確率論（数学３年後期選択）演習問題

服部哲弥

2000915;17–19;21–23;1101(PrbaFubini);08(PrbagenfcnChebishev,
PrbaCauchyL1);22(PrbaLpmon);1222;23;
20010110(PrbaufmintbleChebishev,
Prbatightnessformeasonpositive,Prbaufmfinitemvimpliesregularity,
Prbaindepvssadd,PrbasumofNisN);16 (PrbaCLTbinom,PrbaCLTbinomtwo)

確率論演習問題集

受講生諸君への注意

この冊子は講義内演習時間に使用するので，各自で管理して，講義には毎回持参すること．

この演習問題集では，断らなければ以下の設定が与えられていると仮定し，また以下の記号を断りなく使う．

設定
- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が与えられているとする．
- X_n, Y_n, Z_n, $n \in \mathbb{N}$, は ($(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の) 確率変数列，X, Y, Z は ($(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の) 確率変数とする．

（問題毎に以上と異なる設定が明記されている場合は，以上の設定はそれぞれその問題に関して無効とする．）

記号
- 2^{Ω}: 集合 Ω に対して，その全ての部分集合を要素に持つ集合族.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$: 1 次元ボレル可測空間,
- (1 次元) 分布： $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ または $\mathbb{R}$ の部分ボレル可測集合上の確率測度
- μ_1: 1 次元ルベーグ測度．$[0, 1]$, $(0, 1]$, $(0, 1)$ などの上考えた場合は一様分布．ルベーグ測度に関する積分 $\displaystyle\int \cdot d\mu_1$ を (普通の書き方どおり) $\displaystyle\int \cdot dx$ などとも書く．
- i.i.d.: 独立同分布確率変数列.

1　確率空間，確率変数，期待値 — 測度論の復習．

[**1**]　(1) (確率) 測度 $\mathrm{P}[\ \cdot\ ]$ の定義において，σ 加法性

$$A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, 3, \cdots,\ \Longrightarrow\ \mathrm{P}[\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\ ] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_i\ ]$$

を要請したが，左右の値の異同を云々できるためには左辺が定義できること $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (?) が必要である[1] これを検証せよ．

(2) 集合 Ω の部分集合たちを要素とする空でない集合族 $\mathcal{F}$ が σ 加法族であるとは，可算和と補集合という 2 つの演算に関して閉じていることである，と講義で定義した．この条件を式で書け.

[**2**]　(1) 集合 Ω の部分集合たちを要素とする空でない集合族 $\mathcal{J}$ が有限加法族であるとは,「2 つの集合の和集合」と「補集合」という 2 つの演算に関して閉じていることを言う．σ 加法族ならば有限加法族であることを証明せよ.

(2) 上の定義では 2 つの集合の和集合について閉じていることしか要求しないが，このことから直ちに有限個ならば何個の和集合でも閉じることを証明せよ．

(3) $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ の部分集合からなる集合族で有限加法族だが σ 加法族でないものの例を挙げよ.

[1] 定義にはこのことが書かれていないがこれは各自の検証に任している．このように暗黙に各自の検証に任せる話は大学以後の数学では多い.

[3] (1) $\mathcal{F}$ が Ω 上の σ 加法族ならば必ず $\emptyset$ と Ω を含むことを示せ.

(2) Ω 上の σ 加法族で「最大」のもの $\mathcal{F}_1$ と「最小」のもの $\mathcal{F}_0$ を求めよ．ここで「最大」および「最小」とは，$\mathcal{F}$ が Ω 上の σ 加法族ならば必ず $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ となるものを指す.（Ω がどんな集合でも成り立つ形の解答を求めよ.）

[4] $A_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, を以下のようにとる：

$$A_n = \{1 - \frac{1}{k} \mid k = n, n+1, n+2, \cdots\} \cup \{1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{3 \cdot (-1)^n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ に等しいのは次のどちらか？

(a) $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, 1\} \cup \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\} \cup \{-3, 3\}$ (1 が入る),

(b) $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\} \cup \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\} \cup \{-3, 3\}$ (1 が入らない).

(2) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} A_n \ \ (= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n \ \ (= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ を求めよ.

[5] $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする（即ち $\mathcal{F}$ が Ω の部分集合を要素とする σ 加法族とする）. $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, ならば以下の集合も $\mathcal{F}$ の要素（可測集合）になることを証明せよ.

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} A_n$.

(3) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n$.

[6] (1) Ω 上の σ 加法族たち $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, について，全てに含まれている要素（Ω の部分集合）を全て集めた集合族 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ も σ 加法族であることを証明せよ.

