デリバティブの無裁定価格理論

集中講義　於東北大学数学教室 2005/05/30-06/03.
講師　高岡浩一郎　先生（一橋大学大学院商学研究科）
記録　服部哲弥

目 次

1　原資産の価格変動モデルに依存しない性質．

1.1　先渡，先物．

火曜日

先渡契約とは，あらかじめ定めた将来の期日（**受渡日，満期**）に原資産を売るもしくは買う契約.

- 売買量や売買価格（**先渡価格**）も契約時に定める.
- 契約時に行うのは予約のみであり，お金のやりとりは行わない.

例． 「６ヶ月後に１ドル110円のレートで10万ドルを売る」という契約をある金融機関と結ぶ．たとえば，海外生産で作った商品を現地で売る予定で，その収入を日本円で入手したいとき，そのままだと得られる日本円は商品売渡の時点でのレートに依存する．将来の収入を現時点で確定したいときに使う.（損するか得するかは現時点では分からない.）

用途．

(i) リスク回避（**ヘッジ** hedge 生け垣）
(ii) 大ばくち（たとえば１ドル100円といった円高を予想しているとき，６ヶ月後に1000万円を借りてドルに換えて先渡契約を履行して1100万円を得て，その中から1000万円を返して100万円を得る　→　元手0なので，いくらでも儲けられる）

先物は先渡と基本的に同じ.

- 先渡は相対取引（あいたい，契約者どうしが直接交渉して決める）
- 先物は取引所に上場される

参考書． J.Hull ジョン・ハル，フィナンシャルエンジニアリング（バイブル．先物の上場における証拠金等，制度的なことも解説してある.）

日本経済新聞の表の読み方． 原資産を株価指数とする（たとえば日経平均２５６銘柄のバスケット）．先物：１列目が満期（第２木曜日）．前日の値段.

以下，先渡価格の決まり方を説明する.

１．配当のない株式．

株式（考えている期間中配当は無いものとする）の先渡.
仮定：株式やお金を負の量，非整数値の量保有できる　－　**空売り**（short selling, short position, short 英語では悪い意味はない）
現在価格 S_0 円，満期 T 年後，金利水準：今の１円が T 年後の $1+R$ 円.
このとき先渡価格は $F=(1+R)S_0$ を満たす.（株価の上下の予想と無関係に決まることに注意.）

Q．満期Tは？
A．Rの中に年数が込められている.

公式の成り立つ理由． 仮に $F>(1+R)S_0$ ならば，あなたは次の戦略（**position**）をとる.

現時点：

- 先渡を１つ売る．キャッシュフロー 0（予約だけでお金のやりとりはない）.

  用語：原資産を買う予約を入れることを「先渡を買う」と言う.「売る」も同じ.

- 株式を１つ買う．キャッシュフロー $-S_0$.

- 借金．キャッシュフロー $+S_0$.

満期：

- 先渡契約の履行．フロー F.
- 借金返済．フロー $-(1+R)S_0$.

仮に $F > (1+R)S_0$ としていたので，株価の増減に関係なく利益を得る（**裁定取引 arbitrage**）．このようなことがあると，十分厚みのある市場ならば皆が殺到するので，直ちに差が埋まる．$F < (1+R)S_0$ の場合も同様．よって，$F = (1+R)S_0$.

2．為替レート．

現在： 1 ドル $= S_0$ 円，満期 T 年後，金利水準：現在の 1 円が T 年後に $1+R_y$ 円，1 ドルが T 年後に $1+R_d$ ドル,（R_y, R_d は時間変動するが，今の時点で決まっている（見えている）.）このとき，先渡レートは $F = \dfrac{1+R_y}{1+R_d}S_0$ を満たす（**金利平価式** interest rate parity）.

株式と為替の違いは期中配当のあるなしの違いと見るのがよい.（ドル利率が配当に相当.）原資産が株か為替かということは本質的差異でない.

公式の成り立つ理由． 仮に $F > \dfrac{1+R_y}{1+R_d}S_0$ とする．次の戦略を組む.

今：

- $\dfrac{S_0}{1+R_d}$ 円の借金.（円キャッシュフロー $+\dfrac{S_0}{1+R_d}$，ドルキャッシュフロー 0）
- ドルに換える（円 $-\dfrac{S_0}{1+R_d}$，ドル $+\dfrac{1}{1+R_d}$）
- ドルを預金（円 0，ドル $-\dfrac{1}{1+R_d}$）
- 先渡で 1 ドルを売る（円 0，ドル 0）

満期：

- 預金解約（円 0，ドル 1）
- 先渡契約の履行（円 $+F$，ドル -1）
- 借金返済（円 $-\dfrac{1+R_y}{1+R_d}S_0$，ドル 0）

これを合計すると元手 0 で裁定 $F - \dfrac{1+R_y}{1+R_d}S_0 > 0$ を得る.

