ガスケット上のself-avoiding pathに付随する2次元写像の固定点の一意性について

服部　哲弥（東北大学・理）

非負係数多項式の勾配が定義する写像の，第1象限$\mathbb{R}_+^2$のある不変部分集合における，固定点の唯一存在が（正値性に基づいて）証明できる十分条件を考察した．

定理 1 $W(x,y) = a\,x^3 + b\,x^4 + f_5\,x^5 + f_6\,x^6 + (3\,a\,x^2)^2 y + g_5\,x^5 y + h_3\,x^3 y^2 + h_4\,x^4 y^2 + n_3\,x^3 y^3 + a_{24}\,x^2 y^4 + a_{05}\,y^5 + a_{15}\,x y^5 + a_{06}\,y^6$, で定義される，12個の非負係数（ただし$a > 0$）を持つ多項式$W:\ \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$について，$(X,Y) = \mathrm{grad}\,W$とおくとき，$R(x,z) = X(x,x^2 z)^2 - Y(x,x^2 z)$が$z,\ 1-z,\ x$の非負係数多項式になっているとする．

このとき$\mathrm{grad}\,W$の不変集合$\Xi = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < y \leqq x^2\}$に固定点$(x_f, y_f)$がただ一つある． ◇

定理の条件を満たす2次元写像(X,Y)の例として，3および4次元gasket上のrestricted self-avoiding pathsのくりこみ写像（を適切に変数変換したもの）がある．

不等式（正値性）で条件付けられた写像の,（非線形な）不等式で定義された領域内での固定点の唯一性の証明はうまい方法がないようである．（しかし，gasket上のself-avoiding pathsのくりこみ写像の例では，(X,Y)のiterationが確率測度の母関数列を表し，係数の正値性は確率の正値性に由来し，領域の形状はself-avoidingというpathの非マルコフ性を意味する，という，それぞれ本質的な由来があり，このような状況を扱う一般的な数学が望まれる．）手持ちの証明では上記のような限られた多項式に対してのみ証明できたが，おそらくもっと広いクラスの写像に対して唯一性が成り立つ．

予想 2 $W:\ \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$が以下を満たすとする：

(i) Wは2変数多項式で，各項の係数は正で3次以上．

(ii) $\Xi = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < y \leqq x^2\}$が$(X,Y) = \mathrm{grad}\,W$の不変部分集合であり，$Y(x,x^2) < X(x,x^2)^2,\ x > 0$.

(iii) Wは，x^3，および，ある$n \geqq 2$に対して$x^n y$という項を含む．

(iv) $R(x,z) = X(x,x^2 z)^2 - Y(x,x^2 z)$は$z,\ 1-z,\ x,$の非負係数多項式で，$\dfrac{R(x,z)}{Y(x,x^2 z)} = O(x),\ x \to 0,$を満たす．ここで$O(x)$は$z \in [0,1]$について一様とする．

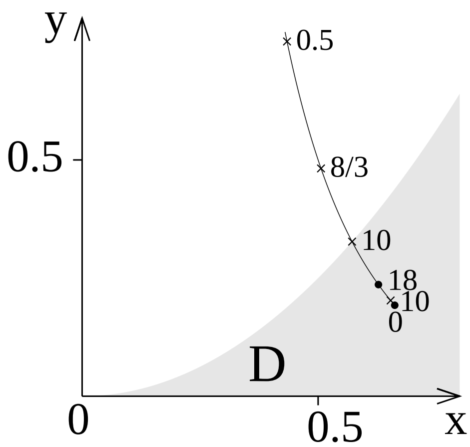
このとき，$\mathrm{grad}\,W$はΞにただ一つ固定点を持つ． ◇

固定点の存在は容易である．

定理 3 予想 *2* の仮定の下で写像 (X,Y) の固定点が Ξ に存在する． ◇

もちろん，固定点の存在はもっと少ない仮定で成り立つが，一意性はある程度の仮定を要すると考えられる．仮定の意味は，y は x^2 に「近い」，ということ，Ξ が不変部分集合である，ということと，簡単のために，Ξ の境界には（自明の原点を除いて）固定点が無いことの保証，ということである．

$W_\epsilon(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^4 y + \epsilon y^6$ は $0 \leqq \epsilon \leqq 8/3$ のとき，定理 1 の仮定を満たす簡単な例になる．$\epsilon = 0$ のとき原点を除いて第 1 象限には $\mathrm{grad}\, W$ の固定点が 1 個，$0 < \epsilon < 18.3487\cdots$ では 3 個ある．固定点の 1 個は Ξ 内にあって ϵ を変えてもあまり動かない．残り 2 個は ϵ を増やすと y の大きいところから下って，うち 1 個は $\epsilon = 9.79\cdots$ で Ξ の内部に入る．すなわち，固定点の唯一性が成り立つには，Ξ への制限も，R が非負係数であること（そのことから $\epsilon \leqq 8/3$ の上限が得られる）も意味がある．その意味で予想 2 の条件は不自然ではない（と信じたい）．



参考文献

[1] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[2] T. Hattori, ランダムウォークとくりこみ群，共立出版，2004.

[3] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpiński gaskets,* Journal of Statistical Physics **109** (2002) 39–66.

[4] T. Hattori, *Uniqueness of fixed point of a two-dimensional map obtained as a generalization of the renormalization group map associated to the self-avoiding paths on gaskets,* preprint (2006) http://arxiv.org/abs/math-ph/0610007

[5] http://www.math.tohoku.ac.jp/ hattori/criti.htm