数学概論I（春学期），数学概論II（秋学期）

服部哲弥

START ↱

１．偏微分

２変数関数 $f(x,y)$

点 (a,b) での連続　１変数よりも厳しい条件「近づき方によらない」

- 連続関数（和差積商で保存）

偏微分可能 $f_x(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{1}{h}(f(x,b) - f(a,b))$，$f_y(a,b)$（１変数と同様）

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$，　C^1 級，　２次偏導関数

- f_{xy}，f_{yx} が連続ならば等しい（証明は１変数の平均値の定理）
- C^1 級ならば連続　★偏微分可能でも連続とは言えない！

★１変数の微分可能に対応するのは，計算上は偏微分可能，意味の上では全微分可能 $(C^1$ 級$)$

２．１変数関数のテイラーの定理

・ロルの定理　$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続，(a,b) で微分可能，$f(a)=f(b)$ ならば $a<c<b$ かつ $f'(c)=0$ を満たす c がある
（証明は最大値の定理と最大点における微分）

C^1 級を仮定しないので f' に中間値の定理を使えない　→　強力な結果

・平均値の定理　$f\ :\ \ [a,b]\ \to\ \mathbb{R}$ が連続，(a,b) で微分可能ならば，
$a<c<b$ かつ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を満たす c がある
（証明は $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$）

c は f,a,b に依存するので $a<c<b$ だけで言えることしか言えないが，役立つことがたいへん多い

関数 f' の導関数 f''，一般に n 階導関数 $f^{(n)}$

テイラーの定理

テイラーの定理　**開区間** I **の中の２点** $a < b$ **と** I **で** n **階導関数を持つ** $f: I \to \mathbb{R}$ **に対して，**

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

剰余項 $R_n = R_n(a,b) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \ (a < c < b)$

・点 a **での情報で他の点での関数値を近似**

マクローリンの定理 $(a = 0)$

マクローリン展開（ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ **のとき）**

ロル，平均値，テイラー，マクローリンの各定理は本質は同じで便利な言い換え

例　e^x,　$a, b > 0$ **のとき** $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{b^a e^t} = 0$

３．偏微分の公式（合成関数，陰関数）

★　f が C^1 級のとき，偏微分に関する多くの公式が有効になる

接平面 $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

合成関数の微分 $F(t) = f(u(t), v(t))$（u, v は微分可能）

（計算に実用的,「代入してから微分」を「偏微分してから代入」で）

陰関数定理 $f(x, \varphi(x)) = 0$ なる $\varphi \in C^1$ の一意存在

（前提：$f(a,b) = 0,\ f_y(a,b) \neq 0),\ \varphi(a) = b$）

存在を認めれば微分の公式は合成関数の微分，例：接線の方程式

4．条件付き最小(大)値問題

・　条件 $g(x,y)=0$，$f(x,y)$ が (a,b) で最小(大)値ならば，$g_x(a,b)=g_y(a,b)=0$（条件が退化），または，$L=f+\lambda g$ について $L_x(a,b)=L_y(a,b)=g(a,b)=0$ なる λ がある

★候補を与える「あるとすればこの中のどれか」

有界閉集合

・連続関数 g について $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ は有界閉集合

・有界閉集合で連続な関数は最大(小)値を持つ

★存在を保証　（1変数の最大値の定理と同じ）

★微分の話題としては特殊だが，経済数学に続く

５．１変数関数の追跡

- $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続，(a,b) で微分可能のとき

(a,b) で $f' = 0\ [f' \geqq 0] \Leftrightarrow [a,b]$ で定数 [増加] 関数

(a,b) で $f' > 0$ ならば $[a,b]$ で狭義増加関数　（cf. $f(x) = x^3$）

（証明は平均値の定理）

I 開区間，$f:\ I \to \mathbb{R}$，$a \in I$

- f が a で極大（極大値 $f(a)$）　「お山の大将」（範囲の後出し，小さい）
- a で極大 (小) ならば $f'(a) = 0$
- f は２階まで微分可能で $f'(a) = 0$，f'' が連続のとき

$f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値，$f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値

（$f''(a) = 0$ のときは情報不足，例 $\pm x^n$，証明はテイラーと上記事実）

f が I で（下に）凸：　任意の３点 $x_1 < x < x_2$ に対して $(x, f(x))$ が $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の下にあること（$\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$）

- f が開区間 I で微分可能ならば，f が凸 $\Leftrightarrow$ f' が増加
- f'' があれば，I で f が凸 $\Leftrightarrow$ I で $f''(x) \geqq 0$　（最初の事実を $f \mapsto f'$）

例 $f(x) = x^\alpha$, $f(x) = x^2 e^{-x}$, $f(x) = x \log x$

６．２変数関数の極値問題

極大：「お山の大将」ある $\epsilon > 0$ があって $U_\epsilon(a,b)$ で最大

- 必要条件：$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$（軸方向の１変数問題）
- $f \in C^2$ のときの十分条件：$D = f_xxf_yy - f_{xy}^2$ について，

$D(a,b) > 0$ なら極値（$f_{xx}(a,b) > 0$ なら極大）

$D(a,b) < 0$ なら鞍点（極値は取らない）　（$D(a,b) = 0$ なら情報不足）

７．積分の定義（1 変数）

★　面積として定義する（矩形の面積は横 $\times$ 縦　→　短冊に切って和）

閉区間 $[a,b]$ **の分割** Δ： $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$，$|\Delta| = \max_i (a_i - a_{i-1})$

$$s(\Delta) = \min_{\{s_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(a_i - a_{i-1}),\ S(\Delta) = \max_{\{s_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(a_i - a_{i-1})$$

$\sup_\Delta s(\Delta) = \inf_\Delta S(\Delta)$ **のとき 積分可能** $= \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

- **定義** $\displaystyle\int_a^a = 0,\ \int_b^a = -\int_a^b$
- **閉区間で（区分的に）連続な関数は積分可能**　**（望ましい積分の定義）**

8．基本定理

★　もっともほしい性質：

$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ について $F'(x)=f(x)$（望ましい積分の定義）

- 単調性
- 積分範囲に関する加法性
- 積分の平均値の定理（$\exists c;\ \int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a),\ a\leqq c\leqq b$）

９．不定積分

- 　不定積分 $\int f(x)\,dx$，　　原始関数 $F'(x) = f(x)$ となる F

（定数の自由度：積分定数）

- 　微分積分の基本定理：

f が連続で $F' = f$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

- 　$n \neq -1$ のとき $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- 　$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + C,$　　$\int e^x\,dx = e^x + C$
- 　$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$　　$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$
- 　線形性

★　不定積分の公式は全て微分の公式から証明できる

１０．定積分の公式

連続関数の定積分について

- 線形性
- 積分範囲に関する加法性
- $\displaystyle \int_a^b = -\int_b^a, \ \int_a^a = 0$
- 置換積分（積分変数変換） $t = g(x)$ によって

$$\int_a^b f(g(x))\, g(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

- 部分積分

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

秋学期期末試験

p.19–36　　**２章後半と３章**

テキストの問または例の類題

- １変数関数の微分の応用（２章後半）：増減表とグラフ
- 偏微分（３章）：偏微分の計算，極値問題
- 積分（４章）は試験には出しませんが，理論的な分野に進みたい諸君は勉強が必須です

- 春に準じて，きちんと計算すること（間違えたら零点）

文献

標準のテキスト（緑）「微分積分」慶應義塾大学経済学部

春学期　微分積分入門　選択　第１－２章

秋学期　微分積分　必修　春学期の続き　第２－４章

http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/suukiso.htm

Google **検索キーワード　　服部哲弥**