非局所項を持つ１階準線形偏微分方程式の解の独立増分でない点過程による表現

服部哲弥（慶應大・経済）

2014.12. 確率論シンポジウム

START

直前の到着時刻に依存する強度を持つ確率過程

ポワッソン過程の「一般化」

$N: \ \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{Z}_+$;

$N(0)=0$，**サンプル毎に t について非減少右連続**

到着時刻 $\tau_k = \inf\{t \geqq 0 \mid N(t) \geqq k\},\ k=1,2,\ldots,\ \tau_0=0$

$\{\tau_k \leqq t\} \in \mathcal{F}_t := \sigma[N(s),\ s \leqq t]$ **ここまでポワッソン過程と同じだが，**

$\underline{w}: \ \{(s,t) \in [0,\infty) \mid s \leqq t\} \to [0,\infty)$，**連続（強度関数）**

$$\mathrm{P}[\,t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\,] = \exp(-\int_{\tau_{k-1}}^{t} \underline{w}(\tau_{k-1},u)\,du\,) \ \text{on} \ t \geqq \tau_{k-1}$$

cf. **非一様ポワッソン** $\mathrm{P}[\,t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\,] = \exp(-\int_{\tau_{k-1}}^{t} \underline{\tilde{w}}(u)\,du\,) \ \text{on} \ t \geqq \tau_{k-1}$

今日の話の１行要約：

1＋1 次元→公式書ける，　　非独立増分→初等的だが複雑

基本公式

要約：公式は作れる（具体形で証明できる）が，複雑になる（ので驚く）

$$\Omega(s,t) = \int_s^t \underline{w}(s,u)\,du,\ (Af)(t) = \int_t^\infty f(u)\underline{w}(t,u)e^{-\Omega(t,u)}du$$

とおくと， 部分積分によって

$$\mathsf{E}[\, f(\tau_k) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\,] = \int_{\tau_{k-1}}^\infty f'(t)\mathsf{P}[\, t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\,]dt + f(\tau_{k-1}) = (Af)(\tau_{k-1})$$

ゆえに， $\mathsf{E}[\, f(\tau_k)\,] = (A^k f)(0)$．

$\{N(t) = k\} = \{\tau_k \leqq t < \tau_{k+1}\}$ **で** $N(t)$ **の確率も計算可能．**

例． $t > s \geqq 0$．$\mathsf{P}[\, N(t) = N(s) = 0\,] = e^{-\Omega(0,t)}$ **（ポワッソン過程に同じ）**

独立増分ではないので $k > 0$ は複雑： $\mathsf{P}[\, N(t) = N(s) = k\,]$

$$= \int_{0\leqq u_1\leqq\cdots\leqq u_k\leqq s} e^{-\Omega(u_k,t)} \prod_{i=1}^k \left(\underline{w}(u_{i-1},u_i)e^{-\Omega(u_{i-1},u_i)}du_i\right)$$

例． $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathsf{P}[\, N(t) = N(s) = k\,] = -\displaystyle\int_0^s \underline{w}(u,t)\frac{\partial}{\partial u}\mathsf{P}[\, N(t) = N(u) = k\,]\,du$

ポワッソン過程との関係

$\underline{w}(s,t) = \underline{\tilde{w}}(t)$ のとき，

$$\int_{0\leqq u_1\leqq u_2\leqq\cdots\leqq u_k\leqq s} \prod_{i=1}^{k} f(u_i)du_1\,du_2\ldots du_k = \frac{1}{k!}\left(\int_0^s f(v)dv\right)^k$$

よって

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}[\ N(t) = N(s)\ ] \\
&= \left(1 + \sum_{k\geqq 1}\int_{0\leqq u_1\leqq u_2\leqq\cdots\leqq u_k\leqq s} \prod_{i=1}^{k} \underline{\tilde{w}}(u_i)\ \prod_{i=1}^{k} du_i\right) e^{-\Omega(0,t)} \\
&= \left(1 + \sum_{k\geqq 1}\frac{1}{k!}\Omega(0,s)^k\right) e^{-\Omega(0,t)} \\
&= e^{\Omega(0,s)} \times e^{-\Omega(0,t)} = e^{-\Omega(s,t)}
\end{aligned}$$