(2) $\mathcal{I}$ を Ω の部分集合族（σ 加法族とは限らない）とする．このとき，$\mathcal{I}$ を含む最小の σ 加法族が存在することを証明せよ（$\mathcal{I}$ が生成する σ 加法族 $\sigma[\mathcal{I}]$）.

[7] (1) Ω の集合族 $\{\emptyset\}$ に対して $\sigma[\{\emptyset\}]$ を求めよ.

(2) $\Omega = \{1, 2\}$ のとき $\sigma[\{\{1\}\}]$ を求めよ．
(3) $\Omega = \{1, 2, 3\}$ のとき $\sigma[\{\ \{1, 2\}, \{1, 3\}\ \}]$ を求めよ．

[8] 実数 $\Omega = \mathbb{R}$ の開集合全てからなる集合族 $\mathcal{O}$ が生成する σ 加法族（1 次元ボレル集合族）$\mathcal{B}_1 = \sigma[\mathcal{O}]$ は区間（開区間，閉区間，片側開片側閉区間等）によっても生成されることを証明せよ，即ち，$\mathcal{I}$ が以下のそれぞれの場合について $\mathcal{B}_1 = \sigma[\mathcal{I}]$ を証明せよ．

(1) $C = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid -\infty \leqq a < b \leqq \infty\}$.
(2) $C = \{(a, b] \subset \mathbb{R} \mid -\infty \leqq a < b < \infty\}$.
(3) $C = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid -\infty < a < b < \infty\}$.
(4) $\mathbb{Q}$ を有理数全体とするとき $C = \{(-\infty, r] \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

[9] Ω 上の実数値関数 $X :\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，$\sigma[X] = \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}_1\}$ は σ 加法族になることを証明せよ（X が生成する σ 加法族）．

[10] $\mathcal{F}$ を定義域とする実数値関数 $\mathrm{P}[\ \cdot\ ] :\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が測度であるとは，非負かつ σ 加法性を持つこと，と講義で定義した．この条件を式で書け．

[11] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間とする．以下を証明せよ．なお，以下に出てくる集合 A, B, A_n, などは全て可測集合（事象）とする．

空集合　$\mathrm{P}[\ \emptyset\ ] = 0.$

有限加法性　$A \cap B = \emptyset \implies \mathrm{P}[\ A \cup B\ ] = \mathrm{P}[\ A\ ] + \mathrm{P}[\ B\ ].$

補集合　$\mathrm{P}[\ A^c\ ] = 1 - \mathrm{P}[\ A\ ].$

単調性　$A \subset B, \implies \mathrm{P}[\ A\ ] \leqq \mathrm{P}[\ B\ ].$

値域　$0 \leqq \mathrm{P}[\ A\ ] \leqq 1.$

劣加法性　$\displaystyle \mathrm{P}[\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\ ] \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_n\ ].$

連続性(a) $\displaystyle A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \implies \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ A_n\ ] = \mathrm{P}[\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\ ].$

(b) $\displaystyle A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \implies \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ A_n\ ] = \mathrm{P}[\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\ ].$

(c) $\displaystyle A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ A_n\ ] = 0.$

[12] 集合 A, B に対して $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定義する（A と B の違いを表す集合）．以下を証明せよ．

(1) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

(2) $\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \triangle C \subset \bigcup_{n=1}^{N} (A_n \triangle B_n) \cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \right) \triangle C \right)$.

[13] 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実可測関数 X に対して $\mathrm{E}[\,|X|\,] = \infty$ のときは $\mathrm{E}[\,X\,]$ に関してどのような可能性があるかを列挙せよ．

[14] $X \geq 0$, a.e., かつ $\mathrm{E}[\,X\,] = 0$ ならば $X = 0$, a.e. を示せ．

[15] 確率変数 $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，$t \mapsto M(t) = \mathrm{E}[\,e^{tX}\,]$ で定義される $\mathbb{R}$ 上の非負値関数 $M\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ を X の母関数という．

(1) M は恒等的に ∞ ではないことを証明せよ

(2) X が有界 (X の値域が有界にとれるということ) ならば，全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $M(t) < \infty$ であることを証明せよ．

(3) $X \geq 0$, a.e., ならば $t \leqq 0$ に対して $M(t) < \infty$ であることを証明せよ．

(4) $(0, 1]$ 上のボレル可測集合族からなる可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}) = ((0, 1], \mathcal{B}_1((0, 1]))$ を考え，その上の一様分布 μ_1 で定義される確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = ((0, 1], \mathcal{B}_1((0, 1]), \mu_1)$ の上で考える．
定数 $c > 0$ に対して $X(\omega) = -\frac{1}{c} \log \omega$ で定義された非負値確率変数 $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ を考える．X の母関数 M を求めて，それが $t < c$ で有限であることを確認せよ．

