage)：$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$ とおくとき
$V_0 < 0$ かつ ${}^t D\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$（狭義），${}^t(-\overrightarrow{S}_0 \ D)\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $\neq \overrightarrow{0}$（広義）

state price: $\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j)\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$ を満たす ψ

Farkas の補題 → 無裁定（弱）$\Leftrightarrow$ **非負値**の state price ψ の存在
Stiemke の補題 → 無裁定（強）$\Leftrightarrow$ **正値**の state price ψ の存在

第1基本定理. $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_1\,]$ を満たす $r > -1$ と確率 P_Q（**リスク中立確率**）があることと無裁定（弱）で $\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \neq 0$ が同値．さらに無裁定（強）と $(\forall j)\ \mathrm{P}_Q[\,\{\omega_j\}\,] > 0$ が同値． $\diamond$

７．無リスク債券と安全利子率

無リスク債券

安全利子率

前回の続きです

レポート２ ＠ keio.jp

第 1 基本定理（復習）

市場の原資産価格 $\overrightarrow{S}_0$，$\overrightarrow{S}_1(\omega_j),\ j=1,\ldots,M$

ポートフォリオ $\overrightarrow{x}$ の価値 $V_t = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_t)$（$x_j < 0$：空売り）

$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ が**裁定**：$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \cdots\ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$ とおくとき

$V_0 < 0$ かつ ${}^tD\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$（狭義），${}^t(-\overrightarrow{S}_0\ D)\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $\neq \overrightarrow{0}$（広義）

state price: $\overrightarrow{S}_0 = \sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j)\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$ を満たす ψ

Farkas の補題 → 無裁定（弱）$\Leftrightarrow$ **非負値**の state priceψ の存在

Stiemke の補題 → 無裁定（強）$\Leftrightarrow$ **正値**の state priceψ の存在

第 1 基本定理．$\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\ \overrightarrow{S}_1\ ]$ を満たす $r > -1$ と確率 P_Q （**リスク中立確率**）があることと，無裁定（弱）で $\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \neq 0$ が同値．さらに無裁定（強）と全ての j で $\mathrm{P}_Q[\ \{\omega_j\}\ ] > 0$ が同値． ◇

- r の意味？

無リスク債券と安全利子率

- 原資産 i の**リスク**：$S_{1,i}(\omega_j)$ が j について定数でないこと

$i = 1$ が**無リスク債券**：$S_{0,1} > 0$ で $S_{1,1}(\omega_j)$ が定数（長期安定成長期の国債や大銀行 (too big to fail) 定期預金）→ $1 + r = \dfrac{1}{S_{0,1}} \mathrm{E}_Q[\, S_{1,1} \,] = \dfrac{S_{1,1}}{S_{0,1}}$

- リスク中立確率の定義の r は無リスク債券の利子率（**安全利子率**）

第１基本定理（言い換え）．$S_{t,1} > 0,\ t = 0, 1,$ が無リスク債券のとき，$\dfrac{S_{0,i}}{S_{0,1}} = \mathrm{E}_Q[\, \dfrac{S_{1,i}}{S_{1,1}} \,]$ を満たす確率 P_Q（価格過程 $\overrightarrow{S}_t$ の**マルチンゲール測度**）があることと，無裁定（弱）が同値.（さらに無裁定（強）と全ての j で $\mathrm{P}_Q[\, \{\omega_j\} \,] > 0$ が同値.） ◇

- 同じ P_Q を原資産 i について共通に取れる ($\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r} \mathrm{E}_Q[\, \overrightarrow{S}_1 \,]$) 側面から**リスク中立確率**，$\dfrac{S_{1,i}}{S_{1,1}}$ の（条件付き）期待値が時刻 t によらない（マルチンゲール）側面から**マルチンゲール測度**と呼ぶ．

例　ー　２項モデル

$N=2$, $i=1$（国債）は安全債券，$i=2$（株）は$t=1$で２状態，
$M=2$． $S_{0,1}=B>0$, $S_{1,1}(\omega_1)=S_{1,1}(\omega_2)=(1+r)B$,
$S_{0,2}=S>0$, $S_{1,2}(\omega_1)=(1+u)S$, $S_{1,2}(\omega_2)=(1+d)S$,
$B>0$, $S>0$, $u>d>-1$, $r>-1$

・国債と株両方意味があるには$d<r<u$が必要と考えた

命題． $d<r<u$と無裁定（強）が同値（無裁定（弱）$\Leftrightarrow$ $d\leqq r\leqq u$）

証明． $\overrightarrow{S}_0=\sum_{j=1}^{2}\psi(\omega_j)\overrightarrow{S}_1(\omega_j)=\begin{pmatrix}1+r & 1+r\\ 1+u & 1+d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi(\omega_1)\\ \psi(\omega_2)\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}\rho(\omega_1)\\ \rho(\omega_2)\end{pmatrix}=(1+r)\begin{pmatrix}\psi(\omega_1)\\ \psi(\omega_2)\end{pmatrix}=\frac{1}{u-d}\begin{pmatrix}r-d\\ u-r\end{pmatrix}$

基本定理から，無裁定（弱）$\Leftrightarrow$ $d\leqq r\leqq u$，無裁定（強）$\Leftrightarrow$ $d<r<u$ $\square$

2項モデルの裁定

- $d \leqq r \leqq u$でないときの裁定 $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

狭義：$V_0 = xB + yS < 0$，$V_1(\omega_1) = x(1+r)B + y(1+u)S \geqq 0$，$V_1(\omega_2) = x(1+r)B + y(1+d)S \geqq 0$.

$r < d$のとき，裁定$\Leftrightarrow \ x < 0, \ -Bx > Sy \geqq -\dfrac{1+r}{1+d}Bx$

（Bを$-x$枚空売り，うち一部でSを$y < -Bx/S$枚買い，$t = 1$で売ってBを買うと$\dfrac{(1+d)S}{(1+r)B}y \geqq -x$買えるので空売りを解消できる）

$u < r$のとき，裁定$\Leftrightarrow \ x > 0, \ Bx < -Sy \leqq \dfrac{1+r}{1+u}Bx$

裁定の直感的説明．金融商品の価格が不合理なことの反映．利率の悪い証券を借りて売り払って（空売りして）良い証券を買い占めて，満期に売り払って借りた分を買い戻して返しても，まだ残る．cf. 統計的決定理論の許容的解

例２　ー　安全債券のない場合の裁定

- **裁定と安全債券の有無は無関係**

例． $N=2$，$i=1,2$ **は** $t=1$ **で各２状態だが完全連動して** $M=2$

$S_{0,i}=S_i>0$，$1+a_i$，$1+b_i>0$，$i=1,2$，

$$D=(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2))=\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1+b_1 \\ 1+a_2 & 1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$(*)\ \ \overrightarrow{S}_0=\sum_{j=1}^{M}\overrightarrow{S}_1(\omega_j)\psi(\omega_j)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\psi(\omega_1)\begin{pmatrix} 1+a_1 \\ 1+a_2 \end{pmatrix}+\psi(\omega_2)\begin{pmatrix} 1+b_1 \\ 1+b_2 \end{pmatrix}$$

無裁定（弱） $\Leftrightarrow \psi(\omega_1)$，$\psi(\omega_2)\geqq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in$ **錘**

$\Leftrightarrow \dfrac{1+a_1}{1+a_2}\leqq 1\leqq\dfrac{1+b_1}{1+b_2}$ **または** $\dfrac{1+a_1}{1+a_2}\geqq 1\geqq\dfrac{1+b_1}{1+b_2}$

（２項モデル： $a_1=u_1$，$a_2=b_2=r$，$b_1=d_1$**）**

- **(＊) が非負の範囲で解けなければ (＊) が解けても裁定がある．**

例． $0<\gamma<1$，$1+a_2=\gamma(1+a_1)$，$1+b_2=\gamma(1+b_1)$**：**

裁定（広義） $\Leftrightarrow\ V_0=x_1S_1+x_2S_2\leqq 0$，$x_1S_2+x_2\gamma S_2\geqq 0$，$\overrightarrow{x}\neq 0$

$$\Leftrightarrow\ x_1>0,\ \frac{1}{\gamma}\frac{S_1}{S_2}x_1\geqq -x_2\geqq -\frac{S_1}{S_2}x_1$$

例２（続）　－　安全債券のない場合の安全利子率

（再掲）$N = M = 2,\ S_{0,i} = S_i > 0,\ 1 + a_i,\ 1 + b_i > 0,\ i = 1, 2,$

$$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2)) = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 + b_1 \\ 1 + a_2 & 1 + b_2 \end{pmatrix}$$

無裁定（強）$\Leftrightarrow \psi(\omega_1),\ \psi(\omega_2) > 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1 + a_1}{1 + a_2} < 1 < \dfrac{1 + b_1}{1 + b_2}$ または $\dfrac{1 + a_1}{1 + a_2} > 1 > \dfrac{1 + b_1}{1 + b_2}$

$\Rightarrow\ c = a_2 - b_2 - a_1 + b_1 \neq 0$

ポートフォリオ $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_2)S_2 \\ -(a_1 - b_1)S_1 \end{pmatrix}$ は $r = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{c}$ ($\Leftrightarrow$ $(a_1 - r)(b_2 - r) = (a_2 - r)(b_1 - r)$) とおくと，$V_0 = cS_1S_2$ から，

$V_1(\omega_1) = V_1(\omega_2) = (1 + r)V_0$．（$\dfrac{1}{1 + r} = \psi(\omega_1) + \psi(\omega_2)$ から求めても一致）

- 安全債券が無くても（完備無裁定なら）無リスクポートフォリオがある

リスク中立確率０の事象

無裁定（弱）の２項モデル $(u > d)$ のリスク中立確率（再掲）

$$\begin{pmatrix} \rho(\omega_1) \\ \rho(\omega_2) \end{pmatrix} = (1+r)\begin{pmatrix} \psi(\omega_1) \\ \psi(\omega_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{u-d}\begin{pmatrix} r-d \\ u-r \end{pmatrix}$$

