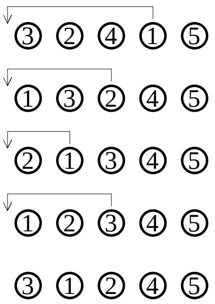
Move-to-front 規則の「流体力学」極限はなぜ半世紀の間気づかれなかったか

服部哲弥　（慶應大・経済）
服部久美子　（首都大学東京・理工）

2007 年末から stochastic ranking process と呼んできた多粒子マルコフ過程のモデルは move-to-front 規則として半世紀前から知られていた．しかし，粒子の軌道の大数の法則と，位置ジャンプ率結合経験分布の無限粒子極限の存在は，半世紀の間，気づかれなかった．極限に現れるジャンプ率の分布のラプラス変換の逆関数を，偏微分方程式系の特性曲線による解法で見出したのが決め手と思われる．

1. Stochastic ranking process の無限粒子極限． N を自然数，$\mathcal{S}_N$ を $1,2,\cdots,N$ の並べ替え全体とし，$X^{(N)}=X^{(N)}(t)=(X_1^{(N)}(t),\cdots,X_N^{(N)}(t))$ $(t \geqq 0)$ を，$\mathcal{S}_N$ を状態空間とするマルコフ過程で，以下で定義されるものとする．



各 $i=1,\ldots,N$（以下 N 粒子系と見て，i を粒子の添字とみなす）に対して確率変数の増加列 $\tau_{i,j}^{(N)}$, $j=0,1,2,\cdots$ があって（粒子 i の先頭へのジャンプ時刻），$X_i^{(N)}(\tau_{i,j})=1$ $(\forall j \geqq 1)$ を満たし，$X^{(N)}(t)$ は $t \notin \{\tau^{(N)}i,j \mid i=1,\cdots,N,\ j=1,2,\cdots\}$ では定数である．$t=\tau_{i,j}$ での変化は，i の先頭へのジャンプ $X_i^{(N)}(\tau_{i,j})=1$ に加えて $X_{i'}^{(N)}(\tau_{i,j}-0)=1$ なる i'（が，$i' \neq i$ の場合）に対して $X_{i'}^{(N)}(\tau_{i,j})=2$ とし，以下，値が粒子間で重ならないよう 1 ずつ増やして $X^{(N)}(t) \in \mathcal{S}_N$ となるようにする．$\{\tau_{i,j+1}^{(N)}-\tau_{i,j}^{(N)},\ j=1,2,\cdots\}$ $(\tau_{i,0}^{(N)}=0)$ は i,j について独立，j について同分布で速さ $w_i^{(N)}>0$ の指数分布 $\mathrm{P}[\,\tau_{i,1}^{(N)}>t\,]=\exp(-w_i^{(N)}t)$ に従う．このモデルについて無限粒子極限 $(N \to \infty)$ について調べていた [1]．値域 $\mathcal{S}_N$ を空間位置とみなし，N でスケールして区間 $[0,1)$ に収める：$Y_i^{(N)}(t):=\dfrac{1}{N}(X_i^{(N)}(t)-1)$．$y_C^{(N)}(t)=\dfrac{1}{N}\sharp\{i \mid \tau_{i,1} \leqq t\} \in [0,1)$ はジャンプ済み粒子と未ジャンプ粒子の境界位置を表す．以下 a に集中した単位分布を δ_a と書き，ジャンプ率の分布 $\lambda^{(N)}=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\delta_{w_i^{(N)}}$ が $N \to \infty$ で分布 λ に弱収束することを仮定する．

命題([1])．$y_C^{(N)}(t) \to y_C(t):=1-\displaystyle\int_0^\infty e^{-wt}\,\lambda(dw)$ $(N \to \infty$, 確率収束$)$.　◇

定理([1])．λ が $\displaystyle\int_0^\infty w\lambda(dw)<\infty$ と $\lambda(\{0\})=0$ を満たし，初期位置 $Y^{(N)}(0)=y^{(N)}$ について，ジャンプ率と位置の結合分布が $N \to \infty$ で分布 μ_0 に弱収束するとする：$\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\delta_{(w_i^{(N)},y^{(N)})} \to \mu_0$．このとき，各時刻 $t>0$ におけるジャンプ率と位置の結合経験分布（分布値確率変数）$\mu_t^{(N)}:=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\delta_{(w_i^{(N)},Y_i^{(N)}(t))}$ は $N \to \infty$ で (非ランダムな) 分布 μ_t に確率収束する．極限 μ_t は，

$$U(dw,y,t) := \mu_t(dw,[y,1)) = \begin{cases} \lambda(dw)\, e^{-wt_0(y)}, & y < y_C(t), \\ U(dw,\hat{y}(y,t),0)\, e^{-wt}, & y > y_C(t). \end{cases}$$

