

確率論的統計力学モデルの臨界現象と lace expansion *

原 隆 (九大数理, hara@math.kyushu-u.ac.jp)

ver.0.99, 2005.10.17

概要

統計力学的確率論モデル (self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals) の臨界現象と, その解析手段としての lace expansion についての review を行う. ただし, 細かいところにこだわりだすと収拾がつかなくなるので, 基本的な事実を羅列するにとどめ, 詳細は他の文献を引用する事とした. 講演の題材, 特にレース展開と平均場的な臨界現象の詳細については参考文献の [1, 2] をご覧下さい.

1 臨界現象の概要

確率論的統計力学モデルの臨界現象をまず, 概観しよう. 大筋としては古典強磁性スピン系の示す臨界現象に類似のものであるが, モデル毎に異なった臨界次元が示唆されるなど, モデルに固有の面白い側面が見られるので, いくつかのモデルを並行して考える.

1.1 格子のお約束

この講演では, d -次元正方格子: $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{Z}\}$. 上のモデルを考える. 格子の元 $x \in \mathbb{Z}^d$ は サイト, サイトのペアを ボンド というが, 特に以下の 2 通りのボンドの集合を考える:

- nearest-neighbour (n.n.) model: $b = (x, y)$ with $|x - y| = 1$.
- spread-out model: $b = (x, y)$ with $0 < |x - y| \leq L$ for some $L > 1$.

ボンドの集合を Ω で表すことにする¹.

1.2 Self-Avoiding Walk (SAW)

n -step の Self-Avoiding Walk (SAW) とは

- 順序づけられた $n + 1$ 個のサイトの集合 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n))$ で ($\omega(j) \in \mathbb{Z}^d$),
- 隣り合った点がボンドになっており: $(\omega(j), \omega(j+1)) \in \Omega$ ($0 \leq j < n$),
- 自分自身と交わらない (self-avoiding constraint) $\omega(i) \neq \omega(j)$ for $i \neq j$

ものである (基本文献は [2]). Walk のステップ数は $|\omega|$ で表す. 最後の条件が非常に重要であり, これがなければ普通のランダムウォークである.

*東北大学, 解析月曜セミナー, 2005 年 10 月 17 日.

¹この 2 通りのモデルを考える理由は以下の通り: 我々の解析手段 (lace expansion) が非力なため, spread-out model は完全に解析できるが n.n. model は解析できない場合が往々にして起こる. モデルとしては n.n. model の方がより「自然」である. 臨界現象に関する「常識」に従えば, 両者は同じ universality class に属すると思われるので, spread-out model に関する厳密な結果から, n.n. model に関する同様な結果の傍証を得ようと言うのである. もちろん, この両者が同じ universality class に属すること自身は証明されておらず, 以上の理屈はあくまで補助的なものであることは忘れてはならない

見たい量．我々が興味を持つのは，以下に代表されるような量である：

- x から y へ， n ステップで行く SAW の数： $c_n(x, y) := \#\{\omega \text{ は SAW} : x \rightarrow y, |\omega| = n, \}$,
- 原点から出発する n ステップ SAW の数： $c_n := \#\{\omega \text{ は SAW} : 0 \rightarrow \bullet, |\omega| = n\} = \sum_x c_n(0, x)$,
- 平均二乗距離 (mean square displacement: n ステップ SAW の端点同士が平均してどのくらい離れているか)： $\ell_n := \langle |\omega(n)|^2 \rangle_n^{1/2}$ ．ここで $\langle \dots \rangle_n$ は原点から出発するすべての n ステップ SAW 全体についての期待値を表す (各 SAW には同じ重みを与えて) ．

また，これらの母関数に相当する量として，以下も考える (これらは $0 \leq p < p_c := 1/\mu$ で定義される． μ は以下で定義される量で，これが無限大ではないこともすぐに示す)：

- x から y への 2 点関数： $G_p(x, y) := G_p(y - x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, y) p^n = \sum_{\omega: x \rightarrow y} p^{|\omega|}$,
- 帯磁率 (命名はスピン系との対応に由来)： $\chi_p := \sum_{n \geq 0} c_n p^n = \sum_{\omega: 0 \rightarrow \bullet} p^{|\omega|} = \sum_x G_p(0, x)$,
- 相関距離： $\xi_p := -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log G_p(0, n e_1)}$ (e_1 は 1 軸方向の単位ベクトル) ．もちろん，これは $G_p(0, x) \approx e^{-|x|/\xi_p}$ となるような距離 ξ_p を定義したのである ．

Subadditivity と Connective Constant の存在． $m + n$ ステップの SAW を n ステップのところと m ステップの SAW と n ステップの SAW と m ステップの SAW になるが， n ステップの SAW と m ステップの SAW をつないでも $m + n$ ステップの SAW になるとは限らない (互いに交わるかもしれない) ．従って $c_{m+n} \leq c_m c_n$ が成り立ち，この \log をとると， $\log c_n$ が subadditive な数列になっていることがわかる ．簡単に $d^n \leq c_n \leq (2d)^n$ がわかるので，subadditive な数列の一般論から $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)^{1/n} = \mu$ なる定数 μ が存在することがわかる (この μ を *connective constant* という) ．これまでの議論から $d \leq \mu \leq 2d$ である ．

臨界現象に関する予想 ．統計力学における古典スピンモデルなどと同じく，これらの量の臨界現象については以下のような予想が (60 年代後半頃から) あった ．

- 臨界指数 γ, ν, η, \dots が存在して²

$$c_n \sim A \mu^n n^{\gamma-1}, \quad (\ell_n)^2 \sim D n^{2\nu}, \quad (n \nearrow \infty) \quad (1.1)$$

$$\chi_p \approx (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \xi_p \approx (p_c - p)^{-\nu}, \quad (p \nearrow p_c) \quad (1.2)$$

$$G_{p_c}(0, x) \approx |x|^{-(d-2+\eta)} \quad (|x| \nearrow \infty) \quad (1.3)$$

となる ．もちろん，(1.1) がわかれば (1.2) はすぐに出る ．(1.2) から (1.1) は Tauberian の問題 ．

- 臨界指数は *universal* である (モデルの詳細によらない：今の場合なら n.n. model でも spread-out model でも同じ値になる) ． μ, A, D は，もちろん universal ではない ．
- 臨界指数は $(2 - \eta)\nu = \gamma$ のような スケーリング則 を満たす ．
- 上方臨界次元 d_c があり， d_c より高次元では臨界指数は「簡単な値」(平均場の値)になる ．
- 臨界指数の予想値は，例えば γ なら，4 次元以上で 1，3 次元で 1.162，2 次元で $\frac{43}{32}$ ．