無裁定（弱）$\Leftrightarrow\ d \leqq r \leqq u$，無裁定（強）$\Leftrightarrow\ d < r < u$

→無裁定（弱）だが広義裁定がある $\Leftrightarrow\ r \in \{d, u\}$

→$r = d$ のときの広義裁定：$y = -Bx/S > 0$，$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -S \\ B \end{pmatrix}$

（B を $-S$ 枚空売りうち一部で S を B 枚買い，$t = 1$ で売れば B を S 枚以上買えるので空売りを解消できる）

→確率０の ω_j がある：$r = d$ のとき $\begin{pmatrix} \rho(\omega_1) \\ \rho(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

→$r = d$ のとき $S_{1,2} = (1+d)S$ が確率１，$S_{1,2} = (1+u)S$ が確率０（実際にそうならば裁定にはならない）

・確率の大小がその分岐の起こりやすさに関する「市場の認識」

実確率とリスク中立確率

実確率測度（客観的確率測度）P_P**：実際の計測（データ）に基づく確率（株の上がる確率，会社が破産する確率，…）**

P_P**に関するリスク中立確率**P_Q**のラドン・ニコディム密度（導関数）**

$$L(\omega) = \frac{\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\ ]}{\mathsf{P}_P[\ \{\omega\}\ ]}$$ **（尤度比）**

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{1+r} L(\omega)$$ **：確率的割引因子（状態価格デフレータ）**

例． $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ \overrightarrow{S}_1\ ] = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_P[\ L\,\overrightarrow{S}_1\ ] = \mathsf{E}_P[\ \Lambda\,\overrightarrow{S}_1\ ]$

まとめ

- state price とリスク中立確率の比 $1+r$ の r は安全債券の利率
- リスク中立確率は価格過程の（条件付き）期待値を一定にする
  → （マルチンゲール）測度
- ２項モデルなどの例
- 理論：リスク中立確率が前提（無裁定），安全債券は不要．
- 現実：実確率とリスク中立確率は異なる数値，安全利子率は安全債券の利子率
- 裁定：金融市場（価格ベクトル）が不合理なことの反映．

８．オプションとその価格

無裁定の金融市場と中立確率 $\Leftrightarrow$ 確率空間 (Ω, P_Q)

デリバティブ（確率変数＝関数 $X: \ \Omega \to \mathbb{R}$）

現在時刻の価格とリスク中立確率

ファイナンスの計算の中心の１つ金融派生商品の価格の定式化です

デリバティブ

金融市場 (financial market)

商品＝原資産 (underlying asset) $\overrightarrow{S}_t$ 　　$\Omega \ni \omega \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{S}_t(\omega)$

無裁定 → リスク中立確率 P_Q → **確率空間** (Ω, P_Q)

デリバティブ (derivative，**金融派生商品**)　**確率変数**（**確率空間上の関数**）
（**但し先読みは不可能なので** $t = 0$ **は確定値 → 本当は，確率過程**）

例（為替市場：輸出入で現地通貨２のやり取りのための通貨両替

1）$t = 1$ **でその時点の為替レート** $S_{1,2}$ **で市場から１単位買う約束**

2）（**為替リスクを避けて**）$t = 1$ **で価格** K **で買う権利**

問．$t = 0$ **でいくら？（現在価値，プレミアム,「材料費」，除手数料等）**

無裁定条件と価格

1) $t=1$ で通貨 2 をその時点の 1 単位市場価格 $(S_{1,2})$ で買う約束
＝確率変数 $X=S_{1,2}$ → 現在価値は $S_{0,2}$

・直感．お金を今持っている人が $S_{0,2}$ で通貨 2 を買って $t=1$ で転売

・定式化．デリバティブを含めた市場の無裁定の要請
デリバティブも原資産同様にいくらでも売り買いする相手がいるとする

・言い換え．デリバティブ 1) が $S_{0,2}$ 以外の値だと裁定がある ◇
通貨 2 と 1) の安い方を買い，高い方を同量空売り，差額を消費すると $t=0$ で負のポートフォリオ．買った方を $t=1$ で売って代金で他方を買い戻せば 0 ◇

・確率変数（デリバティブ）の $t=0$ での価格が決まる可能性

・必ず買う契約よりも複雑な，オプションの価格はどうか

オプション

原資産：資金調達
デリバティブ：金融市場の流動性に基づいて変動を対処できる範囲に（リスクヘッジ）リスクとリターンの分散，有利な想定よりも支払って安定を求める側と，不利な想定が起きない見極めに賭ける（投機，レバレッジ）側を集めて決済（スワップ，オプション）

・**オプション**（option，条件付き請求権）：**権利の契約（不行使＝紙くず）**
$\mathrm{P}_Q[\ X = 0\ ] > 0$ **なる確率変数**と，書いてある本は見かけないけど…

2） $t = 1$ で**行使価格** K **で買う権利（買うと言ってない）**

$S_{1,2}(\omega) \geqq K$ **なら権利行使，** $S_{1,2}(\omega) < K$ **なら市場で買う方が安いからオプションは紙くず（高値ヘッジ目的だから合理的⇔無裁定条件）**

$t = 1$ **の価格** $= X = (S_{1,2} - K)_+$ **（行使後売却差益←無裁定条件）**

$$a_+ = a \vee 0 = \max\{a, 0\} = \frac{1}{2}(a + |a|)$$ （$a \geqq 0$ **なら** $= a$，$a < 0$ **なら** $= 0$）

$t = 0$ **での価値？．大雑把：プレミアム+行使価格** $K = S_{1,2}$**．変動を考えると？**
アイデア． $t = 1$ **で関数** X **を再現する（**$V_1 = X$ **なる）原資産のポートフォリオ** $\overrightarrow{x}$ **があれば，** $t = 0$ **での価値** V_0 **に一致**

デリバティブの現在価値とリスク中立確率

デリバティブの**現在価値**の計算：

・原資産の $t=0$ での価値 $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ \overrightarrow{S}_1\ ]$;

Q：リスク中立確率，r：安全利子率　←　**第1基本定理**

•X を再現する**複製**ポートフォリオ $\overrightarrow{x}$ があれば $X = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_1) =: V_1$

・**無裁定条件**：現在価格は複製の現在価格 V_0 に**一致**

注．同様に，市場が無裁定なので X の複製ポートフォリオが複数あるとき，それらの $t=0$ での価格は等しい（どれで複製しても答は一致）

期待値の線形性から $V_0 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_0) = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ V_1\ ]$

例2)（**ヨーロッパコールオプション**）は $X = (S_{1,2} - K)_+$ だったので

答.（複製可能ならば）現在価格 $= V_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ (S_{1,2} - K)_+\ ]$

例（2項モデル） － リスク中立確率

2項モデル（再掲）．

$N=2$, $i=1$（国債）は安全債券，$i=2$（株）は$t=1$で2状態$(M=2)$,
$B>0$, $S>0$, $d<u$, $-1<d\leqq r\leqq u$（無裁定（弱）），

$$\overrightarrow{S}_0=\begin{pmatrix} B \\ S \end{pmatrix},\ D=(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2))=\begin{pmatrix} (1+r)B & (1+r)B \\ (1+u)S & (1+d)S \end{pmatrix}$$

- $d\leqq r\leqq u$のとき無裁定なのでリスク中立確率P_Qが存在：

$$(\mathsf{P}_Q[\ \{\omega_1\}\ ]\ \mathsf{P}_Q[\ \{\omega_2\}\ ])=(\rho(\omega_1)\ \rho(\omega_2))=(\frac{r-d}{u-d}\ \frac{u-r}{u-d})$$

- $X=(S_{1,2}-K)_+=x_1S_{1,1}+x_2S_{1,2}$となる$x_1,x_2$があれば（複製ポートフォリオがあれば）

オプションXの無裁定な現在価格は前ページの答のように決まる

例（2項モデル） ー 複製ポートフォリオの存在

・複製ポートフォリオの存在

1）$K \geqq (1+u)S > (1+d)S$ のとき，恒等的に $(S_{1,2} - K)_{+} = 0$

→ $(x_1, x_2) = (0, 0)$

（複製できるが受取時の支払いが高すぎて，常に市場調達が安い＝本物の紙くず）

2）$(1+u)S > (1+d)S \geqq K$ のとき，$(S_{1,2} - K)_{+} = S_{1,2} - K = \dfrac{-K}{(1+r)B} S_{1,1} + S_{1,2}$ → $(x_1, x_2) = (\dfrac{-K}{(1+r)B}, 1)$

（複製できるが受取時支払い代金が安すぎて，$t = 0$ で原資産2を買っておけるくらい高価値だから，最初に2を買って持っておくのと実質同じ＝ヘッジにならない）

3）$(1+u)S > K > (1+d)S$ のとき，

$(X(\omega_1) \ \ X(\omega_2)) = ((1+u)S - K, 0) = (x_1, x_2)D$ →

$$(x_1, x_2) = \frac{(1+u)S - K}{(1+r)(u-d)BS}(-(1+d)S, (1+r)B)$$

（複製は $t = 0$ で少し買っておくことで $t = 1$ のばらつきを実質減らすヘッジ）

例（2項モデル）　－　オプションの価格

答．複製可能だから，無裁定になるオプションの現在価格

$$(*)\quad = V_0 = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,(S_{1,2}-K)_+\,]$$