日本経済新聞の表の読み方：　円相場終値の中値をとって $S_0 = 107.835$ ととり，満期３ヶ月 ($T = 1/4$) の欄に注目する．無リスク金利としては国債がいいが，日経に載っていないので，次善の策として TIBOR（Tokyo Inter Bank Offer Rate 東京銀行間取引金利）が記事の下の方に載っている．(TIBOR とは，毎日 11 時に取引している外国資本も含む主要銀行 8 行を選んで，金利を調べ，上下２つを除外した残りで平均した金利．国債に比べて銀行の信用リスクが微々たる量上乗せされている．)

ドルが 360 日ベースしか載っていないので円も 360 日ベースで考える．３ヶ月の値は 0.08% なので，今の 1 円は３ヶ月後の $1 + \dfrac{0.08/100}{4}$ 円，同じく今の 1 ドルは３ヶ月後の $1 + \dfrac{3.32834/100}{4}$ 円．これらから金利平価より先渡の理論レート 106.967

記事の上のほうの銀行間ドル直先スプレッド（現在値と先渡ものとの差）．３ヶ月実勢の d0.897 は（d は discount の意味），実際のレートが $107.835 - 0.897 = 106.938$ であることを意味する．理論との多少の差は，S_0 として中値を使ったこと，TIBOR を使ったこと，データを取った時刻が数値によって違うことなどが考えられる．

３．貴金属．

現物の保管コストの分 修正される．

４．農産物．

上記の議論は使えない．(満期までに現物が傷むから．）この方向で株式や債券と対極にあるのが電力（その場で使わないとなくなる．）

服部哲弥の注．　ホテルの部屋も，空き室で終われば当日の価値が消えるので，電力に似ている．森村誠一の推理小説にはその視点が複数の本に出ている．ちなみに，彼は元々ホテルマンだったが，ある有名推理作家がフロントに預けた原稿を盗み読んで，これなら自分も書ける，と作家に転じて大成功したことを彼自身が述懐している．

1.2　オプション．

オプションではあらかじめ定めた将来の期日（**満期**）に原資産を売るもしくは買う**権利**．(先渡は履行義務なのに対して，オプションは行使しなくてもかまわない，という契約．）売買量や売買価格（**（権利）行使価格**）も契約時に決める．契約時に権利相当額（**オプション価格，オプション料，オプションプレミアム**）のお金が権利の買い手から売り手へ支払われる．

買う権利を**コールオプション**，売る権利を**プットオプション**，と言う．

日本経済新聞の表の読み方：　オプションの欄．日経平均オプション（原資産が日経平均）．上段の６，７，８月が満期（第２木曜日）

原資産と満期と行使価格（権利の内容）で価格が決まる．先渡に比べていいとこ取りしているので契約時に払う．

Q．手数料は？

A．入っているけれどもそんなに入っていない．
Q．そうすると極端なところの1円では手数料がまかなえない？
A．分からないけど，一つ言えるのは宝くじのようなもの．

コールの売り，コールの買い，プットの売り，プットの買い，の４通りがある．
正確には以上のオプションをヨーロピアンオプション（たとえばヨーロピアンコールオプション）と言う．これに対して満期**までに**売り買いする権利をアメリカンオプションという．

オプション料について．

原資産 S_t を満期 T に行使価格 K 円で買う約束をするヨーロピアンコールオプションの満期における権利の価値は $(S_T-K)^+$．ヨーロピアンプットオプションは $(K-S_T)^+$．

プットコールパリティ． 配当無しの株式を原資産とするコールとプットのオプション料をそれぞれ C_0, P_0 と記す．このとき，$C_0-P_0=S_0-\dfrac{K}{1+R}$．ここで R は今の 1 円が T 年後の $1+R$ 円になるという意味の利率とする．なぜなら，$C_T-P_T=(S_T-K)^+-(K-S_T)^+=S_T-K$ なので，利子を考慮すれば主張のようになる．
C_0 自体は？すぐわかる不等式 $(S_0-\dfrac{K}{1+R})^+\leqq C_0\leqq S_0$.（左辺はパリティと $P_0, C_0\geqq 0$ から，右辺は $(S_T-K)^+\leqq S_T$ から.）**これ以上はモデルによって変わる．**

アメリカンオプションについて． 原資産に期中配当がない場合アメリカンコールは満期前に行使しても有利にならない．
なぜなら，満期以前の時刻 $t\leqq T$ に行使する場合の権利の価値は S_t-K，t 時点から満期まで待つ場合の t 時点での価値は少なくとも $(S_t-\dfrac{K}{1+R_{t\to T}})^+$．後者のほうが小さくなることはない．一見うまみがあるように見えて価値はヨーロピアンコールと等しい．
これに対して，アメリカンプットは満期前の行使が有利な場合がある．
日経新聞の表はヨーロピアンオプションのみ．

2　２項モデル．

2.1　１期間２項モデル．

水曜日

金利 0 の場合，現在 100 の株式．満期時 200 または 50．$K=120$ のコールの値段（無裁定価格）は 80/3 円．株価予想（強気か弱気か）には関係ない．

導出． 株式とお金を用いてコールオプションを複製する．
現在株式 ϕ 単位，お金 ψ 単位保有することで複製できるとすると，
上がった場合 $200\phi+\psi=80$　　(1)
下がった場合 $50\phi+\psi=0$　　(2)

これを解くと $\phi = 8/15$，$\psi = -80/3$.

この複製に要する元手は $100\phi + \psi = 80/3$ (3)

この複製はコールオプションと満期時のサンプルの如何に関わらず完全に同じなので，同じ現在価値を持たなければarbitrageが発生する．つまりコールオプション料に一致する．

注．

(i) 上昇確率 90% といった「読み」は全く影響しない．

(ii) ϕ と ψ を求めなくても (1)×1/3+ (2)×2/3 = (3) によって (3) を求めることができる．この 1 : 2 という比は，上がり幅と下がり幅の比である．この内分比を確率（**リスク中立確率**）とみなすと，オプションの満期価値を新しい確率の下での期待値がオプションの現在価値に等しい．

(iii) オプションの用途：

- リスクヘッジ．原資産を持っているときそのプットオプションも買っておく．
- 大ばくち．上の例で，増加の場合，原資産は 2 倍増，オプションは 3 倍増．つまりオプションのほうがばくちになる．オプションが宝くじになる（オランダでそういう例がある）．

金利が 0 でない設定の場合.