以上の「予想」はどのくらい厳密に証明されているのかについては以下の定理がある³ ．まず，高次元では「平均場の」臨界指数が見られることについて：

定理 1.1 ([3, 4, 5, 6, 7, 8]) 5 次元以上の n.n. SAW と spread-out SAW では， $\gamma = 1, \nu = 1/2, \eta = 0$ である ．より詳しくいうと，次元やモデルによる定数 A, D, K が存在して，

$$c_n \sim A \mu^n, \quad (\ell_n)^2 \sim D n \quad (n \uparrow \infty) \quad (1.4)$$

$$G_{p_c}(0, x) \sim \frac{K}{|x|^{d-2}} \quad (|x| \uparrow \infty) \quad (1.5)$$

が成り立つ ．

² $f(n) \sim g(n)$ は両辺の比が 1 に近づくこと， $f(n) \approx g(n)$ は両辺の対数の比が 1 に近づくことを意味する ．

³ 2 次元の系についての最近の進歩は著しいものがあり，講演者の手に負えるものではない ．そのため，この講演では，2 次元の系に関する結果は一切言及しない ！「以下の結果」という場合も，これ以外に 2 次元の結果は色々あるはずだ，とご理解頂きたい

次に, SAW のスケーリング極限については以下がある .

定理 1.2 ([9, 5]) 5 次元以上の n.n. SAW と spread-out SAW のスケーリング極限は ブラウン運動 である (詳しくは以下参照) .

上のスケーリング極限 (連続極限) を正確に言うと以下ようになる . まず n 歩の SAW ω をとり, SAW の各点 $\omega(j)$ を $n^{-1/2}$ に縮めたものを折れ線でつないで $X_n(t)$ を作る :

$$X_n\left(\frac{j}{n}\right) := \frac{1}{\sqrt{n}}\omega(j), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n); \quad \text{それ以外の } 0 < t < 1 \text{ は折れ線ですぐ} .$$

\mathbb{R}^d -値の連続関数 (sup norm) の全体を $C_d[0, 1]$ で表す . すると, $C_d[0, 1]$ 上の有界関数 f に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(X_n) \rangle_n = \int f dW$$

が成り立つ . ここで dW は $C_d[0, 1]$ 上の Wiener measure である (ただし, 拡散係数は D) . 確率論の言葉でいえば, このように作った X_n の全体は, ブラウン運動に 法則収束 (convergence in distribution) するという事である .

なお, SAW の上方臨界次元は $4 = 2 + 2$ と予想・解釈される (2 節参照) .

1.3 Lattice Trees and Lattice Animals (LTLA)

Lattice tree (LT) と lattice animal (LA) は, SAW と percolation の中間にあるようなモデルである . Lattice animal とは単に連結したボンドの集合 (枝分かれなど, なんでもあり) を指す . また, lattice tree とは閉じたループのない lattice animal (つまり, tree の構造を持ったもの) を指す .

我々が見たいものは

- a_n, t_n : n 個のボンドからなる LA と LT の数 (ただし, 原点を含む)
- ℓ_n : radius of gyration (回転半径; SAW の ℓ_n に相当)

などである . SAW の時と同様に, subadditivity から $(t_n)^{1/n} \rightarrow \lambda$ となるような λ が存在することがわかる . 更に SAW の時と同様に, 定数 A', D' が存在して

$$t_n \sim A' \lambda^n n^{-1-\gamma}, \quad (\ell_n)^2 \sim D' n^{2\nu} \quad (n \nearrow \infty) \quad (1.6)$$

などが期待される . 実際, 以下が証明されている .

定理 1.3 ([10]) 十分高次元の n.n. LT, および 8 次元より上の spread-out LT (ただし L は次元に応じて大きくとる) においては, (1.6) の意味で $\gamma = 1/2, \nu = 1/4$ である .

スケーリング極限については, SAW の場合は $n^{-1/2}$ であったが, LT は $n^{-1/4}$ でスケールすると良い :

定理 1.4 ([11]) 大きさ n の LT を $n^{-1/4}$ でスケールすると, その分布は *Integrated Super-Brownian Excursion (ISE)* と呼ばれるものに収束する .

$n^{-1/4}$ のスケーリングは行き先の ISE の次元が 4 であることに対応している .

上方臨界次元の予想は $d_c = 8 = 4 + 4$ である (2 節参照) .

1.4 Percolation

今までのモデルはいわゆる「高温相」しか持たなかった . Percolation は「低温相」をも持つ点で, 古典スピソ系などの類似性が高い . Percolation は以下のように定義される (基本文献は [12]) . まず, 格子の各ボンドに, 確率変数 n_b を ($0 < p < 1$ はパラメーター)

$$n_b = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p \text{ で}) \quad \text{— occupied と言う} \\ 0 & (\text{確率 } 1-p \text{ で}) \quad \text{— vacant と言う} \end{cases}$$

となるように置く．ただし， n_b は互いに独立にとる．

更に，各ボンドの n_b の状態が決まったところで，2つのサイト x, y について， x と y が occupied bonds でつながれているとき， x と y は連結されている (*connected*) といい， $x \longleftrightarrow y$ と書く．また，サイト x について， $C(x)$ (*connected cluster of x*) を， x に連結されているサイトの全体として定義する．以上の定義の下に， n_b の分布について平均した量として，以下を定義する：

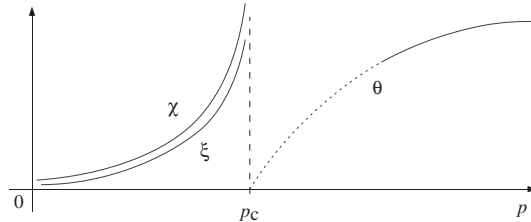
- 2点関数： $\tau_p(x, y) := \mathbb{P}[x \longleftrightarrow y]$
- 帯磁率： $\chi_p := \sum_y \tau_p(x, y) = \langle |C(0)| \rangle_p$ ．これは原点でのクラスターサイズの期待値でもある ($|C|$ は集合 C 内のサイトの数)．
- 相関距離： $\xi_p := - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \tau_p(0, ne_1)}$ (e_1 は1軸方向の単位ベクトル)．
- *Percolation density*: $\theta_p := \mathbb{P}[|C(0)| = \infty]$ ．