[16] n を自然数，p を $0 < p < 1$ なる実数ととする．$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ とおくとき，

$$B(n, p)(A) = \sum_{k \in A} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad A \in 2^{\mathbb{Z}_n},$$

で定義される可測空間 $(\mathbb{Z}_n, 2^{\mathbb{Z}_n})$ 上の確率測度 $B(n, p)$ を二項分布という．

（$k > n$ に対して $B(n, p)(\{k\}) = 0$ とすることによって，$(\mathbb{Z}_+, 2^{\mathbb{Z}_+})$ 上に (自明に) 拡張した分布も二項分布という．）

二項分布が確率測度になっていることを確率測度の定義から証明せよ．

[17] $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が絶対連続で $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ならば，確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ に対して $\mathrm{E}[\,f(X)\,]=\int f'(x)\,\mathrm{P}[\,X>x\,]\,dx$ となることを証明せよ．

ここで $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が絶対連続とは，任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，互いに共通部分を持たない区間の有限列 $(a_j,b_j]$, $j=1,\cdots,n$, が $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)<\delta$ であれば必ず $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|<\epsilon$ であることを言う（伊藤清三「ルベーグ積分入門」裳華房，§19[2]）．

（ヒント．同書定理 19.2, 定理 19.3 によれば，f が $[a,b]$ で絶対連続ならば，$[a,b]$ の殆ど至るところで f' が存在し，f' はルベーグ積分可能であって，$\displaystyle f(b)-f(a)=\int_a^b f'(y)\,dy$ が成り立つ．）

2　確率変数列の収束．

2.1　期待値に関する種々の不等式．

[18] 確率変数 X の母関数 $M(t)=\mathrm{E}[\,e^{tX}\,]$ に関して $c>0$ が存在して $t<c$ で $M(t)<\infty$ ならば

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\mathrm{P}[\,X\geq x\,]\leqq -c$$

が成り立つことを証明せよ．($\mathrm{P}[\,X\geq x\,]=0$ となる x がある場合は，左辺は $-\infty$ と約束することにする．)

[19] 期待値 $m=\mathrm{E}[\,X\,]$ が (有限実数値で) 存在する確率変数 X の母関数 $M(t)=\mathrm{E}[\,e^{tX}\,]$ に対して $I(x)=\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}}(tx-\log M(t))$ で定義される関数 $I:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ を M のルジャンドル変換と言う．

(1) $I(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$, を証明せよ．
(2) $I(x)$ は $x=m$ で最小値をとることを証明せよ．

[20] 確率変数 X に対して $\|X\|_p=\mathrm{E}[\,|X|^p\,]^{1/p}$ とおく．

(1) $0<p<p'$ のとき $\|X\|_p\leqq\|X\|_{p'}$ を証明せよ．
(2) 上記 $\|\cdot\|_p$ の単調性は確率測度が有限測度 ($\mathrm{P}[\,\Omega\,]=1<\infty$) だから成り立つ．
それどころか，例えば 1 次元ボレル測度空間 $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1,\mu_1)$ (μ_1 は 1 次元ルベーグ測度) 上の可測関数 $X:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で $0<p<p'$ なのに $\|X\|_p=\infty$, $\|X\|_{p'}<\infty$ なるものが存在する．その例を挙げよ．

[2] そこでは閉区間での絶対連続性しか定義されていないが，その定義で行けば，この問題では $\mathbb{R}$ の任意の閉区間に対して絶対連続，という意味で使う．

[21] $p \geq 1$ とし，$L^p = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid$ 確率変数，$\mathrm{E}[\,|X|^p\,] < \infty\}$ とおき (L^p 空間)，$X \in L^p$ に対して $\|X\|_p = \mathrm{E}[\,|X|^p\,]^{1/p}$ とおく．

(1) L^p は実線形空間（和と実数倍で閉じている，和について結合律・零元・逆元・対称律，定数倍について分配法則・実数の積・和と整合，1 倍で不変）であることを証明せよ．

(2) $\|\cdot\|$ はノルム（非負，ノルムが 0 なら零元，$\|cX\| = |c|\|X\|$，三角不等式）であることを証明せよ（L^p ノルム）．