ここで命題の $y_C(t)$ の逆関数を $t_0(y)$ とおき，$y_C(y,t) = 1 - \int_y^1 \int_0^\infty e^{-wt}\mu_0(dw,dz)$ とし，$\hat{y}(y,t)$ を $y_C(y,t)$ の y に関する逆関数とした． ◇

仮定のうち $\int_0^\infty w\lambda(dw) < \infty$ は $y > 0$ での収束には不要である．

2. Move-to-front 規則． 先行研究があることを杉峰伸明氏を通して教わった．時刻 t までに起きた先頭へのジャンプ回数を $\sigma^{(N)}(t) = \sharp\{(i,j) \mid 0 < \tau_{i,j}^{(N)} \leqq t\}$ とおくとき $Z_i(\sigma^{(N)}(t)) = X_i^{(N)}(t)$ で定義される確率連鎖 Z は move-to-front 規則などの名で半世紀間研究されてきた [4]．にもかかわらず上述の [1] の結果は無かった．

[1] では，解を予想し，差が $N \to \infty$ で 0 になることで証明したので，解の具体形が重要であるが，特に，λ のラプラス変換の逆関数 $t_0(y)$ が半世紀間捕まらなかったと思われる．我々は，解を次の Burgers 型微分方程式系の初期値問題の一意解として見出した．ジャンプ率が高々可算種類 $\lambda = \sum_\alpha \rho_\alpha \delta_{f_\alpha}$ の場合を考える．

定理([2])．$U_\alpha(y,t) = U(\{f_\alpha\},y,t)$ は次の初期値問題の時間大局的一意解である：

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}(y,t) + \sum_\beta f_\beta\, U_\beta(y,t)\, \frac{\partial U_\alpha}{\partial y}(y,t) = -f_\alpha U_\alpha(y,t),\ (y,t) \in [0,1) \times [0,\infty),$$

境界条件：$U_\alpha(0,t) = \rho_\alpha,\ t \geqq 0$，初期値 $U_\alpha(y,0) = U_\alpha(y)$ は非負可微分非増加で $\sum_\beta f_\beta U_\beta(0) < \infty$ と $\sum_\beta U_\beta(y) = 1 - y$ を満たす． ◇

主部の等しい 1 階準線形系なので，特性曲線 y_C の逆関数で解ける [5, §2.3]．極限を特徴づける偏微分方程式という意味で「流体力学」極限の描像が生きた．

3. 応用． 軌道 y_C は web のランキングで実際に観測され，社会・経済活動に関する応用上の成果 (Pareto 指数 $b < 1$) を得た [2,3]．Move-to-front 規則では探索コスト C_N が主に研究されて来たが，これについても，主結果の応用として

$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_\infty[\ \frac{1}{N} C_N > x\ ] = \dfrac{\int w e^{-wt_0(x)}\lambda(dw)}{\int w\lambda(dw)}$ などの公式を得ることができる．

参考文献

[1] K. Hattori, T. Hattori, *Existence of an infinite particle limit of stochastic ranking process,* Stochastic Processes and their Applications **119** (2009) 966–979.
[2] K. Hattori, T. Hattori, *Equation of motion for incompressible mixed fluid driven by evaporation and its application to online rankings,* Funkcialaj Ekvacioj (2009), to appear.
[3] K. Hattori, T. Hattori, *Mathematical analysis of long tail economy using stochastic ranking processes,* preprint (2008).
[1,2,3] は `http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/liamazn.htm` にある．
[4] M. L. Tsetlin, *Finite automata and models of simple forms of behaviour,* Russian Math. Surv. **18**(4) (1963) 1–27.
[5] 熊ノ郷準, 偏微分方程式, 共立出版, 1978. （特性曲線の方法が保証するのは時間局所解だが，初期値が Burgers 型方程式の無衝撃波条件を満たすので大局的に解ける．）