1) $K \geqq (1+u)S > (1+d)S$ のとき $V_0 = 0$

2) $(1+u)S > (1+d)S \geqq K$ のとき $V_0 = \dfrac{1}{1+r}((1+r)S-K)$

3) $(1+u)S > K > (1+d)S$ のとき $V_0 = \dfrac{(r-d)((1+u)S-K)}{(1+r)(u-d)}$

注．前ページ複製ポートフォリオ $\vec{x}$ でも $(*)$ でも，等しい計算結果

次の問．2項モデルはリスク中立確率が1つに決まったが，**第1基本定理**ではリスク中立確率 Q は1つに決まるとは言ってない．Q が複数あるモデルで無裁定なオプション価格は決まるか？

完備性の問題（予告）

リスク中立確率が複数存在する例.（2 項モデルで $t=1$ の状態が 3）

$N=2,\ M=3,\ B,S>0,\ 1+r>0,\ 1+u>1+m>1+d>0$

$t=0$: $\overrightarrow{S}_0=\begin{pmatrix} B \\ S \end{pmatrix}$, $t=1$: $\overrightarrow{S}_1(\omega_j),\ j=1,2,3;$

$$D=(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_3))=\begin{pmatrix} (1+r)B & (1+r)B & (1+r)B \\ (1+u)S & (1+m)S & (1+d)S \end{pmatrix}$$

命題（次回）．このモデルは異なるリスク中立確率が（無数に）ある◇

オプションの価格 $=V_0=\dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\,(S_{1,2}-K)_+\,]$ は，中立確率が異なると一般に異なる．無裁定条件だけでは価格が決まらない．

＝　異なる価格設定でも裁定が生じない場合が（無数に）ある

（原資産に比べて市場の変動が多すぎて書ききれない普通の状況．オプションに付く値段で皆の市場に対する隠れた思いが明らかになる）

まとめ

無裁定の金融市場と中立確率 $\Leftrightarrow$ 確率空間(Ω, P_Q) （第１基本定理）

デリバティブ（確率変数＝関数$X:\ \Omega \to \mathbb{R}$）

オプション（条件付き請求権）（リスクヘッジ）

現在価値（プレミアム）の無裁定条件からの決定

デリバティブを含めた市場の無裁定の要請

→ 複製ポートフォリオがあれば，その$t=0$の価格V_0

$$= \frac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\ X\ ]$$

例. ２項モデルにおけるヨーロッパコールオプション$X=(S_{1,2}-K)_+$

２項モデルは無裁定条件でオプションの価格が決まる：

- リスク中立確率が１つに決まる
- すべての確率変数（デリバティブ）が複製可能

完備でないモデル（次回）：無裁定条件ではオプション価格が決まらない

- リスク中立確率が複数
- 原資産のポートフォリオで複製できないデリバティブがある

９．連立一次方程式とrank

公式 $(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp = \mathrm{Ker}\, A$

「任意の $\overrightarrow{b}$ に対する連立１次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ **の解の存在」と** rank

→　市場の完備性，リスク中立確率の一意性（第２基本定理）（次回）

再び経済を離れて基礎数学です（今回は前回より初等的復習）

連立１次方程式の解の存在（復習）

$m \times n$ 行列（縦 m 横 n）A と $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ は既知，未知の $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$
（連立１次）方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$

- $m = n$ かつ $|A| \neq 0$（鶴亀算）ならば $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$（解が必ず存在）
- $m \neq n$ か $|A| = 0$ のとき

定理. $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解があることと $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \ \ \overrightarrow{b})$ が同値 $\diamond$

略証. P 正則なら，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \ \Leftrightarrow \ PA\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{b}$．行標準変形は P で表せる． $\square$

A：係数行列，$(A \ \ \overrightarrow{b})$：拡大係数行列 $(m \times (n+1))$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \ \ \overrightarrow{b}) =$「①の数」$=$「実質の」方程式数 $\leqq \min\{m, n\}$

- 以上は $\overrightarrow{b}$ を決めた時の解の有無．（市場の完備性に関係あるのは）
「どんな $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解はあるか？」

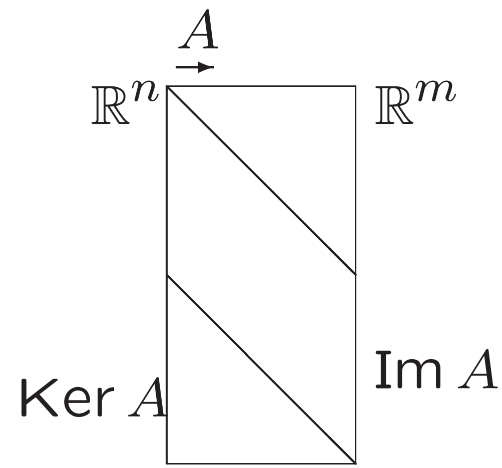
階数と像と核（復習）

言い換え． どんな $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解はある $\Leftrightarrow$ A の定義する線形写像が全射：$\mathrm{Im}\, A := \{A\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^m$ $\diamond$

証明． $\mathrm{Im}\, A$ は $A\overrightarrow{x}$ の形で書ける全ベクトルの集合 $\square$

命題． $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}\, A$ $\diamond$

略証． はき出し法から $r = \mathrm{rank}\, A$ はある正則 P に対して $\mathrm{Im}(PA)$ の基底の個数．$\mathrm{Im}(PA)$ の基底に P^{-1} を左から掛けると $\mathrm{Im}\, A$ の基底．その個数 $r = \dim \mathrm{Im}(PA)$．同じくはき出し法から $\dim \mathrm{Ker}\, A$ は自由変数の個数 $n - r$． $\square$



命題． 包含関係にある線形空間 $V \subset W \subset \mathbb{R}^n$ について $V = W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$ $\diamond$

略証． $\Rightarrow$ は自明，$\Leftarrow$ は数勘定で V の基底が W の基底 $\square$

系． $m \times n$ 行列 A（の定義する写像）が全射 $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\, A = m$ $\diamond$

直交補空間（復習）

定義． 正規直交基底：$(\overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{u}_j) = \delta_{i,j}$ を満たす基底 $\{\overrightarrow{u}_i\}$ ◇

命題． 線形空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ には正規直交基底がある ◇

略証． 基底をシュミットの直交化によって正規直交系にできる □

定義． 線形空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ の直交補空間 $V^{\perp}$：

V のどの要素とも直交する（内積が 0 なる）n 成分ベクトルの集合

$V^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = 0,\ \ \overrightarrow{x} \in V\}$ ◇

命題． $V^{\perp}$ は線形空間．$V \cap V^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$，$\dim V + \dim V^{\perp} = n$ ◇

略証． 共通部分は $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$，次元はそれぞれの正規直交基底を並べる □

定義． 線形空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{\overrightarrow{u}_i\}$ において，

$\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ の V への正射影：$\displaystyle\sum_{i=1}^{\dim V} (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_i)\, \overrightarrow{u}_i$ ◇

核と像

定理. $(\mathrm{Im}({}^tA))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,A$ $\diamond$

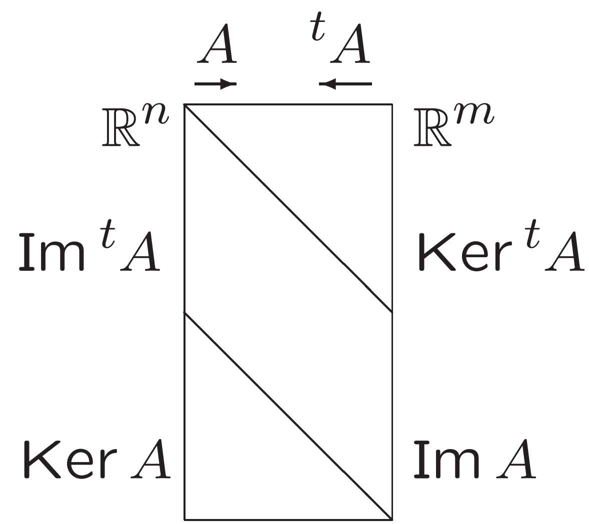
証明. $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,A \iff A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

$\iff (\forall \overrightarrow{y})\ ({}^tA\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = {}^t\overrightarrow{y}A\overrightarrow{x} = 0$

$\iff (\forall \overrightarrow{z} \in \mathrm{Im}\,{}^tA)\ (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}) = 0$

$\iff \overrightarrow{x} \in (\mathrm{Im}\,{}^tA)^{\perp}$

2 行目への同値変形で，$(\forall \overrightarrow{y})\ {}^t\overrightarrow{y}A\overrightarrow{x} = 0$ ならば $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{e}_i$ と選ぶと $(A\overrightarrow{x})_i = 0$ なので $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ を得ることを用いた $\square$



全射，転置行列，直交補空間

系．rank $A=$ rank ${}^tA$, dim Im $A=$ dim Im ${}^tA$ $\diamond$

証明．rank $A=n-$ dim Ker $A=$ dim Im ${}^tA=$ rank ${}^tA=m-$ dim Ker ${}^tA=$ dim Im A．２つ目と最後の等号が冒頭の定理，後者は $A\mapsto {}^tA$．他ははき出し法 $\square$

（再掲）．どんな $\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^m$ に対しても $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ に解はある $\Leftrightarrow$ A の定義する線形写像が全射：Im $A:=\{A\overrightarrow{x}\mid\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n\}=\mathbb{R}^m$ $\diamond$

定理．A： $m\times n$．どんな $\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^m$ に対しても $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ に解がある $\Leftrightarrow$ ${}^tA\overrightarrow{y}=\overrightarrow{c}$ の解が（があるときは）ただ１つ $\diamond$

証明．Im $A=\mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ Ker ${}^tA=\{\overrightarrow{0}\}$ $\square$

→リスク中立確率の一意性（第２基本定理）（次回）

例　ー　２項モデル

（再掲）．$N=2$, $i=1$（国債）は安全債券，$i=2$（株），$M=2$

$B, S>0,\ 1+r>0,\ 1+u>1+d>0$

$t=0$: $\overrightarrow{S}_0=\begin{pmatrix} B \\ S \end{pmatrix}$, $t=1$: $\overrightarrow{S}_1(\omega_j)$, $j=1,2$;