（ポワッソン過程の独立増分性）

1 階準線形偏微分方程式と特性曲線

復習：

$\dot{U}(y,t)+a(U(y,t))\,U'(y,t)=b(U(y,t))$（1 階準線形 PDE）

変数消去のため $y=y_C(\gamma,t)$ **を代入，** $\varphi(t)=U(y_C(\gamma,t),t)$

$\dot{y}_C(\gamma,t)=a(\varphi(\gamma,t))$ （**特性曲線の方法**）

$\dot{\varphi}(\gamma,t)=b(\varphi(\gamma,t))$ （ODE＋**初期値** γ）

方程式系も可能（主部が共通ならば）

$$\dot{y}_C(\gamma,t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(\varphi_i(\gamma,t))$$

$$\dot{\varphi}_i(\gamma,t)=b_i(\varphi_i(\gamma,t))$$

（N$\to\infty$ **を考え，最終的に定理では，測度値の方程式を考える）**

skip

拡張した関数方程式

問．非局所項（‘$a(\int U(z,t)dz)$’）＋ 特性曲線の方法が有効　？

答．(φ, y_C) で書いたとき t と初期値の「PDE」は可能．簡単な例：

$$\dot{U}(y,t) - \int_y^1 w(z,t)\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)dz\, U'(y,t) = \int_y^1 w(z,t)\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)dz$$

・$U(y,t)$ を経由しない y,t 依存性 $(w(y,t))$ 可（無いと，積分項にならない）

特性曲線の方法：

$$(*)\ \dot{\varphi}(\gamma,t) = \int_{y_C(\gamma,t)}^1 w(z,t)\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)dz$$

（A.Bressan，broad 解）

以下 (φ, y_C) の方程式 $(*)$ で考える

cf. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}[\,N(t)=N(s)=k\,] = -\int_0^s \underline{w}(u,t)\,\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{P}[\,N(t)=N(u)=k\,]\,du$

典型例

冒頭の確率過程が非自明に使える程度に**複雑**なケースの中で
簡単な例を考える：

$$(*)\ \dot{\varphi}(\gamma,t)=\int_{y_C(\gamma,t)}^{1} w(z,t)\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)dz$$ （非局所項を含む：再掲）

- $(**)\ y_C = 1-\varphi$

← $y=1-U(y,t)$ ← $a=-b$（密度一定の流体＝蒸発だけで動く）

- 流体の総量を保存する**境界条件**（次頁）

- （無限成分）方程式系で，関数 w の集合 W 上の**測度値**未知関数（後述）

$$U_i(y,t)=U(w_i,y,t),\ \sum_{i=1}^{N}\to\lambda(dw);\ \int_W \|w\|\,\lambda(dw)<\infty$$ （こだわり）

定常解を持ちうる境界条件

- $(y,t) \in [0,1] \times [0,T]$ で考える

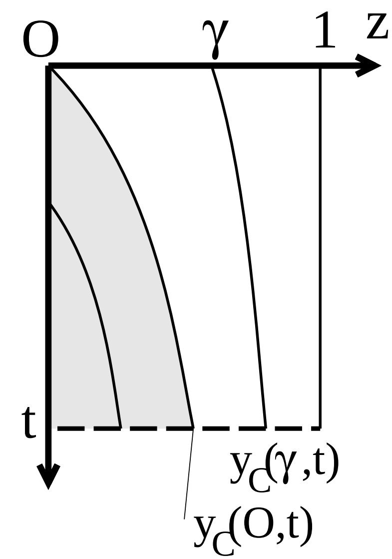
（初期値境界値問題）

$w \geqq 0$ →領域 $y \geqq y_C(O,t)$ は初期値で決まる

（Bressan，domain of determinancy）

$y < y_C(O,t)$ は境界値で決まる：$U(0,t) = 1$

（w が t によならければ**定常解を持つ境界値**）



非有界係数関数を持つ無限成分系

・$w \geqq 0$ とすると，yについて減少する非負値解→分布

wで成分をparametrizeして，$U(dw, y, t) = \mu_t(dw \times [y, 1))$

$W \subset C^1([0,1] \times [0,T])$

$\|w\|_{\mathsf{T}} = \sup_{(y,t)} |w(y,t)|$; $C^1 \subset C^0$, 分布 $(W, \mathcal{B}(W), \lambda)$