株式 100 が期間の終わりに 200 または 50，$K = 120$ のコールの満期時の価値は 80 または 0．安全債券は現在 1 が満期時 5/4 になるとする．

コールの複製：株式 ϕ 単位，安全債券 ψ

$200\phi + \frac{5}{4}\psi = 80$ (1')

$50\phi + \frac{5}{4}\psi = 0$ (2')

これを解いて $\phi = \frac{8}{15}, \psi = -\frac{64}{3}$ なので

複製の元手は $100\phi + \psi = 32$ (3')

となる．これを内分法でやってみる．

(1')$\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$ + (2')$\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$ = (3')

これからも 32 を得る．そこでレシピ.

Step 1. 満期時点での安全債券価格で満期時点の株価を割り引く（利率で割る）

Step 2. リスク中立確率を計算（上昇幅と下降幅による内分）

Step 3. デリバティブの満期価値の割引期待値を求める（リスク中立確率に関する K の期待値をとった後に満期安全債券の価値 $1 + R$ で割る）

ちなみに，上の例で $K = 120$ のプットの現在価値は $(0 \times 1/2 + 70 \times 1/2)/(5/4) = 28$

プットコールパリティの成立の確認. $C_0 - P_0 = 32 - 28 = 4$, $S_0 - \frac{K}{1+R} = 100 - \frac{120}{5/4} = 4$.

Q．金利があると$80/3$より高くなる？

A．金利が上がるとコールの確率が上がるかは，一般には言えない．

`Black-Scholes` でどうかは確かめていない．

注． オプション価格は原資産の価格変動の振れ幅（**ボラティリティ**）に大きく依存する．

2.2 多期間２項モデル．

もう少し現実に近づけようとして３項モデル（例：期末の株価が 200, 100, 50 ）を考えると，

- 一般に複製ができない．(合わせるべき方程式が３本で，未知数が２個だから．)
- （無裁定理論だけでは）リスク中立確率が一意に定まらない．株価の期待値が現在価値と等しくなる確率は無数にある．(効用関数を入れて最適化するなどしてしのぐ．)

多項モデルは決まらないので多期間にする．

株価は各期間で倍になるか半分になるとする．２期間後の $K = 120$ のプットは株価が 400 なら 0，100 なら 20，25 なら 95．安全債券は１期間当たり 5/4 倍になるとする．

後ろのほうから解いていけば良い．

やってみると，株価が１期目で 200 になったときのプットの価値は 8，50 になったときの価値は 46．そのようなオプションの現在価値は，再び同様に計算すると 108/5．これが元手．

このとき，複製のためには，１期目での株価に応じて保有量を変えないといけない（**ポートフォリオ**）．

リスク中立確率からのアプローチ．各 node において上昇と下降のリスク中立確率はそれぞれ 1/2 ずつ．よってオプション価格は

$$\frac{1}{(5/4)^2} \times (95 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4}) = \frac{108}{5}$$

アメリカンオプションの場合． $K = 120$ のプット（アメリカンコールは満期前行使に意味がない．）

１期目で権利行使できる可能性がある．１期目で株価が 200 になるとオプションは行使の意味がないけど 8 の価値がある．株価が 50 の時はオプション行使すると 70 の価値，しないとそれ自体の 46 の行使．よってオプション行使するから 70．これから現時点で行使しないときの価値が 156/5 と決まる．これは現時点で行使したときの価値 20 より大きいので 156/5 がこのオプションの価値．

各時点で行使するかどうかは後ろから決まっていく．この影響で，メッシュを細かくした極限は偏微分方程式の自由境界問題になる．

経路依存型オプションの例．

Asian option （アベレージオプション）． $(\frac{1}{3}\sum_{t=0}^{2} S_t - K)^+$

総合商社などひっきりなしに外貨が入ってくる場合に毎回オプションの契約をしていると煩雑．１年の平均の為替レートのオプションを考えれば，完全ではないけれども大まかには十分ヘッジしたことになる．

ノックアウトオプション． $(S_T - K)^+ \times 1_{\min_t S_t > H}$

考えている期間に一度でも株価が指定値より下がったら権利を失う．ふつうのコールだとオプション料が高いと感じる向きが多いので，安くするために設定する．けっこう売れる．日経平均 11000 くらいとして，３ヶ月もので $H = 9000$ ならけっこう買う人がいる．

ノックアウトの問題点．H に近づいたらオプションを売った銀行が売り浴びせるとノックアウトが可能．プロ同士だと売り浴びせたものを買い支えるという醜い争いが起こる．問題点は連続な汎関数でないこと．

3　Black–Scholes 式．

多期間２項モデルからオプション価格が決まる原理を話したが，多期間２項モデルのメッシュを細かくした極限を**Black–Scholes** モデルと呼び，そのオプション価格を**Black–Scholes 式**と呼ぶ．

離散モデルでオプション価格を計算するとき，複製による方法とリスク中立確率による（根は同じだが見かけは違う）２つの方法があった．

同様に BS モデルの場合も２つの方法があり，前者に対応するのが PDE による方法，後者によるのが martingale による方法である．

さらに，多期間２項モデルのオプション価格のメッシュを細かくする極限をとることで BS 式を得ることができる．

ここでは最後の方法で導出してから BS 式の性質を説明する．先に連続極限をとる方法では，確率積分などのツールを要するのに対して，価格を得てから連続極限をとる方法では中心極限定理を知っていれば十分である．

3.1　BS 式の導出（その１）．

満期 T までを n 等分し，n 期間２項モデルを考える．$\Delta t = T/n$.

