線形代数（春学期），線形代数続論（秋学期）

服部哲弥

０．イントロ

産業連関表（さんぎょうれんかんひょう Input Output Table**）**
産業ごとの生産・販売等の取引額を行列形式にした指標

http://www.stat.go.jp/data/io/ichiran.htm

http://www.e-stat.go.jp/SG1/estat

/List.do?bid=000001019588&cycode=0

横に見ると，どこに売ったか．
縦に見ると，どこに金を払ったか．

→　**行列**(matrix)　**（線形代数が扱う基本の対象）**
縦と横の非対称性：鉱業→石油製品　と　石油製品→鉱業　は違う

１．行列とその演算

m，n：自然数　　$m \times n$ 行列：mn 個の数を長方形に並べたもの

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{pmatrix}$$

列，列ベクトル $(m \times 1)$，列ベクトル表示，行，行ベクトル $(1 \times n)$

まとめることの意義：引越や片付け

（大きさ：持ち運びと取り出す時のかねあい，直方体：重ねられる→操作）

行列の間の演算：和 $A + B$　（零行列 O，結合律，可換性）

スカラー(実数)倍 kA　（$-A = (-1)A$，$A - B = A + (-B)$），分配律）

★ 積 AB　（行ベクトルと列ベクトル：$(a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

これを A の行数と B の列数分並べたものが積，A の列数＝B 行数）

初回アナウンス

○　標準のテキスト（ピンク）「線形代数」慶應義塾大学経済学部

春学期 線形代数 (必修) １－３章，秋学期 線形代数続論 (選択) ４－６章

・　**評価は期末試験**　（今年度は出席を付けない予定）

○　先輩先生方のメッセージ

・　最初やさしく見えても**講義には出るように．意外に進度は速い**
（出席して講義をまじめに聴いた人が合格するくらいの合格水準）

・　予習はだいじ．試験は教科書と講義準拠

・　３年に数学を用いる科目（ミクロ中級など）を取るならば，
２年で経済数学Ｉの履修を薦める

・　経済数学を履修するには**秋学期の線形代数続論**の内容も必須

○　演習　（2回目以降，講義時間の後半）

・　教科書の問題中心

・　白紙のままぽつんと座って×だけつけて帰るよりも，隣と相談

★　理想像：予習して，演習はすぐ終了，友人の手助け，略解をもらってさっさと退室

○　過去問（略解付）等　ウェブから自由にどうぞ：

http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/senkei.htm

または，　服部哲**弥**　で検索／日本語ホーム／講義／線形代数

２．行列の積

積 AB： 横かける縦，$(m \times n)\ (n \times p) = (m \times p)$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{pmatrix}(\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

単位行列 $E = E_n$

正方行列 $n \times n$，　基本列ベクトル $\mathbf{e}_i,\ i = 1, \cdots, n$

$AE = EA$，　非可換，　分配法則，結合法則，A^n

３．正則行列と逆行列

転置行列 ${}^tA$，　**（演算との関係** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$**）**

★　**使い道：**　**行ベクトルと列ベクトル（内積），対称行列（対角化）**

ここから下は正方行列$(n$**次：**$n \times n)$

正則行列： $AX = XA = E$ **となる** X **があるような** A

逆行列：$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$ **なる** A^{-1} **つまり正則とは逆行列があること**

・**あれば唯一（例：**2×2，$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$ if $abc \neq 0$**）**

★　**いつ正則か？逆行列は何か？**　→　**行列式の最重要の動機**

イメージ（1**次正方行列）：正則**$\Leftrightarrow a \neq 0$，**逆行列**$= \dfrac{1}{a}$

$(A^{-1})^{-1}$, $({}^tA)^{-1}$, $(AB)^{-1}$, $(A^k)^{-1}$, block diagonal

４．行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

★　行列式の話は正方行列に限る

★　「箱」ではなく数値

第１行での展開による定義

２×２の例，　３×３のみサラスの方法

・第１列での展開に等しい　→　$|{}^tA| = |A|$　（いずれも，帰納法で証明）

５．行列式の性質(1)

例： $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 26$

例： $|t\,E - A| = \begin{vmatrix} t-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t-a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$ **はtのn次多項式（展開と帰納法）→第６章で使う**

- **２つの行（列）を入れ替えると行列式の符号が反対になる**

（証明は，展開と帰納法で隣接行の入替を言って，あとは繰り返し）

- **特に２つの行（列）が同じなら行列式は０**
- **第i行（列）での展開（符号に注意）**　**（行を入れ替えて第１行での展開）**

６．行列式の性質(2)

- 行線形性（i行のk倍，i行の和），j行のk倍をi行に加えても不変

（証明は展開）

- 列線形性，j列のk倍をi列に加えても不変
- ブロック三角行列の行列式 $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

（証明は帰納法と第１行による展開）

- 下（上）三角行列（対角行列）の行列式は対角成分の積，$|E| = 1$

★　積の行列式 $|AB| = |A|\,|B|$　特に，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

（証明は，$|A\,B| = |A\,B + AC|$を用いて$|A||B| = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix} B \right|$）

