線形代数（春学期），線形代数続論（秋学期）

服部哲弥

１．線形空間，１次独立・１次従属，生成

線形空間（ベクトル空間）：加法とスカラー倍と0

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$

部分（線形）空間

（春の積み残し）　連立同次１次方程式の解が一つに決まらない場合，解の全体はどうなっているか？（自由変数の個数よりも詳しい内容）　→　線形空間の議論

１次結合： $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i$

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ **が生成する線形空間** $\langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \rangle$ **：１次結合の全体**

１次独立，１次従属

２．基底，次元，同次連立１次方程式の解空間

基底　（定義：１次独立と生成）

次元 $\dim V$ **：基底の要素の個数　　★　基底のとりかたによらない**

- **任意の** $\mathrm{x} \in V$ **は基底の１次結合で一意的に表せる**

同次連立１次方程式 $A\mathrm{x} = 0$ **の解の集合** $V = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathrm{x} = 0\}$

- V **は線形空間（自由変数のかかるベクトルたちが** V **の基底）**
- $\dim V = n - \mathrm{rank}(A)$

３．基底の存在，生成する空間の基底

★　$\{0\} \neq V \subset \mathbb{R}^n$ が線形空間ならば基底を持つ
（実際は，V の１次独立なベクトルの組で最大個数のもの）

（証明は，$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ １次独立で $\mathbf{a}_{k+1} \notin \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \rangle \ \Rightarrow \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{k+1}$ １次独立）

- $\dim V$ は V の１次独立なベクトルの組の個数の最大値
- １次独立ベクトルを拡張した基底の存在　　・　次元の単調性

例：$A\mathrm{x} = 0$ の解の集合は線形空間→基底 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ を持つ→解は全て $\mathrm{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_\mathbf{k}$ の形に書ける

$\langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \rangle$ の基底への階段行列の応用

- $\dim \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \rangle = \mathrm{rank}(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_k)$
- $\mathrm{rank}(A) \geqq m \ \Leftrightarrow$ 0 でない m 次小行列式がある．

4．線形写像，核，像，ランク

線形写像 $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$　**（和とスカラー倍を保存）**

$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(A\text{:}\ m \times n)$

- f **は基底の行き先で決まる**　**（←　基底が重要な理由の一つ）**
- $A = (f(\mathrm{e}_1)\ \cdots\ f(\mathrm{e}_1))$ **とおくと** $f_A = f$

（★線形写像は本質的に行列をかけること，という意味）

$\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$

$\mathrm{Ker}\, f_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$**，** $\mathrm{Im}\, f_A = \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$

- $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n$

（証明は $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = n - \mathrm{rank}\, A$, $\dim \mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{rank}\, A$**）**

- $\mathrm{rank}\, {}^t A = \mathrm{rank}\, A$
- P, Q **正則正方行列ならば，**

$\mathrm{rank}\, AB \leqq \min\{\mathrm{rank}\, A, \mathrm{rank}\, B\}$, $\mathrm{rank}\, PAQ = \mathrm{rank}\, A$

5．内積，正規直交基底，直交補空間，直交化

これまでの大まかな動機：連立１次方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解

★　以下：漸化式の解（$= A^n$ の計算）　←　対角化　←　内積

Recall **内積** $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，　**ノルム** $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ **（直交）とは** $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$　　　**直交系，正規直交系，正規直交基底**

- $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$　　　• **直交系は１次独立**

部分空間 $V \subset \mathbb{R}$ **の直交補空間** $V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{v} \in V)\ (\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0\}$

- $V^\perp$ **は線形空間で** $V \cap V^\perp = \{0\}$
- V **への** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ **の正射影：** $\mathbf{a} = \mathbf{a}_V + \mathbf{a}_\perp$, $\mathbf{a}_V \in V$, $\mathbf{a}_\perp \in V^\perp$ **（一意的）**

（$V = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r \rangle$ **のとき，**$\mathbf{a}_V = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{a}, \mathbf{u}_i)\, \mathbf{u}_i$**）**

6．シュミットの直交化，直交行列

シュミット(Schmidt)の直交化：基底から正規直交基底を作る手続き

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|}\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$$