株価は各期間で e^u 倍になるか e^d 倍になるとする．特に，満期時に $e^{nd}S_0 \leqq S_T \leqq e^{nu}S_0$. 安全債券は各期間で e^R 倍になるとする．

ただし，$d < R < u$ とする.（そうでないと株か債券かいずれかを short してもう一方を得ることで arbitrage が生じる.）

このまま $n \to \infty$ とすると意味が無くなるので，中心極限定理が使えるように以下の置き換えを行う：

- R を $R^{(n)} = r\Delta t = rT/n$ に置き換えておく.（$e^{nR^{(n)}} = e^{rT}$ に注意.）
- u, d は $u^{(n)} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}$, $d^{(n)} = \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}$ に置き換える.（$\mu\Delta t = \dfrac{1}{2}(u^{(n)} + d^{(n)})$, $\sigma\Delta t = \left(\dfrac{1}{2}(u^{(n)} - d^{(n)})\right)^2$，に注意.）

  μ：**ドリフト**

  σ：**ボラティリティ**（volatility 揮発性，怒りっぽい），価格変動率，予想変動率

このとき，$\log \dfrac{S_T^{(n)}}{S_0}$ のリスク中立確率 $Q^{(n)}$ の下での分布は $n \to \infty$ のときに $N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$ に収束する.（中心極限定理を若干拡張した定理から得られる.）

故に，プットの価格の極限は

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q^{(n)}}[\ \frac{(K - S_T^{(n)})^+}{e^{nR^{(n)}}}\ ]$$
$$= e^{-rT}\mathrm{E}[\ (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T})^+\ ] = Ke^{-rT}\Phi(-d_-) - S_0\Phi(-d_+).$$

これが**BS 式**（BS モデルで計算したオプションの価格）．

ここで Z は標準正規分布に従う確率変数であり，$d_\pm = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log(\dfrac{S_0}{Ke^{-rT}}) \pm \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$，および，$\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$

さらにプットコールパリティより，コールの価格も

$C_0 = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-)$

と決まる．

P_0, C_0 ともに，σ にはよるが，μ にはよらないことに注意.

3.2 BS 式の性質（比較静学の５性質）．

$\dfrac{\partial C_0}{\partial\sigma} > 0.$ (1)

原資産が危なっかしい商品に保険をかけることになるので保険料が高くなる．

$\dfrac{\partial C_0}{\partial S_0} = \Phi(d_+) > 0.$ (2)

$\lim_{\sigma\to\infty} C_0 = S_0,$ (3)

$\lim_{\sigma\to 0} C_0 = (S_0 - Ke^{rt}))^+.$ (4)

前回，モデルによらない性質を挙げたとき，C_0 の値の範囲を書いて，これ以上はモデルによる，と注意したが，その範囲の両端が σ の２つの極限で得られる．

$\lim_{T\to 0} C_0 = (S_0 - K)^+.$ (5)

日本経済新聞の表の読み方： ボラティリティの設定は大問題だがそれが乗っている！株価指数の表の右下に日経平均 HV，IV とあるのがそれ．HV は historical volatility（日経平均の過去 20 日間の平均）．$HV = 13.8$ とは 13.8% のことなので BS 式に入れるときは $\sigma = 0.138$（単位は年で）．

IV は implid volatility．BS 式によれば C_0 は σ の単調関数だから，市場実勢の C_0 が与えられればそれに基づいて σ をパラメータフィットできる．オプション価格から imply されるボラティリティ．一般には IV が HV より高め．HV は 10 から 20 前半くらいだが，IV は時々とても高くなる．今まで見ていた中で３回 $IV > 50$ になった．１回目は不良債権にあえいでいた頃に某銀行がつぶれるかもしれない，とうわさされたとき，２回目は竹中ショックのとき一瞬，３回目はＮＹの同時多発テロ直後から数日．

ところで，ボラティリティが変化しているということは，Black–Scholes のモデルが現実をよく説明していない，ということである.（BS モデルではボラティリティは与えられた定数と仮定しているから.）

3.3 オプション「的」とみなせるもの．

木曜日

- 手付金（決断を先延ばしするオプション料とみなせる）
- 特約付き外貨預金（円の金利が 0 なので，外貨預金をしにいくと，銀行でよく薦められるのが，金利を優遇する代わりに，特約が付いているもの．よく見ると為替のオプションを預金者が銀行に売る形になっている．そのオプション料が金利の上乗せとして宣伝されている．円の金利が高ければ見向きもしないが，円の金利が低いので，少しでも金利が高く見える商品に目が行く．つまり，その時々に応じた売れ筋の商品がある．それを売るのがビジネスセンス．
- 株式**そのもの**をオプションとみなす観点．企業価値を表す確率過程 V_t, $t \in [0,T]$，社債の満期 T，負債総額 K のとき，時刻 T で $V_T < K$ が企業倒産，株主の取り分は $(V_T - K)^+$ （コールの買い），債権者の取り分は

  $\min\{V_T, K\} = -(K - V_T)^+ + K =$ プットの売り $+ K$.

  新聞記事の例：ソフトバンクが積極経営していた頃，株価が高い一方で格付けが低いときがあった．積極経営（買収など）のとき，ボラティリティが高いので，コールオプションの現在価値は高く，プットは低い．
- 成果報酬.