$$M_W := \int_W \|w\|_{\mathsf{T}} \, \lambda(dw) < \infty,$$

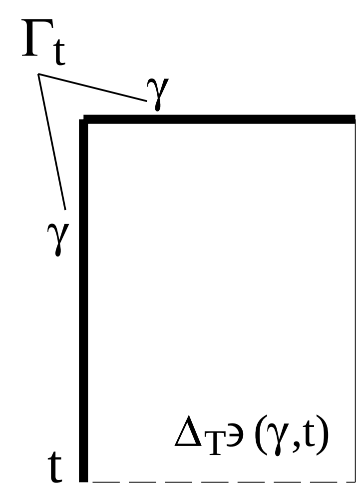
非有界な係数関数wを許す

$$C_W := \sup_w \|w'\|_{\mathsf{T}} < \infty$$

初期点境界点$\Gamma_t = \{(z, 0)\} \cup \{(0, s) \mid s \leqq t\}$,

初期分布$\mu_0(dw \times dz) \ll \lambda(dw) \times dz$

(*) を解く (broad 解) 領域：$\Delta_T = \{(\gamma, t) \mid \gamma \in \Gamma_t\}$



偏微分方程式の初期値境界値問題

定理1． $y_C((y_0,t_0),t_0) = y_0$， $(y_0,t_0) \in \Gamma_T$，
$\mu_t(dw \times [0,1)) = \lambda(dw), \quad t \in [0,T]$ （総量保存境界条件），
$\mu_t(W \times [y,1)) = 1 - y, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad (y_C = 1 - \varphi(W))$,

$$\mu_t(dw \times [y_C(\gamma,t),1)) = \mu_{t_0}(dw \times [y_0,1)) - \int_{s=t_0}^{t} \int_{z=y_C(\gamma,s)}^{1} w(z,s)\mu_s(dw \times dz)\,ds, \ \gamma = (y_0,t_0), \ (\gamma,t) \in \Delta_T\,,$$

を満たす，Lipschitz 連続な (y_C, μ_t) がただ一つ存在する． ◇

Lipschitz 連続な broad 解：Bressan，Lipschitz 解．

bdd. m'ble h に対して $\displaystyle\int_W h(w)\,\mu_t(dw \times [y,1))$ が Lipschitz

確率過程 N による解の構成

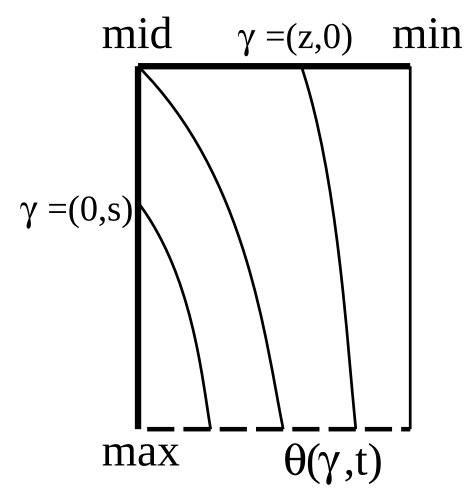
Γ_T の順序：$(0,T) \succeq O = (0,0) \succeq (1,0)$

$\Theta_T := \{\theta :\ \Delta_T \to [0,1] \mid \theta((z,s),s) = z,\ \ (z,s) \in \Gamma_T,$

連続，γ について非増加全射，t について非減少$\}$

$\varphi_\theta :\ \Delta_T \to \{W$ 上の測度$\}$ を，$\gamma = (z,s)$ について

$$\varphi_\theta(dw,\gamma,t) = \int_{x\in[z,1)} \mathrm{P}[\ N_{\theta,w,x}(t) = N_{\theta,w,x}(s)\ ]\,\mu_0(dw \times dx)$$



$N_{\theta,w,z}$ は，講演冒頭の N で強度 $\underline{w}$ が

$$\underline{w}_{\theta,w,z}(s,t) = \begin{cases} w(\theta((z,0),t),t), & \text{if} \quad s = 0, \\ w(\theta((0,s),t),t), & \text{if} \quad s > 0. \end{cases}$$

解の存在

$G: \ \Theta_T \to \Theta_T$ を $G(\theta)(\gamma, t) = 1 - \varphi_\theta(W, \gamma, t)$.

再掲：$\mu_t(W \times [y, 1)) = 1 - y$ $(y_C = 1 - \varphi(W))$.

