フラクタル上の確率過程における
くりこみ群の視点

服部哲弥　　名古屋大学大学院
多元数理科学研究科

0．序．

講演者はフラクタルの上のいくつかの確率過程とその周辺の研究に関わってきた．

- Sierpiński gasket および abc-gasket 上の漸近一次元拡散の構成および，Sierpiński gasket と Sierpiński carpet における非等方拡散の等方性の回復[17, 26, 27, 24, 25].
- d 次元 Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk の漸近的性質と self-avoiding process の構成[11, 12, 13, 16, 31].
- $\mathbb{R}$ および Sierpiński gasket 上の Brown 運動と self-avoiding process を連続的に内挿する self-repelling process の構成[30].

これらの確率過程は著しく異なる性質を持つが，その発見は一つの視点を手がかりにしてなされた．一見著しく異なる発見を一つの視点から導けるならば，そこに一つの数学的手段があることを期待させる．この視点を，仮にくりこみ群力学系の軌道解析ということにする．くり

こみ群は統計力学および場の量子論の理論物理学の分野で極めて多くの研究がなされた概念と計算手法を総称する用語である．しかし，くりこみ群なる解析手段の，満足な数学的定義はまだない，というのが講演者の認識である[15]．逆に言えば，ここに，これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない．

この講演では，くりこみ群とは，無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの，と(不十分ながら)しておく[28].

(i) 距離空間に値を取る確率過程(path上の測度)の距離空間のスケール変換に対応する変化(測度空間の上の力学系)を「適切な」パラメータ空間上の力学系として表現すること．

(ii) 元の問題から決まる初期条件(canonical surface)からの軌道が大局的に「素直」なこと．

(iii) 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること．

（第１点について，対象が広げられることをこの文書の最後に触れる．）

以下では，最初に列挙した研究からいくつか概要を説

明し，それらを導く際の手がかりとなったくりこみ群という視点について説明したい．

１．$\mathbb{R}$ 上の self-repelling process．

原点から出発して $\mathbb{Z}$ 上を動く 1 次元 simple random walk X_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, は連続極限(スケーリング極限) $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon X_{[t/\epsilon^2]}$ が存在して，原点から出発するブラウン運動になる．

Simple random walk はマルコフ性を持つ，即ち，過去に通ったかどうかに関係なく，次の時刻には，今いる場所の両隣の整数点に等確率で移る．この点での反対の極端として，過去に通った点は通らない，という条件を付け加えた path ，または，その上に support された測度，を self-avoiding walk という. 原点から出発する $\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding walk は，左または右にまっすぐ進むものしかない．そのスケーリング極限 self-avoiding process は等速度直線運動である．

Walk やそのスケーリング極限としての process の sample path の重要な性質に,「path のギザギザの度合い」がある．何らかの意味で walk X_n について $|X_n| \approx n^{\gamma}$, $n \to \infty$ (または連続極限 $X(t)$ について $|X(t)| \approx t^{\gamma}$, $t \downarrow 0$) と書けるときの γ がそれを表す. $1/\gamma$ は walk (path) dimension と呼ばれる．Walk の mean square displacement $\mathrm{E}[\,|X_n|^2\,] \approx n^{2\gamma}$, 連続極限 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{\gamma} X_{[t/\epsilon]}$

が自明でない連続確率過程になるための指数 γ, path のハウスドルフ次元や Hölder 連続性の modulus, などを与える．

Simple random walk (ブラウン運動) では $\gamma = 1/2$ であり，等速度直線運動では $\gamma = 1$ である．両者を内挿する walk (process) の族は研究されてきた（例えば，[9, 22, 23]）が，これまで γ を連続的につなぐものは見つかっていなかった．我々は，この問に肯定的に答えることができた．

定理 1． C を $w(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} w(t) = 1$ を満たす連続関数 $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ の集合とする．C 上の確率測度の族 P_u, $u \in [0, 1]$, であって以下を満たすものが存在する．

(i) P_1 は原点から出発して 1 で吸収した 1 次元ブラウン運動で，$+1$ を -1 より先に hit するという条件をつけたもの．

(ii) P_0 は原点から出発して 1 で止まる等速直線運動に集中した分布．

(iii) $u \in [0, 1]$ に対して P_u は弱収束の意味で u について連続．

(iv) $u \in [0, 1]$ に対して連続な $\gamma = \gamma_u < 1$ が存在して，各 u 毎に以下が成り立つ．

(a) 任意の正数 M と γ より小さい任意の正数 γ' に対し

て確率1で $b=b(w)$, $H=H(w)$ が存在して，

$$|w(t+h)-w(t)| \leqq b|h|^{\gamma'}, \quad t\in[0,M], \ |h|\leqq H.$$

(b) 任意の正数 p に対して正数 C_1, C_2 が存在して

$$C_1 \leqq \varliminf_{t\downarrow 0} t^{-p\gamma}\mathrm{E}_u[\,|X(t)|^p\,] \leqq \varlimsup_{t\downarrow 0} t^{-p\gamma}\mathrm{E}_u[\,|X(t)|^p\,] \leqq C_2\,.$$