  ファンドマネジャーが 1 億円の運用を任される．半年後の利益（半年後のファンド価値から 1 億円引いたもの）の 20%が給料．ただし，利益が負ならば給料ゼロ．

  このとき，時刻 t でのファンド価値の 20%を V_t とする．$V_0 = 2000$ 万．給料は $(V_T - 2000\,万)^+$．ファンドマネジャーはファンドを全額ある株式に投資し，それに加えて，自己勘定でその株式のコール（行使価格が現在価格と同じで半年満期）を今 2000 万円分売るとする．株式の選択はマネジャーに任されているが，ボラティリティが大きいほどコールの価値が高いので，なるべく大ばくち（$\sigma \to \infty$ で $C_0 \to S_0$）を打とうとする．

  会社としてそれでよいなら成果主義でよいが，それでまずいなら成果主義をとってはいけない．

4 Black–Scholes モデル．

4.1 Brown 運動，2 次変分，確率積分，伊藤の公式．

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$：フィルター付き空間

定義 4.1.1.

(i) パラメータづけられた確率変数たち $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ が確率過程であるとは
$X : \Omega \times [0,1] \ni (w,t) \mapsto X(w,t) \in \mathbb{R}$
が $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T])$ 可測であることを言う.

(ii) 確率過程 $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ が adapted であるとは $(\forall t)$ X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測であることを言う.

定義 4.1.2. Adapted な確率過程 $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ が $(\mathcal{F}_t)$–標準 Brown 運動である (確率論でよく使われる記号 B_t は安全債券 bond に予約されているので W を使う）とは,

(i) $W_0 = 0$
(ii) 各 $s \leqq t$ に対して $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$
(iii) 各 $s \leqq t$ に対して $W_t - W_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立
(iv) W の path は確率 1 で連続（a.e. $w \in \Omega$ に対して $t \mapsto W(t,w)$ は連続関数）

を満たすことを言う.

注.

- 最後の性質は最初の 3 つから得られる（連続変形定理）. W の path は確率 1 で nowhere differentiable, また, finites variation でない. (つまり, 連続だが非常にぎざぎざしている.）
- １次元対称ランダムウォークの空間のスケールを $n^{-1/2}$, 時間スケールを n^{-1} とした確率過程は $n \to \infty$ のときに Brown 運動に弱収束する.

連続時間モデルの最も基本である**Black–Scholes モデル**.
安全債券 $B_t = e^{rt}$
株価 $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$
ここで, σ, μ は定数, σ は**ボラティリティ**, μ は**ドリフト**と呼ばれる.
e の肩に W を乗せる（幾何ブラウン運動）. (非負であること, $\log S_t$ が正規分布ということが収益率が正規分布になること, 等の点で現実的. 100 年前くらいは幾何ブラウン運動ではなくブラウン運動を使うことがあったが, 今日では幾何ブラウン運動が標準的モデル.）

Brown 運動の２次変分 (quadratic variation).

定理 4.1.3.

$$\langle W \rangle_T = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (W_{2^{-n}kT} - W_{2^{-n}(k-1)T})^2 = T, \text{in probability}$$

(指数を 2 でなく 1 としたのが total vaiation で, それは ∞.）

証明. 独立性と正規分布に従うことからあらわに計算できて, 期待値は T, 分散は 0 に収束（つまり L^2 収束）する.

注. インフォーマルに $dW_t = \pm\sqrt{dt}$ と考えると便利.

確率積分（伊藤積分）. 離散時間の設定で, 時刻 $t-1$ から t の株式保有量を ϕ_t と表すと, 時刻 T までの合計損益は $\sum_{t=1}^{T} \phi_t (S_t - S_{t-1})$ と書ける.

この連続極限はformalには積分のはずだが，W のpathは有界変動でないので，Stieltjes積分は定義できない．しかし，確率的に変動していることをうまく用いて，積分が定義できる（伊藤清1944）．

可予測 (predictable, previsible) な確率過程 H が $\int_0^t H_u^2 du < \infty$, a.s., を満たすとき確率積分 $\int_0^t H_u dW_u$ が定義され，連続かつadaptedな確率過程になる．

離散時間の設定に戻ると，ϕ_t は $\mathcal{F}_{t-1}$ 可測，すなわち，時刻 $t-1$ までの情報で確定する．

例 4.1.4. Stieltjes積分では $\int_0^T f_t df_t = \frac{1}{2}(f_t^2 - f_0^2)$ だが，伊藤積分では

$$\int_0^T W_t dW_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} W_{2^{-n}(k-1)T} \left(W_{2^{-n}kT} - W_{2^{-n}(k-1)T}\right)$$

ポイントは差分の因子で注目する小区間の左端での値 $W_{2^{-n}(k-1)T}$ が用いられること．Stieltjes積分ではどこでとってもかまわないが確率積分では値が変わる．

右辺を変形して，

$$\begin{aligned}
&\int_0^T W_t dW_t \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2}(W_{2^{-n}kT} + W_{2^{-n}(k-1)T})(W_{2^{-n}kT} - W_{2^{-n}(k-1)T}) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2}(W_{2^{-n}kT} - W_{2^{-n}(k-1)T})(W_{2^{-n}kT} - W_{2^{-n}(k-1)T}) \\
&= \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T.
\end{aligned}$$

（第2項はquadratic vaiationに収束する式だから.）

命題 4.1.5. K を有界変動関数とするとき，$X_t = X_0 + \int_0^t H_u dW_u + \int_0^t K_u du$ という形に書ける確率過程の2次変分 $\langle X \rangle_t$ は $\int_0^t H_u^2 du$ となる.（有界変動関数の2次変分は0になる.）

定義 4.1.6. X_t は直前の命題のような確率過程とする．Predictableな確率過程 L が，

$\int_0^t L_u^2 H_u^2 du < \infty$, a.s., $(\forall t)$, および $\int_0^t |L_u K_u| du < \infty$, a.s., $(\forall t)$,

を満たすとき，

$$\int_0^t L_u dX_u := \int_0^t L_u H_u dW_u + \int_0^t L_u K_u du$$

と定義する．命題より，$\left\langle \int L dX \right\rangle_t = \int_0^t L_u^2 H_u^2$ であるが，このことから

$$\left\langle \int L dX \right\rangle_t = \int_0^t L_u^2 d \langle X \rangle_u$$

となる.