$y_C(\gamma, t) = 1 - \varphi_{y_C}(W, \gamma, t) = G(y_C)(\gamma, t)$ が必要．

定理２．• $y_C = \lim_{n\to\infty} G^n(\theta) \in \Theta_T$ が存在し $\theta \in \Theta_T$ によらない．

• μ_t は $\mu_t(dw \times [y_C(\gamma, t), 1)) = \varphi_{y_C}(dw, \gamma, t)$ で決まる． $\diamond$

再掲：

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathsf{P}[\, N(t) = N(s) = k \,] = -\displaystyle\int_0^s \underline{w}(u, t)\, \frac{\partial}{\partial u}\mathsf{P}[\, N(t) = N(u) = k \,]\, du$
- $\dot{\varphi}(\gamma, t) = \displaystyle\int_{y_C(\gamma,t)}^1 w(z, t)\frac{\partial U}{\partial z}(z, t) dz$
- $\underline{w}_{\theta,w,z}(s, t) = \begin{cases} w(\theta((z, 0), t), t), & \text{if} \quad s = 0, \\ w(\theta((0, s), t), t), & \text{if} \quad s > 0. \end{cases}$

解の一意性

補題． $\mu_t(dw \times [y_C(\gamma,t),1)) = e^{-\tilde{\Omega}_w(t_0,t)}\mu_{t_0}(dw \times [y_0,1))$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{-\tilde{\Omega}_w(s,t)} \int_{[y_C(\gamma,s),1)} \frac{\partial w}{\partial z}(x,s)\mu_s(dw \times [y_C(\gamma,s),x))\,dx\,ds$$

where $\tilde{\Omega}_w(s,t) = \displaystyle\int_s^t w(1,u)\,du.$ ◇

w に y 依存性がないとき等式になる評価しか許されない．

Gronwall **の不等式型の議論で** $\displaystyle\int_W h(w)\mu_t(dw \times [y,1))$ **をナイーブに評価すると**

$\displaystyle\int_W e^{\|w\|_\top}\lambda(dw) = \infty$ **で破綻．**

（→解の存在の議論も含めて，解の具体形が事実上必要）

確率順位付け模型の流体力学的極限

確率順位付け模型：Amazon ランキングの動き，など

強度 w の y 依存性

← 順位によって売れ行きが変わる可能性（上位注目効果）

Hattori–Kusuoka, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. (2012)
w の y 依存性込みの確率順位付け模型唯一の先行結果

(W,λ): $\|w\|_{\top} \leqq C$ **（有界）**
Iteration **で解の存在を証明したので事実上** exact **な解に行き着くが，**
flow Θ_T **や** process $N_{\theta,w,z}$ **を導入する必要がなかった．**

自然な仮定 $\displaystyle\int_W \|w\|_{\top}\,\lambda(dw) < \infty$ **まで緩める計画の中で必要になった．**

未解決１：リプシッツ条件？

N がポワッソン過程のとき（再掲）

$\mathsf{P}[\,N(t)=N(s)\,]=e^{\Omega(0,s)}\times e^{-\Omega(0,t)}=e^{-\Omega(s,t)}$

強度 w の大きさは $\displaystyle\int_W \|w\|_{\mathsf{T}}\,\lambda(dw)\ <\ \infty$ しか仮定しないので，位置依存性の摂動 $e^{\nabla\,\Omega}$ が可積分のためには w に対する global Lipschitz 条件はほぼぎりぎりだろう

問．Lipschitz 条件を外せば解の唯一存在の反例はあるか？

例（「不安定な初期値」）： $W=\{w_\alpha^*\};\ w_\alpha^*(y,t)=\begin{cases}0, & y\leqq 1-\frac{1}{\alpha+1},\\ 1, & y\geqq 1-\frac{1}{\alpha+2},\\ C^1, & \text{（内挿）．}\end{cases}$

$$\frac{1}{\lambda(\{w_\alpha\})}=\alpha(\alpha+1)=:\sigma_\alpha\qquad \frac{\mu_0(dw\times dz)}{\lambda(dw)\times dz}=\begin{cases}\sigma_\alpha, & y\in[1-\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha+1}],\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$y_C((y_0,t_0),t)=y_0$（静止状態）は解だが，それ以外の解はないと言えるか？

（続）リプシッツ条件？

・初期値問題に対する一意性のほうが存在よりも際どい．

定理３．定理１で，$C_W := \sup_w \|w'\|_T < \infty$ を

$C_W := \sup_w sup_{(y,t),(y',t')} |w(y,t) - w(y',t')| < \infty$ に置き換えても

G の固定点の存在は言える． $\diamond$

証明．Schauder の固定点定理

未解決２：定常状態？

問．$\dot{w} = 0$ のとき $\dot{U} = 0$ なる解を与える初期値は本当にあるか？

λ の台が定数関数 $(\sim \mathbb{R})$ に集中しているとき**解あり**

$$-\left(\int_W w\,U(dw,y,0)\right) U'(dw,y,0) = w\,U(dw,y,0)$$

$$\to U(dw,y,0) = e^{-w\,\phi^{-1}(1-y)}\lambda(dw); \qquad \phi(\xi) = \int_W e^{-w\,\xi}\lambda(dw)$$