特に$|P^{-1}||P| = 1$，$|P^{-1}AP| = |A|$→対角化

7．余因子行列

余因子： $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ **（★符号に注意）**

(A_{ij}: A **から** i **行と** j **列を除去）**

余因子行列： $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ji})$ **（★転置に注意）**

- $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ **（証明は直接計算）**

★ A **が正則** $\Leftrightarrow\ |A| \neq 0 \quad \Rightarrow\ A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$

- $XA = E$ **または** $AX = E$ **ならば** A **は正則で** $X = A^{-1}$

- **対角行列：** $abc \neq 0$ **ならば** $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix}$

８．連立１次方程式とクラメルの公式

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

係数行列 A が正方行列で正則（$|A| \neq 0$）のとき

★　$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

・　クラメルの公式　$x_i = -\dfrac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{e}_i & 0 \end{vmatrix}$

★　未知数と方程式数が異なる場合や $|A| = 0$ の場合（予告）：基本変形（はきだし法），さらに，線形空間としての解の集合

→　線形代数らしい（やや抽象的だが数学的構造についての）議論

９．基本変形

$m \times n$行列（この先対角化の前まで正方行列でなくてもよい）

行基本変形（行の入替，0 でないスカラー倍，他の行の k 倍を加算）

階段行列 階段状で,($(\mathrm{e}_1 \ \cdots \ \mathrm{e}_2 \ \cdots\ )$，最後の e_r は $r \leqq m$，i 行目の最初に 0 でない列は e_i）

- 任意の行列 A は行基本変形で階段行列になる（A の階段行列）
- A の階段行列はただ一つ
- $r = \mathrm{rank}(A)$
- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$ ★特に，$\mathrm{rank}(A) \leqq \min\{m, n\}$

１０．正則行列の条件とはきだし法による逆行列

基本行列　（行の入替，スカラー倍，他の行の k 倍の加算）

・　**行基本変形は基本行列を左からかけることと等しい**

特に，A の階段行列 B に対して $B = PA$ となる正則行列 P がある

★　**正方行列の場合：**

正則行列 $\Leftrightarrow$ 階段行列が単位行列 $E \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

（証明は，階段行列の唯一性と rank の定義と行列式による正則性判定）

・　**はきだし法による逆行列**

行基本変形で階段行列を得たとき $P(A\ \ E) = (E\ \ P) \Leftrightarrow P = A^{-1}$

１１．連立1次方程式の解法（はきだし法）

行基本変形Pで$PA=B$を階段行列とすると$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \Leftrightarrow B\mathbf{x}=P\mathbf{b}$;

$P\mathbf{b}$もはき出し法 $P(A\ \mathbf{b})=(B\ \ P\mathbf{b})$で$B$と同時に得る

★　解$\mathbf{x}$が機械的に得られる

・　係数行列Aは正則行列でなくても良い，正方行列の必要もない

・　解が一つに決まらない場合：

自由変数の個数＝未知数の個数 $-\,\mathrm{rank}(A)$

・　解を持つ $\Leftrightarrow\ \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A\ \mathbf{b})$　　（これはここで終了）

★　解が一つに決まらない場合，解の全体はどうなっているか？

（自由変数の個数よりも詳しい内容）　→　線形空間の議論

１２．同次連立１次方程式，１次独立，内積

同次連立１次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 　（**自明な解** $\mathbf{x} = \mathbf{0}$）

Recall　**自由変数の個数＝未知数の個数** $-\,\mathrm{rank}(A)$

ベクトルの組$\mathbf{a}_i,\ i = 1, \cdots, n,$ **が１次独立：**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow\ (\forall i) x_i = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\text{ が自明な解のみ}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$

１次従属

内積 $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = {}^t\mathrm{a}\ \mathrm{b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

- **双線形性，対称性，ノルム** $\|\mathrm{a}\|^2 = (\mathrm{a}, \mathrm{a}) \geqq 0$，**等号** $\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- **シュワルツ不等式（等号は**a, b **が１次従属），三角不等式**

★　（**予告**）　１**次独立と内積：線形空間の研究の重要な道具**

春学期期末試験

テキストの問そのまま出すことはしないが，基本的に
講義で説明したこととテキストの説明・例・問の類題と応用

- 第１章行列の演算：和，差，定数倍，積，正則，逆，は基本
- 第２章行列式：行列式の計算法（公式），逆行列
- 第３章：行基本変形，はきだし法，逆行列，連立一次方程式の解，階段行列，階数，基本行列，正則性の種々の同値条件，その他

★ 計算力（ノーミスで最後まで計算する力 ← 答を間違えたら零点）

前期は計算中心だからまじめにやれば意外に良い点がとれる．後期が心配．前期はアルゴリズムの達成度，後期は数学の理解も入る．

文献

標準のテキスト（ピンク）「線形代数」慶應義塾大学経済学部

春学期　線形代数　必修　第１－３章

秋学期　線形代数続論　選択　春学期の続き　第４－６章

http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/senkei.htm

Google 検索キーワード　　服部哲弥