伊藤の公式． BS モデルを調べるにはもう一つツールがいる．幾何ブラウン運動は指数関数とブラウン運動の合成になっているので，置換積分の確率過程版が必要になる．

X_t が t についての C^1 級関数で $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数ならば $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)dX_u$ だが，これが次のように変わる．

定理 4.1.7.

(i) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^2 級のとき，

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_u)dW_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_u)du,\ a.s.$$

拡張として，命題 4.1.5 の形の確率過程 X に対して，

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)dX_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_u)d\langle X\rangle_u$$

が成り立つ．

(ii) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が C^2 級のとき，

$$f(W_t,t) = f(W_0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(W_u,u)dW_u + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(W_u,u)du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(W_u,u)du$$

覚え方：

$$\Delta f(W_t) = f(W_t)\Delta W_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(\Delta W_t)^2 + o(\Delta W_t)^2$$

において $(\Delta W_t)^2 = \Delta t$ と思うと式を覚えられる．

一般に $(dW_t)^2$ は dt とおき，$dW_t dt$, $(dt)^2$ は 0 とおく．

例 4.1.4 再訪． $f(x) = x^2$ に W_t を代入すると，$W_t^2 = W_0^2 + 2\int_0^t W_u dW_u + t$.

これは例 4.1.4 の結果と等しい．(実際は，例 4.1.4 でやったようなことをまずやって，その拡張として伊藤の公式が導かれる，という順序なので，伊藤の公式を使って例 4.1.4 を証明した，という意味ではない．)

例 4.1.8. $f(x,t) = S_0 e^{\sigma x + \mu t}$ とおく．BS モデルの株価過程は $f(W_t,t)$ となる．$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \mu f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f$, なので，伊藤の公式から

$$\begin{aligned} S_t &= S0 + \sigma\int_0^t S_u dW_u + \mu\int_0^t S_u du + \frac{1}{2}\sigma^2\int_0^t S_u du \\ &= S_0 + \sigma\int_0^t S_u dW_u + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\int_0^t S_u du \end{aligned}$$

また，$X_t = \sigma W_t + \mu t$, $f(x) = S_0 e^x$ として，伊藤の公式を適用しても結果は一致する．

注．

(i) 伊藤の公式を short-hand で

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

および

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t$$

とも記す（微分形）．あくまで記号上の簡略形で，意味は積分．

(ii) 例 4.1.8 の結果の微分形は $dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt$.

このとき,「$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$ は
$dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt,$
$S_0 = S_0,$
という確率微分方程式 (SDE) を満たす」という.（微分方程式と呼ぶが，実体は積分方程式.）解には弱解，強解などの概念もある．

なお,
$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt,$
$S_0 = S_0,$
の解は，$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$ である．
（オプションの価格には μ が入らないので，価格評価だけなら，どちらを BS モデルと呼んでも問題は起きない.）

(iii) 離散伊藤公式．$Z = (Z_t)_{t=0,1,2,\cdots}$ を 1 次元単純ランダムウォークとするとき，$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ に対して

$$f(Z_{t+1}) - f(Z_t) = \frac{1}{2}(f(Z_t+1) - f(Z_t-1))(Z_{t+1} - Z_t) + \frac{1}{2}(f(Z_t+1) - 2f(Z_t) + f(X_t-1))$$

が成り立つ．

この公式を初めて知ったとき，強い衝撃を受けた．それまで伊藤の公式の本質は連続過程特有（ブラウン運動がギザギザしていることに由来）と思っていたので．もう一点，3 項モデルだとこのようにはまとまらない.（Z_{t+1} の入り方を上記のように限定すると，± 1 にジャンプする場合しかできない.）

4.2 Self–financing strategy.

金曜日

Self–financing （自己充足的，資金自己調達的）：(途中の期間で）ポートフォリオを組み替えるが，その前後で合計価値は変わらないことを仮定する.（多期間 2 項モデルの議論において暗に仮定していた.）

つまり，複製の元手 x 円，$t-1$ から t までの期間の株式保有量 ϕ_t および安全債券保有量 ψ_t（$t = 1, 2, \cdots$），と記すとき，$t \geqq 1$ に対して

$$\phi_t S_t + \psi_t B_t = \phi_{t+1} S_t + \psi_{t+1} B_t\,, \quad a.s., \qquad (1)$$

$t=0$ に対して $x=\phi_1 S_0+\psi_1 B_0$，が成り立つ．この性質を(x,ϕ,ψ) **は self–financing である**，という.（動詞の finance は，出資の際のお金をどこから引っ張ってくるか等を問題にするときに使う単語.）

また $V_t=\phi_t S_t+\psi_t B_t$ $(t\geqq 1)$, $V_0=x$, とおくと (1) は次と同値になる：$t\geqq 1$ に対して

$$\Delta V_t := V_t - V_{t-1} = \phi_t \Delta S_t + \psi_t \Delta B_t. \tag{2}$$

(2) のほうが連続時間に直しやすい.

