$w' = -w^2$ の逐次近似のスケール極限について

服部　哲弥（東北大学・理）
落合　啓之（名古屋大学・多元）

Recursion

$$w_{n+1}(x) = \int_x^\infty w_n(x')^2\,dx',\ x > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

と $w_0(x) = x^{-1} + o(x^{-2})$, $x \to \infty$, を満たす初期データ w_0 によって定義される関数列 $w_n:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は，常微分方程式 $w'(x) = -w(x)^2$ の解 $w(x) = x^{-1}$ の逐次近似法による近似列を与える．w_0 が有界ならば，近似列 $\{w_n\}$ は $x = 0$ の近傍で増加する．この増大がスケール極限 $\bar{w}(x) = \lim_{n\to\infty} q_n^{-1} w_n(q_n^{-1}x)$ を持つか，という問題を考える．$x = 0$ での増加の様子を考えると，$q_n = w_n(0)$ と選ぶのが素直なので，以後，数列 $\{q_n\}$ はこのように決める．$x = 0$ が動く特異点（方程式にはない特異点が解には現れる）であることがスケール極限の存在への興味を引き起こす.

次の定理はスケール極限が存在する w_0 の例を与える．$b > 2$ に対して，

$$w_0(x) = \frac{1}{x}\,(1 - e^{-x}) - \frac{1}{x^b}\,\gamma(b, x),\quad x \geqq 0, \tag{2}$$

とおく．ここで $\gamma(b, x) = \displaystyle\int_0^x y^{b-1}e^{-y}dy$ は不完全ガンマ関数．$w_0(x) = x^{-1} + O(x^{-b})$, $x \to \infty$, に注意．$\rho = 1.26\cdots$ は $2e\log\rho = \rho < e$ を満たす唯一の正数.

定理 1 $2 < b < (\log\rho)^{-1}$ とし，w_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, を，*(1)* と *(2)* で定義されたものとする．このとき，スケール極限 $\bar{w}$ は存在し，$\bar{w}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \alpha_k x^k$ と $\alpha_0 = 1$, $\alpha_k = \displaystyle\frac{1}{kr^{k+1}} \sum_{j=1}^k \alpha_{k-j}\alpha_{j-1}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, によって与えられる．ここで，$r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} > 1$ は $r = r(b) := (b/2)^{1/(b-1)}$ で与えられる．$\diamond$

定理 1 の証明の鍵は

$$f_{n+1}(y) = \frac{1}{y}\int_0^y f_n(y')f_n(y - y')\,dy',\ y \geqq 0,\quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

で与えられる（非線形非局所的な）recursion の ‘propagating single layer solutions’ の存在である．$b > 2$ とし，$f_0(y) = \max\{1 - y^{b-1},\ 0\}$, $y \geqq 0$, から (3) によって帰納的に関数列 f_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, を定義する．このとき $y \geqq 0$ の各点で $f_n(r(b)^n y)$ は n に関して非減少で，従って極限関数 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(r(b)^n y) = \tilde{f}(y)$ が存在する．

定理 2 *(i)* $\tilde{f}(y)=1,\ y\geqq 0,$（恒等的に 1）または *(ii)* $Q:=\displaystyle\int_0^\infty \tilde{f}(y)\,dy<\infty,$（可積分）のいずれか一方のみが（$b$ に依存して）成り立つ．さらに $b<(\log\rho)^{-1}$ ならば *(ii)* が成り立つ． ◇

ラプラス変換 $w_n(x)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}f_n(y)\,dy$ によって (3) から (1) を得る．

次の結果は，スケール極限が存在するための b によらない十分条件であり，定理 2 とともに定理 1 を証明する．$\mathcal{C}$ を，$\bar{w}(0)=1$ を満たす整関数 $\bar{w}$ でそのマクローリン展開 $\bar{w}(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k z^k$ について各 a_k が非負かつ $\bar{w}(x)>0,\ x>0,$ および $\bar{w}(x)=x^{-1}+o(x^{-2}),\ x\to+\infty,$ を満たすものの集合とする．

定理 3 $\bar{w}_0\in\mathcal{C}$ とし，$\bar{w}_{n+1}(z)=\dfrac{1}{r_n}\displaystyle\int_{z/r_n}^\infty \bar{w}_n(z')^2\,dz',\ r_n=\int_0^\infty \bar{w}_n(z')^2\,dz',$ によって $\mathcal{C}$ の列を定義する．もし極限 $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n>1$ が存在するならば，$\bar{w}_n$ は $\mathbb{C}$ で広義一様収束し，極限 $\bar{w}(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_k z^k$ は定理 *1* で与えた形になる． ◇

Sibuya–Itoh(1987) は，長さ 1 の棒 $(X_0=1)$ から始めた random sequential bisection の第 n 段階の 2^n 個の破片の最長の長さ X_n の逆数の分布 $f_n(y)=\mathrm{P}[\,1/X_n>y\,]$ が (3) と $f_0=\chi_{[0,1]}$ で与えられることを注意した．対応するのは $w_0(x)=\dfrac{1}{x}(1-e^{-x})$ である．

定理 4 $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n}>1$ が存在すれば $r=\rho$ として定理 *3* の結論が成り立つ． ◇

極限 r が存在すればより弱い $\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n^{1/n}$ に等しいが，後者は Biggins(1977)，Devroye(1986) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}X_n^{-1/n}=\rho,$ a.s., が分かっていたことから定理 4 を得る．なお，$\bar{w}$ は不完全ガンマ等 extreme value distributions に現れる分布ではない．

数値計算によれば，この場合 $q_n\sim 0.666\,n^{0.407}\rho^n$，特に $r=\rho$ としても定理 2 のような単純な ρ^n ではスケールしないこと $(Q=\infty)$ を示唆する一方，定理 3 の仮定は成り立つように見える（のでスケール極限が存在することは示唆される）．

参考文献

[1] T. Hattori, H. Ochiai, *Scaling limit of successive approximations for* $w'=-w^2$, preprint. `http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/`

[2] J. D. Biggins, *Chernoff's theorem in the branching random walk*, J. Appl. Probab. **14** (1977) 630–636.

[3] L. Devroye, *A note on the height of binary search trees*, Journ. Assoc. Computing Machinery **33** (1986) 489–498.

[4] S. Kotz, S. Nadarajah, *Extreme value distributions,* Imperial college press, 2000.

[5] M. Sibuya, Y. Itoh, *Random sequential bisection and its associated binary tree*, Ann. Inst. Stat. Math. **39A** (1987) 69–84.