このモデルでは以下が証明されている ([12] 参照): $d > 1$ では臨界確率 $p_c(d) < 1$ が存在して，

- $p < p_c$ は「高温相」である [$\tau_p(x, y) \leq C e^{-m|x-y|}$; $\chi_p, \xi_p < \infty, \theta_p = 0$]; これは「高温展開」の手法により証明される．
- $p > p_c$ は「低温相」である [$\theta_p > 0, \chi_p = \infty$]; これは「パイエルスの議論」により証明される．
- $p \nearrow p_c$ で， χ_p, ξ_p は発散する；これはスピン系の研究で開発された「相関不等式」を駆使して証明される．

なお，一つの値 p_c を境に高温相と低温相が入れ替わるのは決して自明ではない．理論的には高温相と低温相の間に ($\tau_p(x, y)$ は $|x-y|$ で指数関数的には減少しないけども $\theta_p = 0$ という)「中間相」があってもおかしくない．中間相がない事の証明 [13] は'80年代の数理論物理学の輝かしい成果の一つである．

以上を模式的に表すと以下ようになる． p_c での θ の連続性は $d \geq 19$ と $d = 2$ では証明されているが，その中間では未解決である．



SAW と同じく， $p \approx p_c$ 近辺での臨界現象を問題にしたい．70年ごろから，以下が予想されていた．

$$\chi \approx (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \xi \approx (p_c - p)^{-\nu}, \quad \frac{\langle |C(0)|^2 \rangle_p}{\langle |C(0)| \rangle_p} \approx (p_c - p)^{-\Delta} \quad (p \nearrow p_c) \quad (1.7)$$

$$\theta_p \approx (p - p_c)^\beta \quad (p \searrow p_c) \quad (1.8)$$

$$\tau_{p_c}(0, x) \approx |x|^{-(d-2+\eta)} \quad (|x| \nearrow \infty) \quad (1.9)$$

$$\mathbb{P}[|C(0)| = n] \approx n^{-1-1/\delta} \quad (p = p_c, n \nearrow \infty) \quad (1.10)$$

この点，厳密な結果は以下のようになっている．

定理 1.5 ([14, 15, 16]) 十分高次元の n.n. percolation と，6次元より上の spread-out percolation では， $\gamma = 1, \nu = 1/2, \beta = 1, \eta = 0, \delta = \Delta = 2$ である．

いくつかの補足

- 低温相の帯磁率の臨界指数 γ' に関する厳密な結果はない — 我々の低温相の理解はまだ不十分である．
- 臨界点での $C(0)$ のスケーリング極限は，LTLA と同じように， $n^{-1/4}$ でスケールすると ISE になると思われるが，技術的困難から不完全な結果しかない [17]．

- 上方臨界次元の予想は $d_c = 6 = 4 + 2$ である (2 節参照) . ただし, $d_c \geq 6$ は以下のようなハイパースケール不等式から導かれるので, $d_c = 6$ が証明されたと言っても良いだろう .
- ハイパースケール不等式とは, $d\nu \geq 2\Delta - \gamma$ のような臨界指数間の不等式である [18] . ここに平均場の値 ($\nu = 1/2, \Delta = 2, \gamma = 1$) を代入すると $d \geq 6$ がでてくる . つまり, 臨界指数が「平均場の値」をとれる次元は 6 次元以上である .

1.5 Oriented Percolation and Contact Processes

これらのモデルも重要であるが, 時間の制約から詳細は省く . 臨界次元は $4 + 1$ であると思われる . また, $4 + 1$ 次元より上の spread-out oriented percolation については, スケール極限が Super-Brownian Motion であることが, Hofstad と Slade により証明されている . Contact process については, Hofstad と Sakai による証明が進行中 (最近, 完成?) である .

1.6 Ising Model

統計力学の (最も) 基本的なモデルであるイジングモデルについてもレース展開を適用する試みがいろいろとあったが, どれも成功していなかった . しかし, ごく最近になって 坂井哲 (あきら) 氏がイジングモデルに対するレース展開を導き, かつ解析する事に成功した模様である . これは重要な発展であると思う .

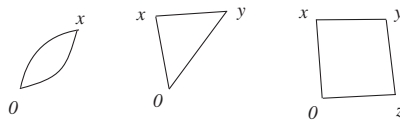
2 一息入れて: Bubble, Triangle, Square

異なるモデルでなぜ d_c が異なるのか, その理由の一端をかいつまんで説明する . 考えているモデルの臨界点での 2 点関数を $G(x, y)$ で表すと, 以下の定理が成立する⁴ .

定理 2.1 それぞれのモデルが「平均場的」な臨界指数 γ の値を示す十分条件は以下の通りである .

$$\begin{aligned} \text{(SAW)} \quad & \sum_x G(0, x) G(x, 0) < \infty \implies \gamma = 1. \\ \text{(Percolation)} \quad & \sum_{x, y} G(0, x) G(x, y) G(y, 0) < \infty \implies \gamma = 1. \\ \text{(LTLA)} \quad & \sum_{x, y, z} G(0, x) G(x, y) G(y, z) G(z, 0) < \infty \implies \gamma = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2 点関数を実線で表すと, 上の諸量 (和の中身) は下図のようになるので, 定理の条件はそれぞれ, bubble condition, triangle condition, square condition と呼ばれる .



さて, 上の定理から, 臨界次元の見当をつけることができる . いま, 臨界次元よりほんの少しだけ高い次元にいるとすると, 2 点関数は $G(x) \approx |x|^{2-d}$ と振る舞っているであろう . これを上記の bubble, triangle, square diagrams に代入すると, 4, 6, 8 次元より上では有限になることがわかる (このところの計算には, $G(x) \approx |x|^{2-d}$ のフーリエ変換が $\hat{G}(k) \approx |k|^{-2}$ と期待されることを, $\int_{[-\pi, \pi]^d} d^d k \hat{G}(k)^n$ に代入するのがわかりやすい) . これは何の証明にもなっていないが, 我々の期待する臨界現象があると思う限り, 臨界次元の見当を与えてくれるものである .