$D=(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2))=\begin{pmatrix} (1+r)B & (1+r)B \\ (1+u)S & (1+d)S \end{pmatrix}$

問．任意の関数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ を $S_{1,1}$ と $S_{1,2}$ の線形結合（ポートフォリオ）で書けるか？つまり，$V_1=(\overrightarrow{x},\overrightarrow{S}_1)=X$ となる $\overrightarrow{x}$ があるか

$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ X(\omega_2) \end{pmatrix}$ とおくと，$\Leftrightarrow\ {}^t\overrightarrow{X}={}^t\overrightarrow{x}D\ \Leftrightarrow\ {}^tD\overrightarrow{x}=\overrightarrow{X}$

例（続）　－　２項モデルの完備性

任意の関数 $X: \ \Omega \to \mathbb{R}$ を $S_{1,1}$ と $S_{1,2}$ の線形結合（ポートフォリオ）で書ける $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,{}^tD = \mathbb{R}^2$．$D$ が 2×2 なので $\Leftrightarrow |D| \neq 0$．これは**常に成立**（$d = u$ なら ω_1 と ω_2 にわける必要が無い）よって，

・２項モデルではすべての関数（すべてのデリバティブ）を原資産で複製できる（市場の**完備性**）（次回に続く）

もう一つの論点

・（再掲）．$\mathrm{Im}\,{}^tD = \mathbb{R}^2 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}\,D = \{\overrightarrow{0}\}$ を書き換える

どんな $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても ${}^tD\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解がある $\Leftrightarrow$ $D\overrightarrow{y} = \overrightarrow{c}$ の解が（があるときは）ただ１つ　$\diamond$

例（続）　－　リスク中立確率の一意性

2項モデルはリスク中立確率がある（既出）：

$(1+r)\overrightarrow{S}_0 = \mathsf{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_1\,]$を満たす$Q$

$\rho(\omega_j) = \mathsf{P}_Q[\,\{\omega_j\}\,]$, $\overrightarrow{\rho} = \begin{pmatrix} \rho(\omega_1) \\ \rho(\omega_2) \end{pmatrix}$とおくと，

$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \cdots\ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$なので，$(1+r)\overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\rho}$

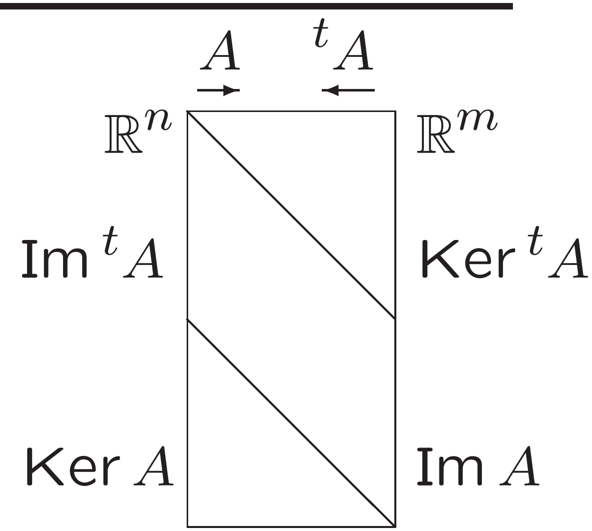
命題． 2項モデルでは$\overrightarrow{\rho}$がただ1つに決まる　$\diamond$

証明．「$D\overrightarrow{y} = \overrightarrow{c}$の解が（があるときは）ただ1つ」において，$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\rho}$, $\overrightarrow{c} = (1+r)\overrightarrow{S}_0$　$\square$

2項モデルのリスク中立確率の一意性

2項モデルでは直接ρが求まったので，ただ1つに決まることを知っていたが，一般論でそれが出る＝一般のモデルで計算せずにわかる（次回に続く）

まとめ



A： $m \times n$。

- $\mathrm{rank}\,A = \dim \mathrm{Im}\,A = n - \dim \mathrm{Ker}\,A$
- $(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp = \mathrm{Ker}\,A$
- $\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,{}^tA$

- **どんな** $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ **に対しても** $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ **に解がある**

$\Leftrightarrow$ A**の定義する線形写像が全射：**$\mathrm{Im}\,A := \{A\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow$ ${}^tA\overrightarrow{y} = \overrightarrow{c}$ **の解が（があるときは）ただ１つ**

- **２項モデルでは**

  ー全ての関数（デリバティブ）を原資産で複製可能（完備性）

  ーリスク中立確率が一意

１０．市場の完備性

数理ファイナンスの第２基本定理

基礎数学と派生商品の概念を結びつけます

レポート３ ＠ keio.jp

ここまでの要約（1）

$\overrightarrow{S}_t = \begin{pmatrix} S_{t,1} \\ \vdots \\ S_{t,N} \end{pmatrix}$; $S_{t,i}$：銘柄 i の時刻 t での単価．$\Omega = \{\omega_j \mid j = 1, \ldots, M\}$

$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$，$\tilde{D} = (-\overrightarrow{S}_0 \ \overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}(\omega_M))$

state price $\overrightarrow{\psi} = \begin{pmatrix} \psi(\omega_1) \\ \vdots \\ \psi(\omega_M) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\psi}$（$\Omega$ 上の関数をベクトルと扱う）

ポートフォリオ $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$ の時刻 t の価値 $V_t = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_t)$

- **裁定**：$V_0 < 0$ かつ ${}^tD\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$（狭義），${}^t\tilde{D}\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ ${}^t\tilde{D}\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$（広義）
- **第 1 基本定理**．$\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_1\,]$ を満たす $r > -1$（安全利子率）と確率 P_Q （**リスク中立確率**）があることと，無裁定（弱）で $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} \psi(\omega_j) \neq 0$ の成立が同値．さらに無裁定（強）と全ての j で $\mathrm{P}_Q[\,\{\omega_j\}\,] > 0$ が同値 ◇

ここまでの要約（2）

- デリバティブ：確率変数（確率空間上の関数）$X: \ \Omega \to \mathbb{R}$
- X を再現する**複製**ポートフォリオ $\overrightarrow{x}$：$X = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_1) = V_1$
- 無裁定条件→（複製可能ならば）現在価格は $V_0 = \dfrac{1}{1+r} \mathsf{E}_Q[\ X\ ]$

- $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}\, A$
- $(\mathrm{Im}({}^t A))^{\perp} = \mathrm{Ker}\, A$
- $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, {}^t A$
- どんな $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても ${}^t D \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ に解がある
$\Leftrightarrow$ ${}^t D$ の定義する線形写像が全射：$\mathrm{Im}\, {}^t D := \{ {}^t D \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \} = \mathbb{R}^m$
$\Leftrightarrow$ $D \overrightarrow{y} = \overrightarrow{c}$ の解が（があるときは）ただ１つ

- ２項モデルでは
  －全ての関数（デリバティブ）を原資産で複製可能（**完備性**）
  －**リスク中立確率が一意**

完備性

$\Omega = \{\omega_j \mid j = 1, \ldots, M\}$, $S_{1,i}: \ \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\overrightarrow{S}_t$,
$D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1) \ \cdots \ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$

定義．市場 $\overrightarrow{S}_t$ が完備とは，任意の関数 $X : \ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して $X = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{S}_1) = V_1$ を満たすポートフォリオ $\overrightarrow{x}$（複製）があること． $\diamond$

・**関数＝デリバティブ，複製ポートフォリオ＝原資産で複製可能**

命題．市場が完備 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,{}^tD = \mathbb{R}^M \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,D = \{\overrightarrow{0}\}$ **（D 単射）** $\diamond$

証明．（D のように）デリバテイブ X のリスク（起こりうる価格全て）を縦に並べて

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_M) \end{pmatrix}$ **とおくと，完備** $\Leftrightarrow \ (\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^M) \ \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N; \ {}^t\overrightarrow{X} = {}^t\overrightarrow{x} D$

$\Leftrightarrow \ (\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^M) \ \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N; \ \overrightarrow{X} = {}^tD\overrightarrow{x} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}\,{}^tD = \mathbb{R}^M$**，すなわち ${}^tD$ が全射直交補空間の一般性質の 1 つ** $(\mathrm{Im}({}^tA))^\perp = \mathrm{Ker}\,A$ **において，$A = D$ と取ると，**

$\Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}\,D = \{\overrightarrow{0}\}$ $\square$

数理ファイナンスの第２基本定理

無裁定な市場の場合の完備性の同値条件

第２基本定理．リスク中立確率がある（無裁定（弱）$+\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\psi(\omega_j)\neq 0$）

市場では，**市場の完備性とリスク中立確率の一意性が同値**である　◇

証明．前ページ命題から，完備$\Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}\,D=\{\overrightarrow{0}\}$．
$D\overrightarrow{y}=\overrightarrow{c}$ の解 $\overrightarrow{y_0}$ があるどの $\overrightarrow{c}$ に対しても解は $\{\overrightarrow{y_0}+\overrightarrow{z}\mid\overrightarrow{z}\in\mathrm{Ker}\,D\}$ なので，
$D\overrightarrow{y}=\overrightarrow{c}$ の解がただ１つであることと同値．

無裁定市場に存在する state price $\overrightarrow{\psi}$; $\psi(\omega)=\dfrac{1}{1+r}\mathrm{P}_Q[\,\{\omega\}\,]$, $\omega\in\Omega$, は
$\overrightarrow{S_0}=D\overrightarrow{\psi}$ の解だから，この解が一意的（ただ１つ）なことと同値．すなわち，リスク中立確率 Q の一意性と同値．　□

完備無裁定市場のデリバティブの無裁定価格

無裁定価格は完備性の概念導入前（８.）に決まっていたので，以下が成り立つ．

命題．関数（デリバティブ）$X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ の $t=0$ での価格について，無裁定条件を守る価格は $\dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,X\,]$．

