確率論セミナー　2005 年 11 月 10 日 (木) 15:45-17:15 数学棟 518

保阪 賢資 氏（神戸大・理）

Hierarchical Model とくりこみ群解析

概要：くりこみ群解析は臨界現象を解析するために有効な手段であるが，一般的にくりこみ変換を施した後のハミルトニアンは複雑な形になり解析が難しい．しかし，hierarchical model では，くりこみ変換を施した後のハミルトニアンが例外的に綺麗な形となり，他の模型と比べて解析がしやすい．本講演では，hierarchical model について紹介し，その模型でのくりこみ群解析について解説する．

§1. くりこみ群解析

くりこみ群解析：物理の問題提起による数学の発展の一例.

くりこみ群は物理では臨界現象を説明する解析手段として発展した．それが数学的に提起する問題：従属確率変数列の系の部分和の極限挙動を求めよ.

§1.1. $P(\Phi)$–model

$\mathbb{Z}^d$: d 次元正方格子

$\mathrm{P}_p[\ \cdot\ ] = \dfrac{1}{Z}\displaystyle\int \exp(-H(\Phi))D\Phi$;

$D\Phi = \displaystyle\prod_{x\in\mathbb{Z}^d} d\phi_x$; $d\phi_x$ は 1 次元 Lebesgue measure.

（本当は有限自由度で定義して無限体積極限をとらないといけないが，hierarchical model のくりこみ群を定義するだけなら避けて通れるのでここでも割愛する.）

スピン変数：$\Phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$

ハミルトニアン：$H(\Phi) = P(\Phi) + H_0(\Phi)$;

$H_0(\Phi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^d\\ |x-y|=1}} (\phi_x - \phi_y)^2$,

$P(\Phi) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(\phi_x)$;

$p(\phi_x) = \mu\phi_x^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_x^{2k}$, $(\lambda_{2n} > 0)$.

（形式的には無限変数多項式．もちろん有限系で考えて極限をとることで定義する.）

§1.2. Block spin 変換 (BST)

$L > 0$: integer, fix.

Block spin $\Phi' = \{\phi'_x\}$ を次で定義する：$\phi'_x = L^{-\theta} \displaystyle\sum_{y\in B_L(x)} \phi_y$

ここで $B_L(x)$ は x を中心として 1 辺 L の d 次元立方体.

$\Phi \mapsto \Phi'$ に対して Φ' による P_p の像測度に対応するハミルトニアンを（形式的に）H' とするとき

$R_{L,\theta}:\ H \to H'$

を Block spin 変換（BST，くりこみ群変換）と（もし H' が決まれば）呼ぶ.

実際は H' を計算するのは難しい.

問題：

- $R_{L,\theta}$ を iterate したとき自明でない極限測度が存在するためには θ をどのようにとればいいか？(独立なら $\theta = d/2$ だが，従属性があるとそうとは限らない.）
- 行き先は？(Gauss 型固定点が候補の一つだが，物理理論によると Wilson–Fisher 固定点が $d = 3$ ではあると期待されている．ただし，後述の hierarchical model の場合しか存在は証明されていない.）

（独立変数の和の場合は特性関数が使えて中心極限定理が言えたが，従属変数の場合はそれに代わるものが知られていないところが問題.）

§2. Hierarchical model

くりこみ群の描像が見やすいように，interaction part $e^{-H_0(\Phi)}D\Phi$ が BST に対して不変な model (hierarchical model) を導入する

§2.1. Hieralchical massless Gaussian model

$\mathbb{Z}^d$: d–dim 正方格子

L: even integer, fix

Hierarchical spin variables $\Phi = \{\phi_x\}_x$ を次で定義する：$[\cdot]$ をガウス記号とするとき

$\phi_x = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-k(d-2)/2} A_{[L^{-k}x]} Z_{[L^{-k-1}x],k}$. ここで，$\{Z_{x,k}\}_{x\in\mathbb{Z}^d,\ k\in\mathbb{Z}_+}$ は各々が標準正規分布に従う iid，A_x は ± 1 に値をとる（あらかじめ決めた）x の関数で $\displaystyle\sum_{x:\ [L^{-1}x]=z} A_x = 0$, $z\in\mathbb{Z}^d$, を満たすもの.（何でもいいから一つ fix.）

Note: $\theta = \dfrac{d+2}{2}$ なる BST に対して Φ と Φ' の分布は等しい.

実際，$\phi'_x = L^{-(d+2)/2} \displaystyle\sum_{y:\ [L^{-1}y]=x} \phi_y$ の右辺に ϕ_y の定義を代入して $k=0$ の項だけ抜き出して残りの和は $k\mapsto k+1$ と記号を付け替えると

$$
\begin{aligned}
\phi'_x &= L^{-(d+2)/2} \sum_{y:\ [L^{-1}y]=x} (A_y Z_{x,0} + L^{-(d-2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} L^{-k(d-2)/2} A_{[L^{-k-1}y]} Z_{[L^{-k-2}y],k+1}) \\
&= L^{-d} \sum_{y:\ [L^{-1}y]=x} \sum_{k=0}^{\infty} L^{-k(d-2)/2} A_{[L^{-k}x]} Z_{[L^{-k-1}x],k+1}.
\end{aligned}
$$

途中で A_y の定義を使った．$Z_{[L^{-k-1}x],k+1}$ と $Z_{[L^{-k-1}x],k}$ は同分布なことに注意すると，ϕ_x の分布に等しい

n 回 BST を行ったものを $\Phi^{(n)}$ とおく.

$\Phi = \{\phi_x\}$ はガウス分布に従う確率変数の足し合わせだからガウス分布に従う．それを $d\nu_{Gh}(\Phi)$ と書き，

$\mathrm{P}_p[\ (\ ]d\Phi) = \dfrac{1}{Z}\exp(-P(\Phi))d\nu_{Gh}(\Phi)$

と定義する.

このとき，P_p の下での Φ'^{-1} の分布は $\dfrac{1}{Z_{p'}} e^{-P'(\Phi')} d\nu_{Gh}(\Phi')$ になる．ここで $P'(\Phi') = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p'(\phi_x)$ で

$$
p'(\phi') = -\log \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}L^d \sum_{\pm} p(L^{-(d-2)/2}\phi' \pm z) - \frac{1}{2}z^2)\,dz + \log \int_{\mathbb{R}} \exp(-L^d p(z) - \frac{1}{2}z^2)\,dz.
$$

- p は多項式から始めるが，iteration すると多項式でなくなる．しかし，ある帯状領域上の解析関数の集合上の力学系として閉じている.

- 明らかに $P(\Phi)=0$ は固定点である．これを Gauss 型固定点と言う.

- (Gawedzki–Kupiainen.) $d \geqq 4$ のとき，$p_0(\phi) = \mu\phi^2 + \lambda\phi^4$ で λ が十分小さいとき $\lim_{n\to\infty} p_n(\phi) = 0$ となる $\mu = \mu_{crit}(\lambda)$ が存在する．すなわちガウス固定点に収束する軌道がある（従属変数に対する中心極限定理の一般化）.（一意性があってしかるべきだが，用いている方法では存在しか言えない.）

  (Hosaka, JSP, in press.) $p_0(\phi) = \mu\phi^2 + \lambda\phi^4 + \rho\phi^6$ で λ, ρ が十分小さいとき，同様の意味で $\mu = \mu_{crit}(\lambda,\rho)$ が存在する.