問．一般の $w(y)$ では？

$$\left(\int_{W\times[y,1)} w(z)\sigma(w,z)\lambda(dw)\,dz\right)\sigma(w,y) = \int_y^1 w(z)\,\sigma(w,z)\,dz$$

$$U(dw,y,0) = \lambda(dw)\int_y^1 \sigma(w,z)\,dz$$

未解決３：特性曲線で解けるクラス？

$\dot{U}+a\,U'=b$　→特性曲線の方法：$\dot{y}_C=a,\ \dot{\varphi}=b$

後者が線形 PDE に収まる b：$\dot{\varphi}(dw,\gamma,t)=\displaystyle\int_{y_C(\gamma,t)}^{1} w(z,t)\frac{\partial U}{\partial z}(dw,z,t)dz$

$$(*)\quad \varphi(dw,(z,s),t)=\int_z^1 \mathrm{P}[\,N_{y_C,w,x}(t)=N_{y_C,w,x}(s)\,]\mu_0(dw\times dx)$$ は解

ここまで固定してもまだ a の一般化が可能：

$$\dot{y}_C(\gamma,t)=a(\dot{\varphi}(dw,\gamma,t),\varphi(dw,\gamma,t),y_C(\gamma,t),t)$$

φ の解を代入すれば，y_C についての方程式．

今日の話は，$\dot{y}(\gamma,t)=-\dot{\varphi}(W,\gamma,t)$ なので，

積分して (*) を代入すれば $y_C=G(y_C)$

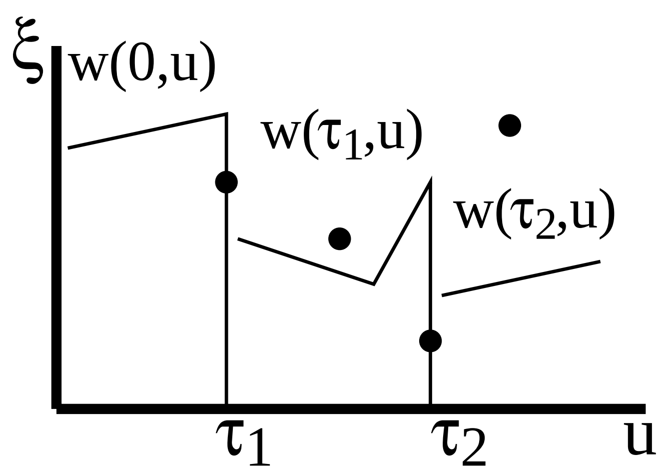
右辺が t についての微分になる a のクラスまでは一般化可能？

付録：直前の到着時刻に強度が依存する過程の構成

ν: $[0,\infty)^2$ 上の単位強度の Poisson random measure

（「$\nu = \sum_i \delta_{X_i}$」; $\nu(A)$ は A の面積が平均に等しいポワッソン分布）

$\tau_0 = 0$, and for $k = 1, 2, \ldots$, $\tau_k = \inf\{t \geqq 0 \mid$
$\nu(\{(\xi, u) \in [0,\infty)^2 \mid 0 \leqq \xi \leqq \underline{w}(\tau_{k-1}, u),\ \tau_{k-1} < u \leqq t\}) > 0\}$



$N(t) = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \tau_k \leqq t\}$, $t \geqq 0$

文献

T. Hattori, http://arxiv.org/abs/1409.5117 (2014).

T. Hattori, S. Kusuoka, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **9 (2)** (2012) 571–607.

服部哲弥,「Amazon **ランキングの謎を解く」, 化学同人,** 2011.5**.**

K. Hattori, T. Hattori, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009) 966–979.

Y. Hariya, K. Hattori, T. Hattori, Y. Nagahata, Y. Takeshima, T. Kobayashi, Tohoku Mathematical Journal **63–1** (2011) 77–111.

Y. Nagahata, Kodai Mathematical Journal **36 (3)** (2013) 397–408, ibid., 409–427.