- 無裁定で完備な市場では，（Q が決まるので）この価格が 1 つに決まる
- 非完備でも無裁定な市場では，
  - 複製可能な X はこの価格が Q によらない
  - 複製不可能な X はこの価格が Q によることがある ◇

・株の変動が異なる証券間で完全連動していれば（例：３株で ω_j が $j=1,2$ の２種）リスク中立確率がない（裁定がある）可能性大だが，現実は変動が連続的に近い値の種々の組み合わせなので，解が決まらない（非完備）のほうが普通と思う

例　ー　非完備な市場

例：2項モデル$(N=2)$で$t=1$の状態が$M=3$ $(\omega_j,\ j=1,2,3)$

$N=2,\ M=3,\ B,S>0,\ 1+r>0,\ 1+u>1+m>1+d>0$

$t=0$: $\overrightarrow{S}_0=\begin{pmatrix}B\\S\end{pmatrix}$, $t=1$: $\overrightarrow{S}_1(\omega_j),\ j=1,2,3;$

$$D=(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_2)\ \overrightarrow{S}_1(\omega_3))=\begin{pmatrix}(1+r)B & (1+r)B & (1+r)B\\(1+u)S & (1+m)S & (1+d)S\end{pmatrix}$$

命題．このモデルは無裁定（強）（な利率の状況）のときそのときに限り，異なるリスク中立確率が（無数に）ある ◇

例（続）　－　非完備な市場

命題．このモデルは無裁定（強）$\Leftrightarrow$ 異なるリスク中立確率が（無数に）ある　$\diamond$

証明. $A = \begin{pmatrix} 1+r & 1+r & 1+r \\ 1+u & 1+m & 1+d \end{pmatrix}$ とおくと，$\overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\psi} \Leftrightarrow A\overrightarrow{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\psi} = \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} r-d \\ 0 \\ u-r \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -(m-d) \\ u-d \\ -(u-m) \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

第１基本定理から（$(1+r)\psi(\omega_j) = \mathrm{P}_Q[\,\{\omega_j\}\,]$），

・無裁定（弱）$\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{\psi} = \begin{pmatrix} \psi(\omega_1) \\ \psi(\omega_2) \\ \psi(\omega_3) \end{pmatrix} \geqq \overrightarrow{0};\ \overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\psi} \quad \Leftrightarrow \quad u \geqq r \geqq d$

・無裁定（強）$\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{\psi};\ \psi_j > 0,\ j = 1, 2, 3,\ \overrightarrow{S}_0 = D\overrightarrow{\psi} \quad \Leftrightarrow \quad u > r > d$

後者から，$u > r > d$ なら $1 \gg a > 0$ の範囲で無数の正値解（非完備）　$\square$

注．$u = r$ または $r = d$ だと，$u > m > d$ から，上の一般解で $a = 0$ しかえらべないので非負値解はそれぞれ１つ（完備，弱無裁定，非強無裁定）

例（続々）　－　オプションの価格

非完備な場合のヨーロッパコールオプション $(S_{1,2}-K)_+$ **の** $t=0$ **での無裁定価格** $V_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,(S_{1,2}-K)_+\,]$

$= ((1+u)S-K)_+\psi(\omega_1)+((1+m)S-K)_+\psi(\omega_2)+((1+d)S-K)_+\psi(\omega_3)$

(1) $K \geqq (1+u)S$: $V_0 = 0$ **（高負担過ぎて** Q (a) **によらず紙屑）**

(2) $(1+u)S > K \geqq (1+m)S$:

$$V_0 = \frac{r-d}{(1+r)(u-d)}((1+u)S-K) - a(m-d)((1+u)S-K),\ 0 \leqq a \ll 1$$

(3) $(1+m)S \geqq K > (1+d)S$:

$$V_0 = \frac{r-d}{(1+r)(u-d)}((1+u)S-K) - a(u-m)(K-(1+d)S),\ 0 \leqq a \ll 1$$

(4) $(1+d)S \geqq K$:

$V_0 = S - \dfrac{K}{1+r}$ **（低負担過ぎて** Q (a) **によらず無リスク債券の役割しかない）**

- **無裁定条件だけでは価格が決まらない**
- Q (a) **を決めれば** K **について連続関数**

まとめ

市場の完備性：任意の関数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ **を原資産** $\overrightarrow{S}_1$ **で複製可能**
$\Leftrightarrow\ \ D = (\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \cdots\ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))$ **の転置** ${}^tD$ **が全射** $\Leftrightarrow\ \ D$ **が単射**

第２基本定理：リスク中立確率 Q **がある（無裁定）市場では，**
完備性 $\Leftrightarrow$ **リスク中立確率の一意性**

非完備で複製不可能な X **の現在価格は** Q **によって異なる可能性がある**

１１．ポートフォリオ組替

T 期モデル

自己資金とポートフォリオ組替

時間後ろ向き漸化式とヨーロッパ型オプションの価格

T 期モデル

1期は証券価値の変動の最小単位時間 vs. 株価や為替は激しい変動

T 期で $T \gg 1$ に現実的興味　→　N 項1期市場モデル（6.）の T 期化

自然数 N, T．時刻 $t = 0, 1, \ldots, T$ の価格ベクトル $\overrightarrow{S}_t \in \mathbb{R}^N$

$\overrightarrow{S}_0$ 確定値，時刻 t の選択肢 $\Omega_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ ＝1期モデルの Ω

（選択肢は t と過去の状況で異なって良いが，記号の簡単のため固定）

期間に起こりうる全可能性＝樹形図の全て経路

$\Omega = \{\overrightarrow{\omega} = (\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_T}) \mid j_i \in \{1, \ldots, M\},\ i = 1, \ldots, T\}$

ポートフォリオ $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$（原資産 i を x_i 枚，$i = 1, \ldots, N$）

・ポートフォリオという単語の最も大事な性質：

(1) 途中の売買で組み替えられる　$\overrightarrow{x}_t \in \mathbb{R}^N$, $t = 0, \ldots, T-1$

(2) 時刻 t のための $\overrightarrow{x}_t$ は時刻 $t-1$ までの経緯で決める必要

自己資金とポートフォリオ組替

ポートフォリオ $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ \vdots \\ x_{t,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \ (t = 1, \ldots, T)$：$t-1$ に決めて原資産 i を $x_{t,i}$ 単位持って，時刻 t の市場に臨む（可予測過程，predictable process）

時刻 t の市場の結果によるポートフォリオの価値

$V_t = (\vec{x}_t, \vec{S}_t) = x_{t,1}S_{t,1} + \cdots + x_{t,N}S_{t,N}$

自己資金 (self-financing) と**組替**．V_t を維持（資金出入り無し）でも $\vec{x}_t \to \vec{x}_{t+1}$ と変更できる可能性：$V_t = (\vec{x}_t, \vec{S}_t) = (\vec{x}_{t+1}, \vec{S}_t)$

注．市場から任意の量を購入し空売り可能（少額手数料で貸す人がいる）
＝市場の参加者数と各証券の取引量がとても大きい大前提

・自己資金による組み替えで，多期の変動の複製を 1 期の問題に帰着

完備市場の自己資金ポートフォリオ組替

時刻t：$\overrightarrow{\omega}=(\overrightarrow{\omega}',\omega)$，$\overrightarrow{\omega}'=(\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_{t-1}})$（登場する量$X:\ \Omega\to\mathbb{R}$は$t+1$以降の選択肢について**定数**関数，適合過程，adapted process）
完備性：(1) 原資産の組の全時間発展経路が生成する線形空間が全ての時間発展選択肢の空間$\mathbb{R}^{MT}$に等しい＋(2) 原資産の線形結合の係数が可予測過程　→　ここでは，

完備性：各t毎に任意の適合過程Xを$\overrightarrow{S}_t$が**$t-1$までの情報**で複製可能

・「$t-1$までの情報」$\Leftarrow$　1期モデルで$\overrightarrow{x}$は選択肢ωによらない定数

ここでは$\overrightarrow{S}_t$の組としての選択肢がtによらないΩ_1 なので，**1期と同様**に

・完備$\Leftrightarrow$　$\mathrm{Im}\,{}^tD=\mathrm{Im}\,{}^t(\overrightarrow{S}_1(\omega_1)\ \cdots\ \overrightarrow{S}_1(\omega_M))=\mathbb{R}^M$

・時刻tで目論むポートフォリオ$X=(\overrightarrow{x}_{t+1},\overrightarrow{S}_t)$に組み替えられるように時刻$t-1$で$\overrightarrow{x}_t$を用意（→上記で各時刻の完備性を要求した）

完備性から$(\overrightarrow{x}_t(\overrightarrow{\omega}'),\overrightarrow{S}_t(\overrightarrow{\omega}',\omega))=X(\overrightarrow{\omega}',\omega)$ を満たす$\overrightarrow{x}_t$がある

ヨーロッパ型オプション

ヨーロッパ型オプション：満期の株価 $\overrightarrow{S}_T$ だけで価値が決まる請求権

既出例：行使価格 K のヨーロッパコールオプション $X = (S_{T,2} - K)_+$

２項モデル；$N = M = 2$, $S_{t,1} = B_t = (1+r)^t B > 0$,

$S_{t,2}(\omega_1) = (1+u)S_{t-1,1}$, $S_{t,2}(\omega_2) = (1+d)S_{t-1,1}$

完備：$X = x_{T,1}B_T + x_{T,2}S_{T,2}$, $\overrightarrow{x}_T(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_{T-1}})$

$$\begin{pmatrix} B_{T-1}x_{T,1} \\ S_{T-1}x_{T,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -(1+d)X(\omega_1) + (1+u)X(\omega_2) \\ (1+r)X(\omega_1) - (1+r)X(\omega_2) \end{pmatrix}$$

•$t = T$ で ω_1 と ω_2 どちらが実現したかによらず $\overrightarrow{x}_T$ が決まる（完備性）

・複製はオプションの内容から $t = T$ でまず決まる→後向き漸化式

・計算は１期モデルと同じ→リスク中立確率による期待値

T 期モデルにおける裁定

完備な市場　→　無裁定な価格付け（一意性）

無裁定な市場　→　リスク中立確率（存在）

（再掲，1 期モデル 6 .）広義裁定：${}^t(-\overrightarrow{S}_0\ D)\overrightarrow{x} \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $\neq \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^N$

無裁定（強）$\Leftrightarrow \exists Q, r > -1;\ (\forall \omega \in \Omega)\ \mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\ ] > 0,\ \ \overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ \overrightarrow{S}_1\ ]$

素直な拡張：広義裁定とは，適合過程 $W_0 = -V_0 = -(\overrightarrow{S}_0, \overrightarrow{x}_1)$, $W_t = (\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_t) - (\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_{t+1})$, $t = 1, \ldots, T-1$, $W_T = (\overrightarrow{S}_T, \overrightarrow{x}_T)$，が常に非負で恒等的には 0 でないような可予測過程 $\overrightarrow{x}$.