2.2 種々の収束の定義．

[22] $X_n \to X$, a.e., $X_n \to \tilde{X}$, in prob., ならば $X_n \to \tilde{X}$, a.e., を証明せよ．
（ヒント： $n \to \infty$ のとき $X_n \to X$, a.e., かつ $X_n \to \tilde{X}$, in prob., ならば $X = \tilde{X}$, a.e., を証明せよ.）

[23] 確率変数 X と確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, が次の性質を満たしているとする：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすある数列 $\{a_n\}$ があって，$A_n = \{|X_n - X| > a_n\}$ とおくとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_n\,] < \infty$.
このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = X$, a.e..
（ヒント．ボレルカンテリ第 1 定理：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_n\,] < \infty$ ならば $\mathrm{P}[\,\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n\,] = 0$.）

[24] 確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, と確率変数 X に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,|X_n - X|\,] < \infty$ ならば X_n は $n \to \infty$ で X に概収束することを証明せよ．

[25] $[0,1]$ 上の一様分布が定める確率空間 $([0,1], \mathcal{B}_1, \mu_1)$ の上に定義された確率変数 X と確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, について，概収束 ($\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = X$, a.e.,) かつ期待値が収束 ($\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,X_n - X\,] = 0$) しても L^1 収束 ($\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|X_n - X|\,] = 0$) しない例を挙げよ．

[26] ある正の実数 p に対して X_n が $n \to \infty$ で X に L^p 収束すれば，任意の $0 < q < p$ に対して L^q 収束することを証明せよ．
（ヒント．Hölder の不等式.）

[27] 確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, が次の条件を満たしているとする.

(1) n, m が相異なる自然数ならば $\mathrm{E}[\ X_n X_m\ ] = 0$.
(2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[\ X_n^2\ ] < \infty$.

このとき，$\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は $n \to \infty$ で 0 に確率収束することを証明せよ.

（ヒント．チェビシェフの不等式.）

[28] $n \to \infty$ のとき $X_n \to X$, in prob., $X_n \to \tilde{X}$, in prob., ならば $X = \tilde{X}$, a.e., を証明せよ.

[29] $n \to \infty$ のとき $X_n \to X$, in prob., ならば，任意の連続関数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $f(X_n) \to f(X)$, in prob., を証明せよ.

[30] ある X が存在して $n \to \infty$ のとき $X_n \to X$, in prob., となることと，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{P}[\ |X_n - X_m| > \epsilon\ ] = 0$ となることが同値であることを証明せよ.

[31] 確率変数 X に対して $\|X\|_S = \mathrm{E}[\ \dfrac{|X|}{1+|X|}\ ]$ とおく.（ノルムの記号を使っているが，ノルムではない.）

確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, が確率変数 X に確率収束することと $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_S = 0$ が同値であることを証明せよ.

[32] $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ 上の確率測度の列 $\mathrm{P}_n,\ n \in \mathbb{N}$, を次で定義する.

$$\mathrm{P}_n[\ A\ ] = \begin{cases} 1 & \dfrac{1}{n} \in A, \\ 0 & \dfrac{1}{n} \notin A. \end{cases}$$

(1) P_n は $n \to \infty$ のとき弱収束することを定義に基づいて証明せよ．極限測度 P は何か？
(2) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[\ A\ ] \neq \mathrm{P}[\ A\ ]$ となる $A \in \mathcal{B}_1$ があることを証明せよ．どんな集合がこの性質を持つか.
(3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[\ G\ ] > \mathrm{P}[\ G\ ]$ となる開集合 G があることを証明せよ．どんな集合がこの性質を持つか.

(4) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{P}_n[\,F\,] < \mathrm{P}[\,F\,]$ となる閉集合 F があることを証明せよ．どんな集合がこの性質を持つか．

[33] $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の列 P_n, $n \in \mathbb{N}$, が確率測度 P に弱収束しているとする．

(1) 有界だが不連続な可測関数 $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f\,d\mathrm{P}_n = \int f\,d\mathrm{P}$ とならない $(\Omega, \mathcal{F})$, P_n, $n \in \mathbb{N}$, f の例を挙げよ．

(2) 連続だが有界でない可測関数 $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f\,d\mathrm{P}_n = \int f\,d\mathrm{P}$ とならない $(\Omega, \mathcal{F})$, P_n, $n \in \mathbb{N}$, f の例を挙げよ．
（注：Ω がコンパクト集合ならば連続関数は有界になってしまう．ので第２のケースは存在しない．それならば，Ω がコンパクト集合でない場合で P が台有界なときはどうか？）