⁴この定理はスピン系の臨界現象の解析での同様の研究に端を発しており, Leobowitz, Sokal, Aizenman, Fröhlich, Newman などたくさんの人の成果の結晶であるため, 少数の文献を挙げるのが難しい

SAW の bubble condition の“ 導出 ” ここで SAW について、上の bubble condition の証明の一部を紹介する。同様の考え方は後で出てくるレース展開にも有効である。出発点は帯磁率を無心に微分することで：

$$\begin{aligned}
 p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_x \sum_{\omega:0 \rightarrow x} p^{|\omega|} = \sum_x \sum_{\omega:0 \rightarrow x} p^{|\omega|} |\omega| \\
 &\approx \sum_{x,y} \sum_{\omega:0 \rightarrow x} p^{|\omega|} I[y \in \omega] = \sum_{x,y} \sum_{\substack{\omega_1:0 \rightarrow x \\ \omega_2:0 \rightarrow y}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \cap \omega_2 = \{0\}] = \text{avoid}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。右辺の $I[\dots]$ は \dots の条件が満たされていれば 1、そうでないと 0 の indicator である。ここで右辺の indicator を 1 で押さえれば（この種の議論は Lebowitz がイジングモデルに対して 1975 年に行ったものが最初であろう）

$$p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p \leq \sum_{\substack{\omega_1:0 \rightarrow \bullet \\ \omega_2:0 \rightarrow \bullet}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} = (\chi_p)^2 \tag{2.2}$$

が得られる。 $\chi_p \approx (p_c - p)^{-\gamma}$ を仮定すると、上から直ちに $\gamma \geq 1$ が得られる⁵。逆向きの不等式は

$$\begin{aligned}
 p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p &= (\chi_p)^2 - \sum_{\substack{\omega_1:0 \rightarrow \bullet \\ \omega_2:0 \rightarrow \bullet}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \cap \omega_2 \supsetneq \{0\}] = \text{avoid} - \text{avoid} \\
 &\geq (\chi_p)^2 - \sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 (\chi_p)^2 = (\chi_p)^2 \left[1 - \sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。この不等式は、臨界点で $\sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 < 1$ であるならば、 $\gamma = 1$ である、ことを主張するものである。このような理論を更に深化させると⁶定理 2.1 を得る。□

上の証明を振り返ってみると、bubble condition は、2 つの長い SAW が互いを避ける 確率がゼロでないための条件として出てきた事がわかる。高次元では SAW は（通常のブラウン運動と同じく）2 次元的なものと解釈できるから、2 つのウォークが交わらないためには $2 + 2 = 4$ 次元の空間が最低でも必要である。これが SAW の臨界次元が 4 であることの一つの解釈である。

同様の議論は LTLA や percolation に対しても行うことができる。LTLA の場合は 2 つの LT や LA が互いをよける条件として square condition が出てくる。この場合、LT や LA が 4 次元の物体であると思えば⁷、臨界次元は $4 + 4 = 8$ になる。

Percolation の場合はもう少し話が複雑である。Percolation の確率モデルとしての定義から、triangle condition は一つの percolation cluster が、もう一つのクラスターの背骨（backbone）をよける条件として現れる。クラスターは 4 次元の物体であるが、背骨はランダムウォークと同じく 2 次元であり⁸、臨界次元は $2 + 4 = 6$ となる。

3 Lace expansion

厳密な結果、定理 1.1–1.5 のすべてのがレース展開と呼ばれる手法で得られている。レース展開の特徴を粗っぽくまとめると以下の通り。

- レース展開は、モデルの 2 点関数に対する（ある種の）self-consistent な方程式を与える。
- レース展開の n 次の項の数は、高々 c^n ぐらいである（ $c \geq 1$ は定数）。これなら、収束する展開が得られる可能性がある !!

特に第 2 の点はレース展開の大きな特徴なので強調しておきたい。大抵の展開（典型的なものは、場の理論における通常の摂動級数）では n 次の項の数が $n!$ くらいになってしまい、収束級数を得るのは全く不可能である。レース展開にはこの困難が存在しない⁹。

⁵ γ の存在を仮定しなくても、(2.2) を積分すれば、厳密に $\chi_p \geq c(p_c - p)^{-1}$ が証明できる

⁶ただし、この「深化」は奥深いもので、かなりの独自の道具立てを必要とする。その最初のもは [19] に現れた

⁷この 4 次元性の根拠は、スケーリング極限が ISE で、ISE の次元が 4 であること

⁸LTLA とことなり、percolation の場合はこのような次元の「証明」はまだない。スケーリング極限の同定も「証明」されていないから仕方ないが、いろいろな傍証はこの次元を強く示唆している

⁹後で少し説明するように、レース展開の各項にはある種の制限がついている。この制限を取り払うように更に展開を続けると、Schwinger-Dyson 方程式から得られる展開になり、項の数は $n!$ になる。レース展開は非常に巧妙に、通常の摂動展開を resummation した形になっている

以下では非常に高次元の n.n. SAW に話を限り，レース展開の手法を少し説明する．ただし，時間の関係もあるので，SAW の主定理をすべて証明する訳には行かず，以下の命題を証明するところまでにする．

命題 3.1 非常に高次元での n.n. SAW では， $\chi_p = \hat{G}_p(0) \approx (p_c - p)^{-1}$ である．また， $\hat{G}_{p_c}(k) \approx \frac{1}{|k|^2}$ であり，フーリエ空間で定義した臨界指数は $\eta = 0$ である．

本来の定理 1.1 までにはまだ距離があるが，これでも，問題の一番本質的なところはわかっていただけだと思う．というのも，

$$\chi_p = \hat{G}_p(0) = \sum_x G_p(0, x) = \sum_{x, n} c_n(0, x) p^n = \sum_n c_n p^n$$

と書けばわかるように， χ_p は c_n の母関数である．従って，適当な Tauberian condition が満たされれば c_n の情報 ($\gamma = 1$) も得られるからである．(実際，我々は以下に説明するよりもかなり大変な議論を行って，Tauberian analysis を正当化し， c_n についての結果を導いた．) また， $\hat{G}(k)$ の情報から $G(0, x)$ の情報を得るのも Tauberian analysis であるから，あと一息なのはご理解いただけるだろう．

なお，spread-out model についての解析も n.n. model に対するものとほとんど同じであるので，以下では省略する．また， $d = 5$ まで結果を拡張するにはかなり（非常に？）大変な拡張を必要とするが，ここでは述べない．