・最初から最後まで市場外の（返す約束ない）資金を使わず，傍観でもないこと

・自己資金的組替 $\Leftrightarrow\ \ W_t = 0,\ t = 1, \ldots, T-1$

•全ての経路と対応する原資産の変化を並べた巨大線形空間で Stiemke の補題を使うと T 期モデルの第 1 基本定理（リスク中立確率の存在）

T 期モデルのリスク中立確率

第１基本定理（リスク中立確率の存在）の標語的表現：無裁定（強）
$(\forall \overrightarrow{x}_{\cdot} = \{\overrightarrow{x}_t\})\ W(\overrightarrow{x}_{\cdot}) = (W_0, \ldots, W_T) \geqq 0$ かつ $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ **正値リスク中立確率の存在** $\exists Q;\ (\forall \overrightarrow{\omega} \in \Omega)\ \mathrm{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}\}\,] > 0$ かつ $(\forall \overrightarrow{x}_{\cdot})\ \mathrm{E}_Q[\,W(\overrightarrow{x}_{\cdot})\,] = 0$

・任意のポートフォリオについて成り立つので，各時刻 t の $\overrightarrow{x}_t$ の係数（前ページ W_t と W_{t-1} の $\overrightarrow{x}_t$ の係数）の方程式

・途中までの特定経路 $\overrightarrow{\omega}' = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_{t-1}})$ を条件と（$\overrightarrow{\omega}'$ を固定）する時刻 t での選択肢 $\omega \in \Omega_1$ の条件付き期待値

cf. １期モデルで $\overrightarrow{S}_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_1\,]$ と，右辺のみ期待値を取ることの拡張

・$\mathrm{E}_Q[\,\cdot \mid \mathcal{F}_t\,]$：$\overrightarrow{\omega} = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_t})$ を固定する条件付き期待値

第１基本定理．T 期モデルが無裁定（強）$\Leftrightarrow$ 全ての根元事象（満期までの１つの経緯）について正確率かつ $\overrightarrow{S}_t = \dfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\,]$, $t = 0, \ldots, T-1$．なる全経過選択肢 Ω 上の確率測度 Q の存在

（$\dfrac{1}{(1+r)^t}\overrightarrow{S}_t$ をマルチンゲールにする確率測度の存在） ◇

・原資産の複雑な時間発展は与えられているとする
・無裁定 $\Leftrightarrow$ その時間発展を期待値の意味で整合的に記述する確率空間（リスク中立確率）がある
・無裁定な選択肢（シナリオの全体）もしくはリスク中立確率が与えられたとして，他のデリバティブの値段を整合的に決めるのがオプション価格付け理論

以下はオプション価格付け理論の講義の範囲外
・現実がそれと合わなければ裁定があるので，デイトレーダーが取りに行って，もっともらしい値に落ち着く，その落ち着き先の計算は講義の範囲内だが，(一時的，と考える）裁定のある期間のデイトレーダーの儲け（または損）の計算はこの講義の範囲外
・現実と合わせるにはモデル（リスク中立確率）のパラメータをデータから計算（計量）．モデル（リスク中立確率の設定）に入ってない（外生的な）ショックはパラメータの変更．その計算はこの講義の範囲外
・どれかの会社を応援する（ポジションを取る）こと儲ける（または損する）ことも範囲外

時間後ろ向き漸化式

- 情報（付けられる条件）は増大：$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T$
- $s < t$のとき，$\overrightarrow{S}_s = \dfrac{1}{(1+r)^{t-s}} \mathsf{E}_Q[\, \overrightarrow{S}_t \mid \mathcal{F}_s \,]$
- 完備→デリバティブに複製ポートフォリオが存在 $X = (\overrightarrow{S}_T, \overrightarrow{x}_T)$
- $\overrightarrow{x}_t$ を自己資金的組替 $(\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_t) = (\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_{t+1})$ で決める
- $\mathsf{E}_Q[\, (\overrightarrow{S}_{t+1}, \overrightarrow{x}_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t \,] = (\mathsf{E}_Q[\, \overrightarrow{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \,], \overrightarrow{x}_{t+1})$（可予測）

$$\to \quad V_t := (\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_t) = (\overrightarrow{S}_t, \overrightarrow{x}_{t+1}) = \frac{1}{1+r} \mathsf{E}_Q[\, V_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \,]$$

特に $(\overrightarrow{S}_0, \overrightarrow{x}_1) = \dfrac{1}{1+r} \mathsf{E}_Q[\, V_1 \,] = \dfrac{1}{(1+r)^T} \mathsf{E}_Q[\, X \,]$

1期の議論（の繰り返し）から，デリバティブを含めて無裁定な価格

$(\mathrm{Im}\, W)^\perp = \mathrm{Ker}\, {}^t W$ から W が全射 $\Leftrightarrow$ ${}^t W$ が単射なので，

第２基本定理．T 期無裁定の時，完備性 $\Leftrightarrow$ リスク中立確率の一意性 $\diamond$

- オプションは無裁定条件から初期時刻の価格が決まる

例（次回の予告） ー ２項2期モデル

$N=M=T=2$, $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$, $\Omega=\Omega_1\times\Omega_1$, $B_t=(1+r)^tB>0$,
$S_t(\overrightarrow{\omega}',\omega_1)=(1+u)S_{t-1}(\overrightarrow{\omega}')$, $S_t(\overrightarrow{\omega}',\omega_2)=(1+d)S_{t-1}(\overrightarrow{\omega}')$

リスク中立確率：$(1+r)=\mathsf{P}_Q[\ \{\omega_1\}\times\Omega_1\ ](1+u)+\mathsf{P}_Q[\ \{\omega_2\}\times\Omega_1\ ](1+d)$,

$$(1+r)=\frac{\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\times\{\omega_1\}\ ]}{\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\times\Omega_1\ ]}(1+u)+\frac{\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\times\{\omega_2\}\ ]}{\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\times\Omega_1\ ]}(1+d)$$

これを解くと$\begin{pmatrix}\mathsf{P}_Q[\ \{(\omega,\omega_1)\}\ ]\\ \mathsf{P}_Q[\ \{(\omega,\omega_2\ ]\})\end{pmatrix}=\dfrac{1}{u-d}\begin{pmatrix}r-d\\ u-r\end{pmatrix}\mathsf{P}_Q[\ \{\omega\}\times\Omega_1\ ]$, $\omega\in\Omega_1$,

$$\begin{pmatrix}\mathsf{P}_Q[\ \{\omega_1\}\times\Omega_1\ ]\\ \mathsf{P}_Q[\ \{\omega_2\}\times\Omega_1\ ]\end{pmatrix}=\frac{1}{u-d}\begin{pmatrix}r-d\\ u-r\end{pmatrix}$$

以上から，$N_u(\overrightarrow{\omega})$ **を** $\overrightarrow{\omega}\in\Omega$ **の列の中の** ω_1 **（株が** $1+u$ **倍）の個数とすると**

$$\mathsf{P}_Q[\ \{\overrightarrow{\omega}\}\ ]=\frac{1}{(u-d)^2}(r-d)^{N_u(\overrightarrow{\omega})}(u-r)^{2-N_u(\overrightarrow{\omega})}$$

例．行使価格 K のヨーロッパコールオプションの $t=0$ での価値は

$$\frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}_Q[\ (S_2-K)_+\ ]$$

・２項モデルは Q **があらわに計算できるのでデリバティブの価格を直接** $\mathsf{E}_Q[\ X\ ]$ **で計算できるが，一般には** Q **は巨大な経路空間** Ω **の上の確率なので，満期の契約から時間逆行して複製ポートフォリオを自己資金組替で決めることで無裁定価格を計算**

まとめ

T 期モデルの広義裁定

ポートフォリオ：可予測過程 $\overrightarrow{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ \vdots \\ x_{t,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \ (t = 1, \ldots, T)$

自己資金調達的ポートフォリオ組替：$V_t = (\overrightarrow{x}_t, \overrightarrow{S}_t) = (\overrightarrow{x}_{t+1}, \overrightarrow{S}_t)$

条件付き期待値：$\mathsf{E}_Q[\ \cdot \mid \mathcal{F}_t\ ]$

第１基本定理. T 期モデルが無裁定（強）$\Leftrightarrow$ 全ての根元事象（満期までの１つの経緯）について正確率かつ $\overrightarrow{S}_t = \dfrac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ \overrightarrow{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\ ]$, $t = 0, \ldots, T-1$, なる全経過選択肢 Ω 上の確率測度 Q の存在

第２基本定理. T 期無裁定の時，完備性 $\Leftrightarrow$ リスク中立確率の一意性

デリバティブ X の無裁定価格 $\dfrac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\ X\ ]$