[34] 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の列 P_n, $n \in \mathbb{N}$, と確率測度 P_A, P_B に対して，P_n が $n \to \infty$ で P_A に弱収束し，かつ，P_n が $n \to \infty$ で P_B に弱収束するならば $\mathrm{P}_A = \mathrm{P}_B$ であることを証明せよ．

[35] P_n, $n \in \mathbb{N}$, を $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ 上の確率測度列とし，確率測度 P に弱収束しているとする．

もし，ある閉集合 $E \in \mathcal{F}$ があって P_n たちが E を台に持つ ($\mathrm{P}_n[\,E\,] = 1$, $n \in \mathbb{N}$,) ならば P も E を台に持つことを証明せよ．

（注：Ω が位相空間で，$\mathcal{F}$ がそのボレル集合族 (開集合を全て含む最小の σ 加法族) であっても全く同じ証明が成り立つ.）

[36] 確率変数列 X_n, $n \in \mathbb{N}$, が 0 に法則収束 (弱収束) すれば 0 に確率収束することを証明せよ．

2.3 種々の収束の関係．

[37] 確率変数列 X_n, $n \in \mathbb{N}$, が $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{E}[\,|X_n - X_m|\,] = 0$ を満たすならば，$\{X_n\}$ はある確率変数に L^1 収束することを証明せよ．

[38] (1) 定数 $p>1$ に対し，$\mathrm{E}[\,|X_n|^p\,] \leqq 1$, $n \in \mathbb{N}$, ならば X_n, $n \in \mathbb{N}$, が一様可積分であることを証明せよ.

(2) X_n, $n \in \mathbb{N}$, が一様可積分ならば $\mathrm{E}[\,|X_n|\,]$, $n \in \mathbb{N}$, は有界であることを証明せよ.

[39] 非負値可測関数 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ が $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ を満たしているとする．もし $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\,f(|X_n|)\,] < \infty$ ならば X_n, $n \in \mathbb{N}$, は一様可積分であることを証明せよ.

（ヒント．チェビシェフの不等式の導出の類推.）

[40] (1) $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と $\{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ がそれぞれ一様可積分ならば $\{X_n + Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ も一様可積分になることを証明せよ.

(2) $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が一様可積分ならば $\{\dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ も一様可積分になることを証明せよ.

[41] $|X_n| \leqq Y$, a.e., $n \in \mathbb{N}$, なる可積分な確率変数 Y があれば $\{X_n\}$ は一様可積分であることを証明せよ.

[42] $\infty > p' > p \geq 1$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\,|X_n|^{p'}\,] < \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\,|X_n|^p;\ |X_n| \geq K\,] = 0$ (従って特に $\{X_n\}$ は一様可積分).

（ヒント．$|X_n| \geq K$ ならば $|X_n|^{p'} \geq K^{p'-p}|X_n|^p$.）

[43] $X_n \to X$, in prob., と，$\{X_n\}$ の任意の部分列が X に概収束する部分列を含むこととが同値であることを証明せよ.

[44] 確率変数列 X_n, $n \in \mathbb{N}$, が一様有界 $(\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Omega} |X_n(\omega)| < \infty)$ かつ，ある確率変数 X に $n \to \infty$ で確率収束するならば L^1 収束する.

（ヒント：**問** [**31**].）

2.4 特性関数．

[45] 以下の分布 μ の特性関数 $\varphi(t)=\displaystyle\int e^{\sqrt{-1}xt}\mu(dx)$ を求めよ．

(1) 二項分布 $\mu=B(n,p)$, $0<p<1$, $n\in\mathbb{N}$, の特性関数．二項分布の定義は **問** [**16**] 参照.

(2) Poisson 分布 $\mu=\Phi(\lambda)$, $\lambda>0$, の特性関数.
ここで λ を正の実数とする．$\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$ とおくとき，

$$\Phi(\lambda)(A)=\sum_{k\in A}\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k,\quad A\in 2^{\mathbb{Z}_+},$$

で定義される可測空間 $(\mathbb{Z}_+,2^{\mathbb{Z}_+})$ 上の確率測度 $\Phi(\lambda)$ を Poisson 分布という.

(3) $[0,1]$ 上の一様分布の特性関数．一様分布の定義は **問** [**15**] を参照.

(4) Cauchy 分布 $\Phi_c(m,a)$, $m\in\mathbb{R}$, $a>0$, の特性関数.
ここで $\Phi_c(m,a)$ とは 1 次元ボレル可測空間 $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ 上の確率測度で，

$$\Phi_c(m,a)(A)=\int_A\frac{a\,dx}{\pi(a^2+(x-m)^2)},\quad A\in\mathcal{B}_1,$$

で定義されるものをいう.