という訳で以下では上の命題の証明（の概要）を説明する．この命題は $\hat{G}_p(0)$ に関するものであるから， $\hat{G}_p(k)$ についての解析をしたくなる．この解析を可能にするのがレース展開である．

3.1 SAW のレース展開の導出．

まずは，SAW に対するレース展開の導出をかいつままで説明する．出発点は 0 から x への 2 点関数 $G_p(0, x)$ である． $x \neq 0$ の場合を考え，0 から x への SAW を，その第一歩で切る：

$$G_p(0, x) = \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} = \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[(0, y) \circ \omega' \text{ は SAW}] = \sum_y \text{avoid} \quad (3.1)$$

ここで，もともと SAW であった ω を $(0, y) \circ \omega'$ と分けたので，全体で SAW であるための条件をつけた．さて，これから inclusion-exclusion を行う．つまり，

$$I[(0, y) \circ \omega' \text{ は SAW}] = I[0 \notin \omega'] = 1 - I[0 \in \omega'] \quad (3.2)$$

であるので，これを (3.1) へ代入する．結果は

$$\begin{aligned} G_p(0, x) &= \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} \{1 - I[0 \in \omega']\} = \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p G_p(y, x) - \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] \\ &= \sum_y \left[\text{avoid} - \text{avoid} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

となるが，第 2 項では ω' を， ω' が 最初に 0 に来た時点で ω_1 と ω_2 に分ける：

$$\sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] = \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW}] = \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} \text{avoid} \quad (3.4)$$

ややこしくなるので明記しなかったが，上の和では， ω_1 は終点以外では 0 に来ていない (ω_2 の方にはそのような制限はない)．ここでまたもや，inclusion-exclusion を行う： $I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW}] = 1 - I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}]$ ．結果として，

$$\sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] = G_p(y, 0) G_p(0, x) - \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}] \quad (3.5)$$

を得る．ところで， $\omega_1 \circ \omega_2$ が SAW でないということは， ω_1 と ω_2 が 0 以外の点で交わっていることだ．そこで， ω_2 が ω_1 と (ω_2 の向きで見て初めて) 交わったところを z とし， z で ω_2 を更に 2 つに分ける：

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}] \\
&= \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z \\ \omega_{22}: z \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\} \text{ かつ } \omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW}] \\
&= \sum_z \left[\begin{array}{c} \omega_{21} \quad \omega_{22} \\ \text{avoid} \end{array} \right] \tag{3.6}
\end{aligned}$$

ややこしくなるので，図では互いによける条件の一部しか描いていない．ここでまたもや $I[\omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW}] = 1 - I[\omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW ではない}]$ の形で inclusion-exclusion を行うと，

$$\begin{aligned}
&= \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\}] G_p(z, x) \\
&\quad - \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z \\ \omega_{22}: z \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\} \text{ かつ } \omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW ではない}] \\
&= \sum_z \left[\begin{array}{c} \omega_{21} \quad \omega_{22} \\ \text{avoid} \end{array} \right] \tag{3.7}
\end{aligned}$$

となる．以下これをくり返して行くことで，SAW に対するレース展開が得られる．結果を書くと，

$$G_p(0, x) = \delta_{0, x} + p \sum_y I[(0, y) \in \Omega] G_p(y, x) + \sum_y \Pi_p^{(\leq N)}(0, y) G_p(y, x) + R_p^{(N+1)}(0, x). \tag{3.8}$$

ここで， $R_p^{(N+1)}$ とは上の inclusion-exclusion を N 回でとめた時のおつりの項であり，(詳しい解析の結果) inclusion-exclusion を無限回繰り返すとゼロに行くことがわかる．また， $\Pi_p^{(\leq N)}$ は展開の主要項であり，模式的には (図のお約束：2 本以上の線が出ている頂点については和をとる)

$$\Pi_p^{(\leq N)}(0, x) = \sum_{n=1}^N (-1)^n \Pi_p^{(n)}(0, x) = - \begin{array}{c} \text{loop at } 0 \\ \delta_{0, x} \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop at } 0 \text{ and } x \\ \text{loop at } 0 \end{array} - \begin{array}{c} \text{loop at } 0 \text{ and } x \\ \text{loop at } 0 \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop at } 0 \text{ and } x \\ \text{loop at } 0 \end{array} - \dots \tag{3.9}$$

と表される．図の実線はそのまま進む SAW についての和を表す．実際には図の SAW についての和には複雑な制限が付いているが (例：(3.7) の $\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\}$)，これらはすべて各項を小さくする方向に働くので，ここでは省略した．

(補足)

- (3.7) の inclusion-exclusion では ω_{22} への制限は， ω_{21} からのみ来ており， ω_1 は関係なかった．このように，切り離す部分への制限を必要最小限に抑えることが，出てくるダイアグラムの種類を押さえ，ひいては項の数を制限することにつながる．
- レース展開のグラフからも $d_c = 4$ が以下のように示唆される¹⁰．レース展開を用いた解析が有効であるためには， $\sum_x |x|^2 \Pi(0, x)$ が有限であることが必要である．そこで， $G_p(x) \approx |x|^{2-d}$ を仮定して (3.9) の各項 (に $|x|^2$ をかけたもの) のふるまいを見てみると，第 2 項以降はすべて，4 次元より上でのみ有限であることがわかる (例：第 2 項は $\sum_x |x|^2 (|x|^{2-d})^3 = \sum_x |x|^{8-3d}$ であり， $|x|$ の大きいところの寄与は $d > 4$ でないと収束しない) ．

¹⁰以下の議論は，レース展開が有効であるための必要条件によるものであるから，臨界次元に対する数学的な条件には全くなっていない．しかし，経験上，レース展開はかなり効率の良い展開であるので，展開が破綻することには (単なる技法の破綻以上の) 本質的な理由があると思いたいのである

3.2 SAW のレース展開の解析 — その概要

SAW に対するレース展開の解析法をいくつか述べる．大体の流れは以下になる．
出発点はもちろん，(3.8) で，この両辺のフーリエ変換をとって $\hat{G}_p(k)$ について解くと¹¹，

$$\hat{G}_p(k) = 1 + p|\Omega|\hat{D}(k)\hat{G}_p(k) + \hat{\Pi}_p(k)\hat{G}_p(k) \quad \text{つまり} \quad \hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - p|\Omega|\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)} \quad (3.10)$$