１２．2項T期モデル

2項T期モデル（CRR モデル，Cox–Ross–Rubinstein）

ヨーロッパコールオプション

資金自己調達的ポートフォリオの組替

2項T期モデル

Cox–Ross–Rubinstein モデル

$$N = 2,\ M = 2^T,\ \Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\},\ \Omega = \prod_{t=1}^{T} \Omega_1,\ u > d > -1,$$

$r > -1,\ B, S > 0,$

$B_t = (1+r)^t B > 0,\ t = 0, \cdots, T,$

$X_t(\omega_1) = 1 + u,\ X_t(\omega_2) = 1 + d,\ t = 1, \ldots, T,$

$S_t(\overrightarrow{\omega}', \omega) = X_t(\omega)\, S_{t-1}(\overrightarrow{\omega}'),\ t = 1, \ldots, T,$

すなわち， $S_t(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_t}) = S \displaystyle\prod_{s=1}^{t} X_s(\omega_{j_s})$

2項T期モデルのリスク中立確率

（再掲）第1基本定理．T期モデルが無裁定（強）$\Leftrightarrow$
$\exists\Omega$上の確率測度Q; $(\forall\omega\in\Omega,\ [0,T]$の経緯）$\mathsf{P}_Q[\,\{\omega\}\,]>0$, かつ，

$$(*)\quad \overrightarrow{S}_{t-1}=\frac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\,\overrightarrow{S}_t\mid\mathcal{F}_{t-1}\,],\ t=1,\ldots,T \qquad \diamond$$

$t-1$までの経路$\overrightarrow{\omega}'$を固定，$t+1$以降の全変動をまとめた集合Ω'，tでの選択肢$\omega\in\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$とおくと，2項モデルでは$B_t=(1+r)B_{t-1}$と$S_t(\overrightarrow{\omega}',\omega)=X_t(\omega)S_{t-1}(\overrightarrow{\omega}')$から$(*)$は $1+r=\mathsf{E}_Q[\,X_t\mid\mathcal{F}_{t-1}\,]$．よって

$$1+r=\frac{\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_1)\}\times\Omega'\,]}{\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}'\}\times\Omega_1\times\Omega'\,]}(1+u)+\frac{\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_2)\}\times\Omega'\,]}{\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}'\}\times\Omega_1\times\Omega'\,]}(1+d)$$

$$\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_1)\}\times\Omega'\,]+\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_2)\}\times\Omega'\,]=\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}'\}\times\Omega_1\times\Omega'\,]$$

これを解くと2項2期（前回）と同様に

$$\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_1)\}\times\Omega'\,]=\frac{r-d}{u-d}\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}'\}\times\Omega_1\times\Omega'\,]$$

$$\mathsf{P}_Q[\,\{(\overrightarrow{\omega}',\omega_2)\}\times\Omega'\,]=\frac{u-r}{u-d}\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}'\}\times\Omega_1\times\Omega'\,]$$

- 細かくなる（tとともに情報が増大する）集合列の確率の漸化式

2項T期モデルのリスク中立確率（続）

漸化式を解く．$N_u(\overrightarrow{\omega})$を$\overrightarrow{\omega} = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_T}) \in \Omega$の列の中の$\omega_1$（株が$1+u$倍）の個数とすると，$\omega_2$（株が$1+d$倍）の個数は$T-N_u$

$$\mathrm{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}\}\,] = \frac{1}{(u-d)^T}(r-d)^{N_u(\overrightarrow{\omega})}(u-r)^{T-N_u(\overrightarrow{\omega})},\ \overrightarrow{\omega} \in \Omega$$

・ここまでリスク中立確率の必要条件(*)の解（あるとすればこの形）．

– 無裁定（強）のもう一つの条件$\mathrm{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}\}\,] > 0,\ \overrightarrow{\omega} \in \Omega$から$d < r < u$

– 既に1つに決まっている（一意性）$\Leftrightarrow$市場は完備（第2基本定理）

ヨーロッパコールオプション

行使価格Kのヨーロッパコールオプション：満期$t=T$末で単位株S_TをK円で買う権利を契約するデリバティブ

ヨーロッパ：満期時に行使条件を判定

コール：買う　（行使価格：行使時の代金）

オプション：権利

- 満期時の価値$X=(S_T-K)_+$
- 復習：$S_T(\overrightarrow{\varpi})<K$なら市場で安く調達できるので，契約は紙屑$X(\overrightarrow{\varpi})=0$
- 2項T期モデル（CRRモデル）はリスク中立確率が一意に定まるので，$t=0$での無裁定価格$E(0)$は一意に定まる（万能の公式）：
- $E(0)=\dfrac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\,X\,]=\dfrac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\,(S_T-K)_+\,]$

ヨーロッパコールオプション（続）

２項T期モデルにおける行使価格Kのヨーロッパコールオプションの初期時刻における無裁定価格$E(0) = \dfrac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\,(S_T - K)_+\,]$

$$= \sum_{\overrightarrow{\omega}\in\Omega} (S_T(\overrightarrow{\omega}) - K)_+ \times \frac{(r-d)^{N_u(\overrightarrow{\omega})}(u-r)^{T-N_u(\overrightarrow{\omega})}}{(1+r)^T(u-d)^T} =$$

$$\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{s=0}^{T} {}_T\mathsf{C}_s((1+u)^s(1+d)^{T-s}S-K)_+(\frac{r-d}{u-d})^s(\frac{u-r}{u-d})^{T-s}$$

例１．$K > (1+u)^T S$ならば$E(0) = 0$

（常に$t = T$で市場から直接調達したほうが安いのでオプションが紙屑）

例２．$K < (1+d)^T S$ならば

$$E(0) = \frac{1}{(1+r)^T}(S((1+u)\frac{r-d}{u-d}+(1+d)\frac{u-r}{u-d})^T - K) = S - \frac{K}{(1+r)^T}$$

（用意するKが安すぎてヘッジできず，最初に株を買っておくだけ）

複製ポートフォリオの漸化式

- 途中の価値も決まり，計算できる（条件付き期待値）

$$E(t) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \mathsf{E}_Q[\,(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\,],\ t \leqq T$$

- リスク中立確率あると機械的に計算可能　→　先々（連続時間）重要
- 中身（無裁定完備）＝原資産による複製ポートフォリオで価値を決定
- 機械的計算が前提とする資金自己調達的ポートフォリオ組替に興味
- 複製ポートフォリオ（t 期始の枚数）$\overrightarrow{x}_t = (x_{t,B}, x_{t,S})$
- 自己資金的組替

$$(\overrightarrow{x}_t(\overrightarrow{\omega}'), \overrightarrow{S}_t(\overrightarrow{\omega}', \omega)) = (\overrightarrow{x}_{t+1}(\overrightarrow{\omega}', \omega), \overrightarrow{S}_t(\overrightarrow{\omega}', \omega)) = E(t)$$

複製ポートフォリオの漸化式（続）

途中時刻での価格と複製ポートフォリオの組替（時間を遡る漸化式）

（cf．経済数学３．動的プログラミング．Bellmanの原理）

$$E(T) = (S_T - K)_+,\ t = T, \ldots, 1,\ E(t-1)$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{T-t+1}} \mathsf{E}_Q[\ (S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_{t-1}\ ] = \frac{1}{1+r} \mathsf{E}_Q[\ E(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}\ ]$$

$$E(t-1)(\overrightarrow{\omega}') = \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-d}{u-d}E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_1) + \frac{u-r}{u-d}E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_2)\right)$$

複製ポートフォリオ $E(t) = x_{t,B}B_t + x_{t,S}S_t$，$\overrightarrow{x}_t$ **は可予測　→**

$$\begin{pmatrix} x_{t,B}B_{t-1} \\ x_{t,S}S_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & 1+u \\ 1+r & 1+d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_1) \\ E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -1-d & 1+u \\ 1+r & -1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_1) \\ E(t)(\overrightarrow{\omega}', \omega_2) \end{pmatrix}$$

$E(t-1) = x_{t,B}B_{t-1} + x_{t,S}S_{t-1} = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}_Q[\ E(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}\ ]$（リスク中立確率の結果を再現）

複製ポートフォリオの漸化式（続々）

行使価格Kのヨーロッパコールオプション$E(T)=(S_T-K)_+$

例．時刻$T-1$で$(1+u)S_{T-1}>K>(1+d)S_{T-1}$となっているとき（そのような$\overrightarrow{\omega}'=(\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_{T-1}})$において），

$$\begin{pmatrix} x_{T,B}(\overrightarrow{\omega}')B_{T-1}(\overrightarrow{\omega}') \\ x_{T,S}(\overrightarrow{\omega}')S_{T-1}(\overrightarrow{\omega}') \end{pmatrix} = \frac{(1+u)S_{T-1}(\overrightarrow{\omega}')-K}{(1+r)(u-d)} \begin{pmatrix} -1-d \\ 1+r \end{pmatrix}$$

オプションを売った証券会社は債券を空売りして株を買って備える→

– $t=T$に株が値下がりすれば複製ポートフォリオの価値は下がるが，権利を行使されないので，株を売って空売りした債券を買い戻してポジションを解消（2行目$\times(1+d)=-1$行目$\times(1+r)$）

– $t=T$に値上がりすれば，空売りした債券を買い戻してポジションを解消し，残りと入金するKで株1単位を買いそろえて権利行使に対処（2行目$\times(1+u)+1$行目$\times(1+r)+K=S_T(\overrightarrow{\omega}',\omega_1)$）

まとめ

2項T期モデル（Cox–Ross–Rubinstein モデル）

$u > r > d$のとき無裁定（強）完備でリスク正値中立確率が一意存在

$$\mathsf{P}_Q[\,\{\overrightarrow{\omega}\}\,] = \frac{1}{(u-d)^T}(r-d)^{N_u(\overrightarrow{\omega})}(u-r)^{T-N_u(\overrightarrow{\omega})},\ \overrightarrow{\omega} \in \Omega$$