(5) 正規分布 $N(m,v)$, $m\in\mathbb{R}$, $v>0$.
ここで $N(m,v)$ とは $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ 上の確率測度で，

$$N(m,v)(A)=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(x-m)^2/(2v)}dx,\quad A\in\mathcal{B}_1,$$

で定義されるものをいう.

[46] 1 次元分布 ($(\mathbb{R},\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 上の確率測度）P の特性関数を φ とするとき，以下の関数はそれぞれどのような分布の特性関数か？

(1) $\bar{\varphi}$.

(2) $|\varphi|^2$.

(3) φ^n, $n\in\mathbb{N}$.

[47] a を正の実定数とする．次の各々の場合について，φ を特性関数とする 1 次元分布はどのような分布か？

(1) $\varphi(t)=\dfrac{\sin at}{at}$.

(2) $\varphi(t)=\left(\dfrac{\sin at}{at}\right)^2$.

[48] $\lambda = \lim_{n\to\infty} np_n > 0$ なる正数列 p_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, がある．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数でその分布が二項分布 $B(n, p_n)$ であるとき，X_n の分布は Poisson 分布 $\Phi(\lambda)$ に弱収束することを証明せよ．

二項分布の定義は **問** [**16**]，Poisson 分布の定義は **問** [**45**]，をそれぞれ参照．

[49] 平均 $m = \int \xi \mathrm{P}[\,dx\,]$ と分散 $v = \int (x-m)^2 \mathrm{P}[\,dx\,]$ が存在して $v > 0$ であるような 1 次元分布 P を考え，その特性関数を $\varphi(t) = \int e^{\sqrt{-1}t\,x}\mathrm{P}[\,dx\,]$ とする．このとき，$a > 0$ が存在して

$$|\varphi(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq a,$$

が成り立つことを証明せよ．

非負実数上の測度と特性関数．

[50] P が，台が非負実数に含まれるボレル測度 $(([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ 上の測度）ならば，その特性関数 $\varphi(t) = \int e^{\sqrt{-1}xt}\mathrm{P}[\,dx\,]$ は $\Im(t) \geq 0$ を満たす複素数 (上半平面) で連続関数として定義され，$\Im(t) > 0$ で解析的であることを証明せよ．

[51] P_n, $n \in \mathbb{N}$, が，台が非負実数に含まれるボレル測度 $(([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ 上の測度）の列とし，その特性関数を $\varphi_n(t) = \int e^{\sqrt{-1}tx}\mathrm{P}_n[\,dx\,]$ とする（**問** [**50**] によって $\Im(t) \geq 0$ で定義されている）．

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(-\sqrt{-1}C) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^\infty e^{Cx}\mathrm{P}_n[\,dx\,] < \infty,$$

を満たす $C > 0$ があれば，以下が成り立つことを証明せよ．

(1) 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int x^p \mathrm{P}_n[\,dx\,] < \infty$.

(2) $\{\mathrm{P}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は tight である．

[52] P_n, $n \in \mathbb{N}$, が，台が非負実数に含まれるボレル測度 $(([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ 上の測度）の列とする．特性関数 $\varphi_n(t) = \int e^{\sqrt{-1}tx}\mathrm{P}_n[\,dx\,]$ $n \in \mathbb{N}$, が以下を満たすとする．

(1) 正定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(-\sqrt{-1}C) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^\infty e^{Cx}\mathrm{P}_n[\,dx\,] < \infty.$$

(2) 分散 $v_n = \displaystyle\int (x-m_n)^2 \mathrm{P}_n[\, dx\,]$ は $v_- = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n > 0$ を満たす．ここで m_n は平均
$m_n = \displaystyle\int x\mathrm{P}_n[\, dx\,]$.

このとき n に無関係な $a>0$ が存在して

$$|\varphi_n(t)| < 1,\quad n\in\mathbb{N},\ 0<|t|\leqq a,$$

が成り立つことを証明せよ．
（ヒント．**問** [49] と類似の証明．一様性に気をつけるだけの違い.）

3　独立確率変数列．

3.1　独立性．

[53]　事象 $A,\,B$ が独立，即ち，

$$\mathrm{P}[\,A\cap B\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B\,]$$

ならば $A,\,B^c$ も独立，即ち，

$$\mathrm{P}[\,A\cap B^c\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B^c\,]$$