が得られる．ここで \hat{D} は以下の $D(x) := \frac{1}{|\Omega|}I[(0, x) \in \Omega]$ のフーリエ変換で， $|\Omega|$ は 0 から出ているボンドの数 — N.n. model の場合は単純に $\hat{D}(k) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos k_j$ である．前節でも少し説明したように， $\Pi_p(x)$ の各項は (制限を取り払うことで) $G_p(x)$ の積や和で押さえることができるので，これは \hat{G}_p に対する，広い意味での self-consistent equation と考えることができる．

次に (3.10) を解くのであるが，もちろん，exact に解くことはできない．しかし，今は臨界点で $G_p(x)$ が simple random walk の 2 点関数と同じように振る舞うことを示したいのであるから，exact に解けなくても可能性はある．実際，具体的な計算により以下が確かめられる．

- まず $G_p(x) \leq 4S(x)$ であると仮定せよ．ここで $S(x)$ は臨界点における単純ランダムウォークの 2 点関数である．
- すると ($S(x)$ の $1/d$ -展開などからわかるように) $d \gg 1$ である限り， $\hat{\Pi}$ は非常に小さい．
- しかし， $\hat{\Pi}$ が十分に小さいならば，(3.10) は $G_p(x) \leq 3S(x)$ を意味する．

すなわち，高次元においては， $G_p(x) \approx S(x)$ は (3.10) の self-consistent な解である事がわかる．これだけでは $G_p(x) \approx S(x)$ が可能な解の一つであると言ったに過ぎないが，上で $G_p(x) \leq 4S(x)$ が $G_p(x) \leq 3S(x)$ に化けたようなことを用いて努力することにより，実際に $G_p(x) \leq 3S(x)$ 以外の可能性がないことも証明できる (より詳しく以下の 4 節で解説する．更なる詳細は [1, 2] などを参照されたい)．

3.3 LTLA, percolation のレース展開

LTLA や percolation に対するレース展開も同様に導け，それぞれの $\Pi_p(0, x)$ の本質は以下ようになる (記述を簡単にするため，少し不正確な表式を敢えて書いた．LTLA の展開にはもっと多くのグラフが出てくる．詳細は [1, 2] などを参照)：

$$\begin{aligned} \text{(SAW)} \quad & - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \delta_{0,x} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} - \dots \\ \text{(Percolation)} \quad & \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} - \dots \\ \text{(LTLA)} \quad & - \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \dots \end{aligned}$$

モデルによって出てくるグラフが異なることが見て取れる．また， $\sum_x |x|^2 \Pi_p(0, x)$ の収束性を (SAW と同様に) 考えると， $d_c = 6, 8$ が示唆される．

4 SAW のレース展開の解析の詳細

大まかな流れは 3.2 節の通りであるが，これを厳密に遂行するのは，それなりに厄介である．以下ではまず大まかな枠組みを述べ，それから詳細に入る．

¹¹本質的でない剰余項 R_p は省略した

(注) レース展開を解析する手段は以下に紹介するものには限らない．有力な別のやり方として， $c_n(0, x)$ に対するレース展開を導いて， n に関する「数学的帰納法」を用いるやり方がある．ただ，この方法は SAW や LTLA など，自然に (walk のステップ数を n) 帰納法が使える形のモデルに限定されており，percolation には使えていない．そのため，より広く使える以下の方法を紹介する．

さて，レース展開は以下の補題を積み重ねる事により解析される．まず，いくつかの量を定義しよう：

$$\bar{G}_p := \sup_x |x|^2 G_p(x), \quad B_p = \sum_{x \neq 0} G_p(0, x)^2. \quad (4.1)$$

また，単純ランダムウォークの 2 点関数を

$$C_p(0, x) = \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} \quad (4.2)$$

と定義しておく．ただし，和は 0 から x に行くすべての単純ランダムウォークについてとる．この量はもちろん， $p \leq \frac{1}{2d}$ でのみ定義されている．

補題 4.1 $p < p_c$ では， \bar{G}_p, B_p はともに p の連続関数である．

証明：簡単である． $G_p(0, x) = \sum_n c_n(0, x) p^n$ と，これらの級数の収束半径が $p_c = 1/\mu$ であったことを思い出すと，絶対収束級数の連続性から出る． \square

補題 4.2 $p \leq \frac{1}{2d}$ では，

$$G_p(0, x) \leq C_p(0, x) \quad (4.3)$$

である．これから特に， $p \leq \frac{1}{2d}$ ，かつ十分大きい d では

$$\bar{G}_p = \frac{1}{2d} + O(d^{-2}) \leq \frac{1}{d}, \quad B_p = \frac{1}{2d} + O(d^{-2}) \leq \frac{1}{d} \quad (4.4)$$

が成り立つ．

証明：これも簡単．0 から x に行く n -step のランダムウォークの数を比べると，SAW の方が，単純ランダムウォークよりも少ない（なぜなら，SAW は「自分自身と交わってはいけない」条件をみたすような単純ランダムウォークだから）．従って， $G_p \leq C_p$ である．単純ランダムウォークではいろんな量を計算できるから， \bar{G}_p, B_p に相当する量を単純ランダムウォークで計算すると，補題の後ろ半分になる． \square

補題 4.3 $\frac{1}{2d} < p < p_c$ を任意に固定すると，

$$\bar{G}_p, B_p \leq \frac{2}{d} \quad \implies \quad \bar{G}_p, B_p \leq \frac{1}{d} \quad (4.5)$$

である．

この補題がすべてのキーであり，レース展開の出番である．これについては後で詳述する．

以上を認めて $\gamma = 1$ の証明の概略

補題 4.3 は「図」のように， \bar{G}_p, B_p の存在できない領域があることを示す．補題 4.2 は $p = \frac{1}{2d}$ では， \bar{G}_p, B_p はこの禁止領域の下にあることを意味する．最後に，補題 4.1 はこれらの量が p の連続関数である事を保証する．この 3 つから，結局， $p < p_c$ である限り， \bar{G}_p, B_p は禁止領域の上に出る事はないと結論できる（出れば，関数の連続性に反する）．つまり

$$p < p_c \text{ では } \bar{G}_p, B_p \leq \frac{1}{d} \quad (4.6)$$

が結論できた．Dominated Convergence Theorem を思い出せば，この結果は $p = p_c$ でも成り立つことが結論できる．

B が有限なので，2 節に従えば， $\gamma = 1$ が結論できる．レース展開のみを用いても $\gamma = 1$ を証明する事ができるが，これには補題 4.3 の証明と同様の議論が必要になるので，以下の小節で説明する．