以上を念頭に置いて，連続時間の設定で $x\in\mathbb{R}$, 可予測過程 $\phi=(\phi_t)_{t\in(0,T]}$，可予測過程 $\psi=(\psi_t)_{t\in(0,T]}$，の３つ組 (x,ϕ,ψ) が self-financing であるとは

$$V_t = V_0 + \int_0^t \phi_u dS_u + \int_0^t \psi_u dB_u\,,\ \ \forall t,\ \ a.s.$$

となることを言う．ここで $V_t=\phi_t S_t+\psi_t B_t$, $t>0$, および $V_0=x$.

（微分形で書くときは，$dV_t=\phi_t dS_t+\psi_t dB_t$.）

4.3　Black–Sholes の偏微分方程式（BS 式の導出その２）.

数学では Black–Scholes を BS と略して誤解は少ないだろうが，会計では BS はバランスシートを意味するので略記しない方がよい.

BS モデル．　　株 $S_t=S_0 e^{\sigma W_t+\mu t}$，安全債券 $B_t=e^{rt}$

$dS_t=\sigma S_t dW_t+(\mu+\dfrac{1}{2}\sigma^2)S_t dt$

$d\langle S\rangle_t=\sigma^2 S_t^2 dt$

$dB_t=rB_t dt$

時刻 t におけるコールの価値 C_t が $C(S_t,t)$ の形に書けると予想して話を進める.

$C:\ (0,\infty)\times[0,T]\to\mathbb{R}$

Self-financing strategy (x,ϕ,ψ) でコールオプションを複製したい．つまり $V_t=C(S_t,t)$ となるようにしたい.

$$\begin{aligned} dC(S_t,t) &= \frac{\partial C}{\partial S}dS_t + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}d\langle S\rangle_t \\ &= \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}dW_t + ((\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)S_t\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})dt \end{aligned}$$

一方

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t = \sigma S_t \phi_t dW_t + ((\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)S_t\phi_t + rB_t\psi_t)dt$$

これから，$\phi_t=\dfrac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)$　　　　(*)

目標である $V_t=C_t$ にも注意すると，

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t,t) + rS_t\frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t) - rC(S_t,t) = 0,\ \ \forall t,\ \ a.s.,$$

となればよく，さらに $\forall t>0$ に対して S_t はどんな正の値も取り得るので deterministic な方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(S,t) - rC(S,t) = 0,$$

が満たされていればよい.

BS 式は，この PDE と境界条件 $C(S,T)=(S-K)^+$ を満たす.

注．

(i) ヨーロピアンプットの価格 $P_t = P(S_t, t)$ も同じ PDE （境界条件 $P(S,t) = (K-S)^+$ を満たす．さらに，コール，プットに限らず，デリバティブの満期価値（**ペイオフ**）が満期株価のみに依存するようなものは，全て BS の PDE を満たす．

(ii) (*) と §3.2 の議論から，$\phi_t = \dfrac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) = \Phi(d_+)$ となる．つまり，BS の公式は複製ポートフォリオの作り方まで示している．

(iii) μ が PDE から消えていることに注意．

Q．PDE の境界条件は？
A．あるが良く知らない．PDE の専門家は満期条件以外に条件を置くのは事実．
Q．$S=e^x$で書けば定数係数で基本解で書けるのになぜSのままで書くのか？
A．わからない．
Q．初期条件はL^2ではない．
A．プットなら有界なのでプットが考えやすい．
（連続かつ有界な関数にほうり込んだときは弱収束するのでプットで計算する．
今まで計算するときはプットを先に計算していたのはそのため．）

5　マルチンゲールを用いた価格計算（BS 式の導出その３）．

この節はお話．

簡単のため，金利はゼロとする．２項モデルで，確率を取り替えた．BS モデルでは，これはドリフトを変えることに対応する．$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$ において，$\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$ （ただし，$\lambda = \dfrac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$）は元の確率 P の下ではドリフト付きブラウン運動だが，この $\tilde{W}$ がドリフト無しのブラウン運動になるような確率 Q が存在する．実際，$\dfrac{dQ}{dP} = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ と置けばよい（Grisanov–丸山の定理）．すると，

$S_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$.　　(1)

このとき，$\forall t \geqq 0$ に対して $\mathrm{E}_Q[\, S_t \,] = S_0 \mathrm{E}_Q[\, e^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \,] = S_0$．さらに，各 $0 \leqq u \leqq t$ に対して $\mathrm{E}_Q[\, S_t \mid \mathcal{F}_u \,] = S_u$ も言える．このことを，**確率過程 S_t は（確率 Q の下で）マルチンゲールである**という．

(1) の右辺に伊藤の公式を適用して

$dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t$　　(2)

が得られる．一方，ブラウン運動のマルチンゲール表現定理から

$$(S_T - K)^+ = \mathrm{E}_Q[\, (S_T - K)^+ \,] + \int_0^T H_t d\tilde{W}_t$$

となるような可予測過程 H が存在することが知られているので，(2) と合わせると

$$(S_T - K)^+ = \mathrm{E}_Q[\, (S_T - K)^+ \,] + \int_0^T \frac{H_t}{\sigma S_t} dS_t$$