であることを示せ．

[54]　3 つの事象で，どの 2 つずつも独立だが 3 つは独立でない例を挙げよ．
これは実はたいへんやさしい．例えば $\Omega=\{0,1,2,3\}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$ の上にもいろんな解がある．そこでなるべく分かりやすい例を求めることにしたい．解を偶然見つけた場合は，もっと単純にできないか考えてみよ．

[55]　事象 $A,\,B$ に対して $\sigma[A]$ と $\sigma[B]$ が独立であることと $\mathrm{P}[\,A\cap B\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B\,]$ は同値である．

[56]　A,B,C を $B\cap C=\emptyset$ を満たす事象（可測集合），a,b,c を $b\neq c$ なる実定数とし，階段関数 $X=a\chi_A$, $Y=b\chi_B+c\chi_C$ を考えるとき，X,Y が独立になる条件は A,B,C だけで定まり，a,b,c にはよらないことを示せ．

[57]　n を自然数，λ_k, $k=1,2,\cdots$, を正定数たちとする．X_k, $k=1,2,\cdots,n$, が独立で，それぞれその分布が Poisson 分布 $\Phi(\lambda_k)$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ の分布を求めよ．Poisson 分布の定義は **問** **[45]** を参照.

[58]　X と Y は独立で同じ分布 μ を持ち，さらに平均 0 分散 1 とする．$X+Y$ と $X-Y$ が独立ならば μ は標準正規分布 $N(0,1)$ であることを証明せよ.

[59]　X_k, $k=1,2,\cdots,n$ を i.i.d. でそれぞれの分布は標準正規分布 $N(0,1)$ とする．このとき $X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $Y=\sum_{k=1}^{n} X_k^2$, $Z=\sum_{k=1}^{n}(X_k-X)^2$ の分布を求めよ．また，X と Z は独立になることを証明せよ.

[60]　独立確率変数列 X_k, $k=1,2,3,\cdots$, に対して $\mathrm{P}[\lim_{k\to\infty} X_k=0\,]=1$ と

$$(\forall\epsilon>0)\ \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,|X_k|>\epsilon\,]<\infty,$$

が同値であることを証明せよ.

[61]　確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ において $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}$, $n\in\mathbb{N}$, は独立な σ 加法族の列とする．$\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma[\bigcup_{k=n}^{\infty}\mathcal{F}_k\,]$ に属する集合（$\{\mathcal{F}_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ に関する末尾事象）の確率は 0 または 1 であることを証明せよ.

（ヒント．コルモゴロフの 0–1 法則としてよく知られる定理なので，教科書を調べてみよ.）

[62]　X_n, $n\in\mathbb{N}$, を i.i.d. 確率変数とすると，$\mathrm{P}[\,\exists\lim_{n\to\infty} X_n\,]=0$ であるか，さもなければ $\mathrm{P}[\,X_n=c\,]=1$, $n=1,2,3,\cdots$, となる定数 c が存在することを証明せよ.

3.2 独立確率変数列とその和の極限定理．

[63] $0 < p < 1$ を定数とする．確率変数列 $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, が独立同分布でその分布は $\mathrm{P}[\,X_n = 0\,] = 1-p$, $\mathrm{P}[\,X_n = 1\,] = p$ で与えられているとする．このとき，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ で定義される確率変数 S_n の分布を求めよ．

[64] $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, は i.i.d. でそれぞれの分布は $\mathrm{P}[\,X_n = j\,] = 1/6,\ j = 1, 2, \cdots, 6$, とする．このとき，殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に対して，数列 $\{X_n(\omega) \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ の中に 1 が無限個あることを証明せよ．

[65] $\mathrm{E}[\,|X_1|\,] = \infty$ を満たす独立同分布確率変数列 $X_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots$, に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n = 1, 2, 3, \cdots$, とおく．

(1) $M > 0$ を定数とするとき，

$$\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid |X_n| > Mn\} = \infty,\ a.e.,$$

が成り立つこと（殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に対して $|X_n(\omega)| > Mn$ を満たす n が無限個あること）を証明せよ．ここで $\sharp A$ は集合 A の要素の個数を表すとする．
（ヒント． **問** **[17]** と X_i が独立同分布であることとボレルカンテリ第 2 定理.）

(2) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_n| = \infty$, a.e., を証明せよ．
（ヒント．$|\xi_n| > 2a$ ならば $|S_n| > a$ または $|S_{n-1}| > a$.）