行使価格Kのヨーロッパコールオプションの無裁定価格

$$E(0) = \frac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\,(S_T - K)_+\,]$$

$$= \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{s=0}^{T} {}_T\mathsf{C}_s((1+u)^s(1+d)^{T-s}S - K)_+(\frac{r-d}{u-d})^s(\frac{u-r}{u-d})^{T-s}$$

自己資金的組替 $(\overrightarrow{x}_t(\overrightarrow{\omega}'), \overrightarrow{S}_t(\overrightarrow{\omega}', \omega)) = (\overrightarrow{x}_{t+1}(\overrightarrow{\omega}', \omega), \overrightarrow{S}_t(\overrightarrow{\omega}', \omega))$

１３．ブラックショールズの公式

2項T期モデルの連続極限

ブラックショールズの公式

指数ブラウン運動

連続極限のための記号の変更

２項T期モデル（Cox–Ross–Rubinstein モデル）$\overrightarrow{S}_t = (B_t, S_t)$
デリバティブの無裁定価格→$E(t)$，$\overrightarrow{x}_t = (x_{t,B}, x_{t,S})$ 理論上終了
具体形は複雑←株価の変動に依存（経路 path の上の関数，確率過程）
１期の実時間を短くし$T \to \infty$とすると積分で書ける（連続極限）
ヨーロッパオプションは普通の積分（一般には確率積分→数理ファイナンス
以下，あらすじ

記号Tは満期実時刻に転用，変化数は$T \mapsto n$，刻み幅の実時間は$\dfrac{T}{n}$.

記号rは実期間の利率（年利）に，$\frac{T}{n}$時間の小変化は$r \mapsto r_n = r\dfrac{T}{n}$.

$B_T \mapsto (1 + \frac{rT}{n})^n B \to e^{rT}B \;\; (n \to \infty)$.

$u \mapsto u_n = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}},\; d \mapsto d_n = -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$ とおくのが適当と分かる.
（中心極限定理と同じ理由で平方根）σ：ボラティリティ(volatility).

連続極限

$r \mapsto r_n = r\dfrac{T}{n}$． $u \mapsto u_n = \sigma\sqrt{\dfrac{T}{n}},\ d \mapsto d_n = -\sigma\sqrt{\dfrac{T}{n}}.$

$$\frac{r-d}{u-d},\ \frac{u-r}{u-d} \ \mapsto \frac{\pm r\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = \frac{1}{2} \pm \frac{r}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}$$ **リスク中立確率：**

$$\mathsf{P}_Q[\,X_t = 1+u\,] = \frac{r-d}{u-d},\ \mathsf{P}_Q[\,X_t = 1+d\,] = \frac{u-r}{u-d}$$

$$\mapsto\ \mathsf{P}_Q[\,X_t^{(n)} = 1 \pm \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,] = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{r}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

連続極限（刻み $n \to \infty$）のポイント： $\mathsf{E}_Q[\,\log X_t^{(n)}\,] = \dfrac{1}{2}\log(1-\sigma^2\dfrac{T}{n}) + \dfrac{r}{2\sigma}\sqrt{\dfrac{T}{n}}\log\dfrac{1+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{1-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ **から，** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\mathsf{E}_Q[\,\log X_t^{(n)}\,] = rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T.$ **さらに，**

$$\lim_{n\to\infty} n\mathsf{V}[\,\log X_t^{(n)}\,] = \lim_{n\to\infty} n\mathsf{E}[\,(\log X_t^{(n)})^2\,] = \sigma^2 T,$$

中心極限定理

中心極限定理：$X_1, X_2, \ldots$ が期待値 m，分散 v の独立同分布確率変数列のとき，確率変数列 $Z_n = \frac{1}{\sqrt{nv}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$ は $n \to \infty$ で標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z に法則収束する（つまり，Z_n の分布が $N(0,1)$ に弱収束する）（確率論入門2）

$\log S_n = \log S + \sum_{t=1}^{n} \log X_t^{(n)}$ は（リスク中立確率の下で）独立確率変数の和なので，中心極限定理から，$\sigma\sqrt{T}Z + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ に法則収束．すなわち，満期時の株価の分布は**対数正規分布**に従う：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = Se^{rT-\frac{1}{2}\sigma^2 T} e^{\sigma\sqrt{T}Z}$$

$\overrightarrow{S}_T = (B_T, S_T)$ の連続極限を得た

ブラックショールズの公式

このあとのあらすじ．

$\overrightarrow{S}_T$ **の連続極限を得たので，** $E(0) = \dfrac{1}{(1+r)^T}\mathsf{E}_Q[\ (S_T - K)_+\ ]$ **の連続極限＝連続時間モデルにおける満期時刻** T **行使価格** K **のヨーロッパコールオプションの期始の無裁定価格が計算できる**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$ **：標準正規分布** $N(0,1)$ **の分布関数**

$$\int_x^{\infty} e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(-x)$$ **なので**

Black–Scholes **の公式** $\lim_{n\to\infty} E(0)$

$$= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}(Se^{rT-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma\sqrt{T}z} - K)_+ e^{-z^2/2}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= S\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \log\frac{S}{K})\right)$$

$$- Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \log\frac{S}{K})\right)$$

（現代数理ファイナンスの始まりの公式）

ブラックショールズモデル

途中の時刻の株価とオプションの価格も同様に計算できる（あらすじ）．
実時刻t**は刻み回数**tn/T**に相当．記号**S_t**を実時刻**t**の株価に転用して，**

$$S_t = \lim_{n\to\infty} S^{(n)}_{tn/T} = Se^{\sigma\sqrt{t}Z' + rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t};$$

Z'**は（**Z**と関係する）**$N(0,1)$**に従う確率変数**

$t = 0$**での価格と同様の議論と計算で**$E_t = \lim_{n\to\infty} E(tn/T)$**は**Black–Scholes**の公式で**$T \mapsto T - t$, $S = S_0 \mapsto S_t$**と置き換えたもの**

特に，E_0**は前ページの結果，**$E_T = (S_T - K)_+$

ブラックショールズモデル（続）

連続極限の実時刻 t **でのヨーロッパコールオプションの価格** E_t **の具体形**

$x = \frac{e^{-rt} S_t}{e^{-rT} K}, \ y = \sigma\sqrt{T-t}, \ e(x, y) = E_t / S_t$ **（株単位金額当オプション価格）は** $e(x, y) = \Phi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\log x) - \frac{1}{x}\Phi(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\log x)$

関数 e **は初期値** $e(x, +0) = (1 - \frac{1}{x})_+$ **と境界条件** $e(+0, y) = 0$, $e(+\infty, y) = 1$ **と偏微分方程式** $\frac{1}{y}\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \frac{\partial e}{\partial x})$ **の解**

•Black–Scholes **は偏微分方程式を解いて公式を見つけた．後に** Merton **が確率過程の伊藤の公式を用いて証明した．後者の考え方を離散化したのが** CRR **モデル，という歴史順序**

確率過程ということ

・2項T期モデルは，株価が折れ線で表され，各折れ線に対してリスク中立確率が定まる．折れ線の集合上の確率（cf. ランダムウォーク）

・連続極限は関数の集合上の確率という見方を与える（確率過程）．
(BSM model; Black-Scholes-Merton. $n \to \infty$で CRR→BSM)

・ヨーロッパ（コール）オプションは期末の株価だけで決まるので偏微分方程式と普通の積分で答えが書ける．より複雑なデリバティブを表すには確率過程と確率積分が必要．

・数学としての確率論はσ加法族上の測度と抽象化して定義するので，複雑な対象に対しても定義可能であり，一般的に成り立つ定理は複雑な対象でも成り立つ．

数理ファイナンス：確率論など数学を用いた，株価や為替等のリスク（決定論で捉えきれない変化）ある金融商品の価格付け等の研究
（会社の同僚や商売相手が数学を分かっていることも珍しくない時代）

補遺

(1) マルチンゲール

$X_t = \dfrac{S_{t,i}}{(1+r)^t}$ とおくと $X_t = \mathrm{E}_Q[\, X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \,],\ t = 0, 1, \ldots, T-1$

・確率過程は変動の激しい関数の集合を扱うが，マルチンゲールは収束定理が成り立ち，確率積分が定義できるなど数学的性質が良い

・「リスク中立確率は原資産の組（を安全利子率で割り引いたもの）をマルチンゲールにする確率測度」と定義できる（マルチンゲール測度）

(2) プットオプション

ヨーロッパプットオプション：時刻 T に株１単位行使価格 K で売る権利

$E'_T = (K - S_T)_+ = E_T - S_T + K$

企業価値を表す確率過程 V_t．負債総額 K，社債の満期 T で $V_T < K$ が企業倒産，株主の取り分は $(V_T - K)^+$（コールの買い），

債権者の取り分は $\min\{V_T, K\} = -(K - V_T)^+ + K$（プットの売り）

$$E_0 = S\Phi(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \cdots) - Ke^{-rT}\Phi(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \cdots)$$

$$S_0 - E_0 = S\Phi(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \cdots) + Ke^{-rT}\Phi(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \cdots)$$

積極経営は高ボラティリティなので，株価は↑，格付けは↓

まとめ

連続極限，ボラティィリティィ，中心極限定理，対数正規分布，ブラックショールズ
マルチンゲール，確率過程，数理ファイナンス

参考書

数理ファイナンスの数学的基礎教科書の冒頭にある離散モデルの章（そのような章が用意されている，数理ファイナンスの中の裁定理論についての，教科書ならばどれでもほぼ同じ，たとえば）

楠岡成雄，長山いづみ，数理ファイナンス，東京大学出版会，2015

T. **ビョルク, 数理ファイナンスの基礎, 浅倉書店,** 2004

津野義道，ファイナンスの数理入門，共立出版，2003

藤田岳彦，ファイナンスの確率解析，講談社，2002