4.1 補題 4.3 の証明

補題 4.3 の証明は，さらに次の 2 ステップによって行われる．

まず，最初の補題は， \bar{G}, B が十分小さい場合には Π_p, R_p も小さい ($R_p^{(N+1)}$ は N を無限大にすればゼロ!) ことを保証する．

補題 4.4 d を十分大きく (どのくらい大きくかは証明中でわかる) 固定する． $p < p_c$ を任意に決め，この p で

$$\bar{G}_p, B_p \leq \frac{2}{d} \quad (4.7)$$

と仮定する．このとき，レース展開の Π_p, R に対して，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_p^{(N+1)}(0, x) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{R}_p^{(N+1)}(k) = 0 \quad (4.8)$$

である．また，計算可能な有限の定数 c が存在して (以下の N はいくら大きくても良い)，

$$\sum_{n=2} \sum_x \Pi_p^{(\leq N)}(0, x) \leq \frac{c}{d^2}, \quad \sum_{n=1} \sum_x |x|^2 \Pi_p^{(\leq N)}(0, x) \leq \frac{c}{d^2} \quad (4.9)$$

がなりたつ．これから直ちに

$$|\hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(k)| \leq \frac{c'}{d^2}, \quad |\hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(0) - \hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(k)| \leq \frac{c'|k|^2}{d^2} \quad (4.10)$$

も結論できる． d が十分大きければ上の c, c' は 10 以下にとれる．

次の補題は，今度は Π_p などが十分小さければ，これは \bar{G}_p, B_p が小さい事を保証する．

補題 4.5 d を十分大きく (どのくらい大きくかは証明中でわかる) 固定する． $p < p_c$ を任意に決め，この p で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_p^{(N+1)}(0, x) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{R}_p^{(N+1)}(k) = 0 \quad (4.11)$$

かつ (十分大きな $N \geq 1$ ではいつでも)

$$|\hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(k)| \leq \frac{c}{d^2}, \quad |\hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(0) - \hat{\Pi}_p^{(\leq N)}(k)| \leq \frac{c|k|^2}{d^2} \quad (4.12)$$

と仮定する．すると， c に依存する計算可能な定数 $c'(c)$ が存在して，

$$\bar{G}_p \leq \frac{1}{2d} + \frac{c'}{d^2} \quad B_p \leq \frac{1}{2d} + \frac{c'}{d^2} \quad (4.13)$$

が成り立つ． d が十分大きければ上の c' は 10 以下にとれる．

この 2 つから補題 4.3 が導かれるのは明らかであろう (d を十分に大きくとって，(4.13) の右辺が $1/d$ 以下になるようにすれば良い)．

以上で形式論は終わりである．これで漸く，議論の核心に入る事ができる．

4.2 補題 4.4 の証明 (の大筋)

ある意味，ここが一番の核心部分と言ってもよい．我々の仮定は \bar{G}, B_p が小さい事なのだが，これからレース展開の Π などが小さい事をいう必要がある．

基本の不等式は ($f, g \geq 0$)

$$\sum_x f(x)g(x) \leq \left[\sup_x f(x) \right] \left[\sum_x g(x) \right] \quad (\text{要するに } \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1) \quad (4.14)$$

で、これを何回も使う． $\bar{B} := \sup_a \left[\sum_{x \neq 0} G(x) G(x-a) \right]$ を定義すると、例えば、

$$0 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \sum_{y,z} \left[0 \begin{array}{c} y \\ \diagup \diagdown \\ z \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y \\ \diagdown \diagup \\ z \end{array} \right] \leq \left[\sum_{y,z} 0 \begin{array}{c} y \\ \diagup \diagdown \\ z \end{array} \right] \left[\sup_{y,z} \begin{array}{c} y \\ \diagdown \diagup \\ z \end{array} \right] \leq 0 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \leq 0 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \leq (\bar{B})^3 \quad (4.15)$$

となる（レース展開の各項には少し制限がついていたので、上のように分解すると、丁度 \bar{B} が出る仕組みになっている．）同様に、

$$0 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \diagdown \diagup \end{array} \leq 0 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \leq (\bar{B})^5 \bar{G}. \quad (4.16)$$

などとできる．このようにして、一般の n についても解析すると、

$$\sum_x \Pi^{(n)}(0, x) \leq \bar{G} (\bar{B})^{n-1}, \quad \sum_{n=2} \sum_x \Pi^{(n)}(0, x) \leq \frac{\bar{G}}{1-\bar{B}} \quad (4.17)$$

が得られる¹²（もちろん、2番目の不等式は $\bar{B} < 1$ の時のみ成立）．同様の議論から

$$\sum_x |x| \Pi^{(n)}(0, x) \leq (n-1) \bar{G} (\bar{B})^{n-1}, \quad \sum_{n=1} \sum_x |x|^2 \Pi^{(n)}(0, x) \leq \frac{\bar{G} \bar{B}}{(1-\bar{B})^2} \quad (4.18)$$

も得られる．

さて、Schwarz 不等式から $\bar{B} \leq \{B(1+B)\}^{1/2}$ であるので、 B_p が小さければ、上から $\sum_{n=1} \sum_x \Pi^{(n)}(0, x)$ も小さいといえる．特に d が十分に大きい場合は $\bar{B} = O(d^{-1/2})$ であるので、上から直ちに

$$\sum_{n=2} \sum_x \Pi^{(n)}(0, x) = O(d^{-3/2}), \quad \sum_{n=2} \sum_x |x|^2 \Pi^{(n)}(0, x) = O(d^{-3/2}) \quad (4.19)$$

が得られる． $n=2$ の寄与をもう少し頑張ると、上の評価を $O(d^{-2})$ まで高める事ができて、補題 4.4 の証明を得るのである．

（少し余談）これらの分解に当たっては、空間の次元がモデルの臨界次元より上なら収束するようなものに分解する事が大事である．例えば、

$$\bar{B} \approx \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{G}(k)^2 \stackrel{\text{if gaussian}}{\approx} \int_{[-\pi, \pi]^d} d^d k |k|^{4-2d}$$