となる．この結果は複製を表していて，その元手は $\mathrm{E}_Q[\, (S_T - K)^+ \,]$ となる．

注．

(i) コールやプットに限らず（経路依存型でもよい）オプションの無裁定価格はリスク中立確率（同値マルチンゲール確率）の下でペイオフの（割引）期待値をとればよい．マルチンゲール表現定理を使っただけでは，H は存在しか言えない．価格は分かるが，実際の戦略は分からないということになる．必要なときは PDE を使って係数を求める．
ノックアウトオプションではいろんな K に対して価格が必要になるので，S と $\min S$ の同時分布が必要になる．そういうときは吸収壁ブラウン運動の議論を使う．
アジアンオプションの価格はあらわな表現が得られていない.（幾何平均ならふつうのとさほど変わらないのに.）

(ii) その 2 の方法の結果とその 3 の方法の結果が一致することは数学的には Feynman–Kac の公式で証明される．

6 Black–Scholes モデル以外のモデル．

BS モデルは，ボラティリティが定数で，$\log S_T$ が正規分布に従う，と仮定している．実際のデータは，ボラティリティが変動し，正規分布よりも左裾が厚くて右裾が薄いことが多いと言われている．為替レートについては両裾が重いことが多い.（理由はよく分かっていない.）株式の implied volatility は行使価格の減少下に凸関数になっている．為替レートの場合は下に凸で間に谷底がある (volatility smile).

様々なモデル．

(i) ジャンプ拡散モデル（Levy 過程の jump を株価過程として理解する）．大きなジャンプ (Merton 1973) は恐慌のモデル．これに対して今ではミクロな 1 回ごとの取引単位で記録が全部分かりうる (tick data)．これをそのままジャンプのある確率過程としてモデル化する．
ジャンプが入るとリスク中立確率が一意でない.（無裁定以外の理屈を持ってこないと決まらない.）パラメータ推定が難しい．

(ii)(a) CEV モデル (constant elasticity of variance 定弾性係数)．Cox (1975).
$dS_t = \sigma S_t^\alpha dW_t + \mu S_t dt$
$\alpha < 1$ ならば，$\log S_T$ は左裾より右裾より厚くなる．
非心カイ 2 乗分布．リスク中立確率は一意.

(b) Volatility を別の SDE で記述する．例えば
$dS_t = \sigma_t S_t dW_t + \mu S_t dt$
$d \log \sigma_t = K(c - \log \sigma_t)dt + \theta d\tilde{W}_t$
（$\tilde{W}$ は W と独立なブラウン運動）.
オルンスタイン・ウーレンベック過程．ドリフトがある値 c に近づく方向に働く．リスク中立確率は一意ではない．

(c) 高岡さんの考えたモデル.
$$S_t = S_0 e^{rt} \int_0^\infty e^{\sigma(W_t + ct) - \frac{1}{2}\sigma^2 t} d\nu(\sigma)$$
$$B_t = e^{rt}$$

（ν は $(0,\infty)$ 上の確率測度.）
ν が単位分布なら BS モデルに戻る.
P の下でもリスク中立確率 Q の下でも Markov.（なぜなら，S_t は W_t と t で決まって，増加関数なので，S_t から W_t が決まることから，マルコフ性がある.）
リスク中立確率（$\tilde{W}_t = W_t + ct$ をブラウン運動にするような Q のこと）が一意に定まる.
右裾が左裾よりも厚くなる（これは現実には合ってないのが残念）.
このモデルに基づけば，オプションの価格は BS 式の積分で書ける.
理由：このモデルを $S_T = f(W_T)$ と書くと，$S_T > K$ と $W_T > f^{-1}(K)$ と同値で，さらに $e^{\sigma(W_t+CT)-\frac{1}{2}\sigma^2 T} > k(\sigma)$ と同値（となるように k を定義）すると，
$(S_T - K)^+ = S_0 e^{rt} \int_0^\infty (e^{\sigma(W_t+CT)-\frac{1}{2}\sigma^2 T} - k(\sigma))^+ d\nu(\sigma)$
となって，BS の積分になっている.

注.　おおざっぱに言って

- リスク中立確率が存在することと，株式と安全債券のみの取引では arbitrage を出せないことが同値. **（数理ファイナンスの第１基本定理.）**
- リスク中立確率が一意であることと，マルチンゲール表現性を持つことと,（可積分な）確率変数は全て複製可能であることが同値. **（数理ファイナンスの第２基本定理.）**

終わりに.

ファイナンスは海外で進んでいて，日本に導入されたのは遅れた．現在の水準はどうか?

- デリバティブの価格計算はもう負けていない.
- 商品開発は遅れている．その時々で売れ筋の確率変数が変わるが，それを見つける力が劣っている.
- 決定的に劣っているのは，信用リスクのデータの蓄積がない点.（日本で企業倒産が explicit に認識されたのはここ数年のこと．コンピュータ化するとき古い手書きデータを破棄した例があるらしい.）Black–Scholes の原論文は表題からも明らかに，企業の信用と社債価格の関係が議論されている．つまり，海外では信用リスクのほうがオプションの価格付けよりもむしろ古くから重視されていた.
- 株価は皆が上がると思えば本当に上がる点で他の賭け事と全く違う．皆が「起こりそうだ」と思うようなシナリオを打ち出せば本当に実現する.

  例：ＩＴバブル．外国はＩＴ銘柄をずっと前から仕込んでおいて，後から徐々にシナリオを打ち出して，売り抜いて大もうけした.

  皆がついてこなければいけないのでリスクは大きいが，**顔の見えない大向こうに受けるシナリオを打ち出せるかどうかが大事**．日本はこれからやっていかないといけない.