[66] $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, を i.i.d. とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく．X_n は $n \to \infty$ で 0 に確率収束するが，$\dfrac{1}{n} S_n$ は $n \to \infty$ で 0 に確率収束しない例を挙げよ．
（ヒント． $\mathrm{P}[\,X_n = b_n\,] = a_n$, $\mathrm{P}[\,X_n = 0\,] = 1 - a_n$ なる形で見つけることができる．実際，どんな定数に収束させることもできる.）

[67] $0 < p < 1$ を定数とする．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して確率変数 S_n の分布が二項分布 $B(n, p)$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(S_n - np)$ の分布は $n \to \infty$ で正規分布 $N(0, 1)$ に弱収束することを証明せよ．

[68] 　$0 < p < 1$ を定数とする．X_k, $k = 1, \cdots, n$, を i.i.d. で $\mathrm{P}[\, X_1 = 0 \,] = 1 - p$, $\mathrm{P}[\, X_1 = 1 \,] = p$ なる分布を持つものとする．このとき $\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(\sum_{k=1}^{n}(X_k - p))$ の分布は $n \to \infty$ でどうなるか？

　問 **[67]** との関係は何か.

[69] 　a と b を $a < 0 < b$ を満たす整数とする．数直線上の原点 0 から出発して，硬貨を投げながら整数点を動くゲームを考える．毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれ動き，a または b に着いたときは，以後そこにとどまる．以下の問に答えよ.

(1) n 回目に動いたあとの位置を S_n と書くとき，$E[S_{n+1}] = E[S_n]$ が全ての $n = 1, 2, 3, \cdots$ について成り立つことを示せ.

(2) $n \to \infty$ とするとき a, b に着いている確率の極限をそれぞれ求めよ.
但し，a と b 以外の場所にいる確率が $n \to \infty$ で 0 に収束することは用いてよい.（あとで証明することにする.）

(3) A, B の二人がこのゲームを行う．a に着いたら B は A に 100 円払い，b に着いたら A は B に x 円払う．このゲームを公平にするためには x をいくらにすればよいか.

(4) a と b 以外の場所にいる確率が $n \to \infty$ で 0 に収束することを証明せよ.
（ヒント．右に $b-a$ 連続して進めばどこにいても必ず b に到達する．このことから，b にいる確率の増加率の下限を得る.）

[70] 　X_k, $k = 1, \cdots, n$, を i.i.d. で $\mathrm{P}[\, X_1 = -1 \,] = \mathrm{P}[\, X_1 = 1 \,] = \dfrac{1}{2}$ なる分布を持つものとし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, とおく．このとき，$x, y \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{P}[\, S_n = y + x \,] = \mathrm{P}[\, S_n = y - x,\ \exists k \in \{1, 2, \cdots, n-1\};\ S_k = -x \,]$ を証明せよ.

　（ヒント．(k, S_k), $k = 0, \cdots, n$, をプロットしたグラフを考える．$S_n = y - x$ となるグラフの最初の部分を $S_n = -x$ で折り返す．Reflection principle という名前がヒント.）

[71] 　$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続関数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して $\displaystyle\sup_{0 \leqq x \leqq 1} |g(x) - f(x)| \leqq \epsilon$ を満たす多項式 $g = g_\epsilon$ が存在する（Weierstrass 近似定理）.

　この g として以下で定義されるものをとることができることを証明せよ.

　$p \in [0,1]$ に対して，$\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, を i.i.d. で，$P(X_1 = 1) = p$, $P(X_1 = 0) = 1 - p$ を満たすとする.（表が出る確率が p の不公平な硬貨を永久に投げ続ける試行.）また $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく.

　$n = n(\epsilon)$ を ϵ に応じて（十分大きく）選べば $g_\epsilon(p) = g_{n(\epsilon)}(p) = \mathrm{E}[\, f(\frac{1}{n}S_n) \,]$ が f の求める近似多項式になる.

　（ヒント．閉区間で連続な関数は一様連続かつ有界．Cehbyshev 不等式を用いる.）

[72] X_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, を i.i.d. で各々の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ とする．$0 \leqq t \leqq \pi$ と $\omega \in \Omega$ に対して $B(t,\omega) = \dfrac{t}{\sqrt{\pi}} X_0 + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} X_j(\omega) \frac{\sin j\, t}{j}$ と (右辺が収束すれば) おく．

(1) 殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に対して $B(t,\omega)$ は $t \in [0,\pi]$ に関して一様収束し，$B(t,\omega)$ は t の連続関数になることを証明せよ．

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq \pi$ に対して $B(t_k) - B(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \cdots, n$ は i.i.d. でその分布は $N(0, t_k - t_{k-1})$ になることを証明せよ．

注：確率過程 B をブラウン運動という．