以下，最後まで正方行列に限る

直交行列： $\quad {}^tP\,P = E$

- $P = (\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$： $\quad \{\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ **は** $\mathbb{R}^n$ **の正規直交基底**
- $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^tA\,\mathbf{y}) \quad \rightarrow \quad \|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

直交座標： $\quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{p}_i, \qquad \mathbf{y} = {}^tP\,\mathbf{x}$

平面の１次変換＝線形写像 $f: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ （recall $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ **と書ける）**

直交変換（A が直交行列）： $\quad P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ **または** $P_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

（角 θ **の回転，または，折り返し）**

７．固有値，固有ベクトル，固有空間

固有値，固有ベクトル： $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

固有多項式 $\varphi_A(t) = |tE - A|$ （n 次多項式）

★　固有値 $\Leftrightarrow$ $\varphi(\alpha) = |\alpha E - A| = 0$

固有値の重複度

固有空間 $W(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\}$

・　$\dim W(\alpha) = n - \mathrm{rank}(\alpha E - A)$

・　異なる固有値の固有空間に属するベクトルたちは１次独立

特に，$\displaystyle\sum_{i \geqq 1} \dim W(\alpha_i) \leqq n$

８．対角化

対角化可能：$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ なる正則行列 P があること

★　$A^k = PD^kP^{-1}$ の計算が容易！

（D に固有値が並ぶ理由：$\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$　←　$|P|\,|P^{-1}| = 1$）

★　$|A| = |P^{-1}AP| = |D| = \alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_n$

- P は固有ベクトルを並べたもの
- 対角化可能 $\Leftrightarrow$ 全ての $\dim W(\alpha_i)$ が α_i の重複度に等しい

９．実対称行列の対角化，

- 実対称行列の固有値は全て実数
- 実対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交

★　実対称行列は実直交行列で対角化可能　　　（証明は帰納法）

１０．実２次形式

$${}^t\mathrm{x}\,A\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

正定値，非負定値，負定値，非正定値，不定符号

- **正定値** $\Leftrightarrow$ **全ての固有値が正**　**（→　行列式が正）**

主小行列式，主座小行列式

- **正定値** $\Leftrightarrow$ **全ての主座小行列式が正：** $|A_r| > 0,\ r = 1, 2, \cdots, n$
  （証明は帰納法）
- **負定値** $\Leftrightarrow (-1)^r|A_r| > 0,\ r = 1, 2, \cdots, n$

応用：２**次対称行列** $\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$ **の符号**

→２**変数関数** $f(x,y)$ **の極値の十分条件（微分積分学への応用）**

１１．標準形，線形差分方程式，線形微分方程式

２次正方行列の（ジョルダンの）標準形

A は対角行列か，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},\ \alpha \neq \beta,$$ か，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

（$(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$ → $A-\beta E$ のどちらかの列ベクトル $\mathbf{p}_1 \in W(\alpha)\setminus\{\mathbf{0}\}$）
（$\alpha=\beta$ のときは，$\mathbf{p}_1$ が第 i 列の時，$\mathbf{p}_2=\mathbf{e}_i$）

応用：

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$f'' - af' - bf = 0,\ f(0) = c_1,\ f'(0) = c_2$$

秋学期期末試験

- 内容は盛りだくさん：
　第４章　線形空間，１次独立，１次従属，生成，基底，次元，線形写像，像(Im)，核(Re)，
　第５章　内積，ノルム，直交補空間，正射影，規格化,（シュミットの）直交化
　第６章　固有値，固有多項式，固有ベクトル，固有空間，対角化，対称行列，直交行列
（５章の規格化・直交化（シュミット）は６章でも使うし４章にも応用できる：講義での説明参照）
- 春や過去問に準じて小問方式
- 像や核の次元とrankなど線形空間の基礎事項を意識した問題も
- 講義中の強調点も（例：像空間・核空間・直交補空間，実対称行列の対角化）

文献

標準のテキスト（ピンク）「線形代数」慶應義塾大学経済学部

春学期　線形代数　必修　第１－３章

秋学期　線形代数続論　選択　春学期の続き　第４－６章

`http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/senkei.htm`

Google検索キーワード　　服部哲弥