は $d > 4$ で有限だから、SAW の解析に使うにはちょうど良い．

4.3 補題 4.5 の証明（の大筋）

こちらの方は単なるフーリエ積分の練習問題であるので、 B_p について簡単に例示する．まず、 $\hat{G}_p(k)$ を以下のように書いてみる：

$$\begin{aligned} \hat{G}_p(k) &= \frac{1 + \hat{R}_p^{(N+1)}(k)}{1 - 2dp\hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)} = \frac{1 + \hat{R}_p^{(N+1)}(k)}{1 - 2dp - \hat{\Pi}_p(0) + 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} + \{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)\}} \\ &= \frac{1 + \hat{R}_p^{(N+1)}(k)}{\kappa_p + 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} + \{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)\}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

¹²実は $n=1$ の項は $x \neq 0$ では $\Pi^{(1)}(0, x) = 0$ であるため、ほとんど考慮する必要がない．そのため、ここでは $n \geq 2$ のみを問題にしている

ここで $\kappa_p = 1/\chi_p = \frac{1}{\bar{G}_p(0)}$ を導入した．これを用いて B_p をフーリエ表示してみると¹³

$$\begin{aligned} B_p &= \sum_x \{G_p(x) - \delta_{0,x}\}^2 = \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{\hat{G}_p(k) - 1\}^2 \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{2dp\hat{D}(k) + \hat{\Pi}_p(k)}{\kappa_p + 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} + \{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)\}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

を得る．ここで分母については， $\hat{\Pi}_p(k)$ などについての仮定， $\kappa_p > 0$ ，及び $2dp \geq 1$ より，

$$\begin{aligned} \kappa_p + 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} + \{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)\} &\geq 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} - |\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)| \\ &\geq 2dp\{1 - \hat{D}(k)\} - \frac{c|k|^2}{d^2} \geq 2dp\left(1 - \frac{c'}{d}\right)\{1 - \hat{D}(k)\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

と押さえられる (c' は c から決まる定数)¹⁴．また，分子についても，やはり $\hat{\Pi}_p$ についての仮定から，

$$(2dp\hat{D}(k) + \hat{\Pi}_p(k))^2 = (2dp)^2\hat{D}(k)^2 + O(d^{-2}) \quad (4.23)$$

と評価できるので，

$$\begin{aligned} B_p &\leq \frac{1}{(1 - c'/d)^2} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\hat{D}(k)^2}{\{1 - \hat{D}(k)\}^2} + O(d^{-2}) \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\{1 - \hat{D}(k)\}^2} \\ &= \frac{1}{(1 - c'/d)^2} \left(\frac{1}{2d} + O(d^{-2}) \right) + O(d^{-2}) \times O(1) \stackrel{(d \gg 1 \text{ で})}{\leq} \frac{1}{d} \end{aligned} \quad (4.24)$$

となるのである． \bar{G}_p の方も同様に計算していけばできる．

5 まとめと展望

確率論的統計力学モデルの臨界現象についての review を行った．ここ十数年の主な発展は以下のような特徴を持っている．

- 確率論的統計力学モデルの「高次元かつ高温側の臨界現象」はかなり解明された．
- 特に最近，その連続極限が同定されつつあることは大きな進歩である．
- 解析にはレース展開の手法が非常に有効であった．レース展開は，それが収束する場面では，我々が欲しい情報をほとんどすべて与えてくれるので，強力である．ただし，展開が収束しなければどうしようもない（この意味で all or nothing）．

しかし，未解決問題も多く残されている．

- 「低温側」の臨界現象は，厳密なレベルでは全然ダメである．
- 臨界次元以下も歯が立たない．臨界次元直上（対数補正があると期待される）ですら，満足のいく結果はない．この意味ではスピン系におけるくりこみ群の手法などよりも劣っている．（ただし，2次元は conformal invariance の観点から大いに進歩している．ダメなのは3次元以上，臨界次元以下である．）
- 以上の未解決問題に立ち向かうにはレース展開の本質的な発展，またはくりこみ群などの併用，といった何らかの breakthrough が必要と原は考える．

¹³補題 4.4 では $\hat{R}_p^{(N+1)}(k) \rightarrow 0$ を言うてあるから，以下では簡単のため，この $\hat{R}_p^{(N+1)}(k)$ を無視して議論する．もちろん，ここは論文では厳密にやるべきところである

¹⁴ここで， $1 - \hat{D}(k) \geq \frac{|k|^2}{2\pi d}$ であることを用いた

参考文献

- [1] T. Hara and G. Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. In G. Grimmett, editor, *Probability and Phase Transition*, Dordrecht, (1994). Kluwer.
- [2] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser, Boston, (1993).
- [3] D.C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **97**:125–148, (1985).
- [4] G. Slade. The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **110**:661–683, (1987).
- [5] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, **147**:101–136, (1992).
- [6] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Reviews in Math. Phys.*, **4**:235–327, (1992).
- [7] T. Hara, R. Hofstad, and G. Slade. Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high dimensional percolation and related models. *Ann. Prob.*, **31**:349–408, (2003).
- [8] T. Hara. Decay of correlations in nearest-neighbour self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals. Preprint, (almost) accepted in *Ann. Prob.*, (2005).
- [9] G. Slade. The scaling limit of self-avoiding random walk in high dimensions. *Ann. Probab.*, **17**:91–107, (1989).
- [10] T. Hara and G. Slade. The number and size of branched polymers in high dimensions. *J. Stat. Phys.*, **67**:1009–1038, (1992).
- [11] E. Derbez and G. Slade. The scaling limit of lattice trees in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **193**:69–104, (1998).
- [12] G. Grimmett. *Percolation*. Springer, Berlin, (1989). Second edition has been published.
- [13] M. Aizenman and D.J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Commun. Math. Phys.*, **108**:489–526, (1987).
- [14] T. Hara and G. Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **128**:333–391, (1990).
- [15] D.J. Barsky and M. Aizenman. Percolation critical exponents under the triangle condition. *Ann. Probab.*, **19**:1520–1536, (1991).
- [16] T. Hara and G. Slade. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. I. Critical exponents. *J. Stat. Phys.*, **99**:1075–1168, (2000).
- [17] T. Hara and G. Slade. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. II. Integrated super-Brownian excursion. *J. Math. Phys.*, **41**:1244–1293, (2000).
- [18] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.*, **113**:49–65, (1987).
- [19] M. Aizenman. Geometric analysis of φ^4 fields and Ising models, Parts I and II. *Commun. Math. Phys.*, **86**:1–48, (1982).