(c) 正数 C_3, C_4 が存在して，確率1で

$$C_3 \leqq \varlimsup_{t\downarrow 0} t^{-\gamma}(\log\log(1/t))^{\gamma-1}\,X(t) \leqq C_4.$$

$\diamond$

定理1は，具体的なwalkの族の連続極限を取って連続確率過程を構成して証明した．連続極限による確率過程の構成は，直感的には，あるスケールの構造(ギザギザ)までを考慮に入れた後，次の細かさの構造を追加していく，ということである．ある歩幅のpathに対して，その一歩一歩を一段細かい歩幅のpathで置き換えることをくりかえすことで，連続かつ $\gamma\neq 1$ なる確率過程を得る．

ある点に達するまでに要する歩数は歩幅を狭くすると増えるので，時間を歩数で計ると極限でpathが自明になる(動かない)．そこで，一歩の時間を小さくしながら極限をとる．しかし，一歩の時間を急速に短くすると一気に遠

くまで行ってしまって，極限でpathの連続性が失われる(連続関数上の確率測度として弱収束しなくなる)．歩幅を狭くすると同時に一歩の時間を適切に短くしながら極限を取らないといけない．このため，path の歩数の分布が path の細かさを増やすときどう変化するか（漸近的な振る舞い）が問題のかなめである．

話を具体的にするために，以下の条件を満たす $w \in C$ の集合（歩幅 2^{-n} の paths）を W_n とおく．

(i) -1 を hit せず 1 を hit したら止まる．

(ii) 整数時刻 $i \in \mathbb{Z}_+$ では，止まるまでは $|w(i+1)-w(i)| = 2^{-n}$ を満たす $2^{-n}\mathbb{Z}$ 上の path ($w|_{\mathbb{Z}_+}$: $\mathbb{Z}_+ \to 2^{-n}\mathbb{Z}$) である．

(iii) 非整数時刻では $w(i)$ と $w(i+1)$ の線型内挿(等速度運動)になっている．

歩幅の変化と歩数分布の変化の対応をみるために，W_n と W_{n+1} を次のように対応させる．$w \in W_n$ の各一歩 $w(t)$, $t \in [i, i+1]$, に対して，W_1 の path を一つとって空間的に 2^{-n} 倍し，0, 2^{-n} がそれぞれ $w(i)$, $w(i+1)$ に移る線型写像で移した path v_i を考える．各 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対して $w(t)$, $t \in [i, i+1]$, を v_i で置き換えると W_{n+1} の path を得る．この対応は一対一なので，path w の総歩数を $L(w)$ とおくと，その母関数

$\Phi_{1,n}(z) = \sum_{w \in W_n} z^{L(w)}$ は recursion

$$\Phi_{1,n+1}(z) = \Phi_{1,n}(\Phi_{1,1}(z))), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

を満たす.

$\Phi_{1,1}$ は W_1 の数え上げによって

$$\Phi_{1,1}(z) = \frac{z^2}{1-2z^2} \tag{2}$$

となる. (1) と (2) が全ての path を平等に取り入れた場合の歩数の母関数を定める.

Path を self-avoiding なものだけに制限すると, $\mathbb{R}$ 上では 0 から 1 への等速度運動だけだから, 対応する母関数 $\Phi_{0,n}$ は (2) の代わりに

$$\Phi_{0,1}(z) = z^2 \tag{3}$$

を満たす. $\Phi_{0,n}$ も (1) と同じ形の recursion

$$\Phi_{0,n+1}(z) = \Phi_{0,n}(\Phi_{0,1}(z))), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

を満たすことは容易に分かる.

漸化式 (1), (4) は, path を歩幅 2^{-n} 単位でみた W_n と 2^{-n-1} 単位で見た W_{n+1} の関係, 即ち, 長さを半分にするスケール変換に対する path 集合の変化, を歩数の母関数の変数の上の写像 $\Phi_{u,1}$ で表現している. すぐ説明するように,

$\Phi_{u,1}$ の固定点 ($\Phi_{u,1}(x_{u,c}) = x_{u,c} > 0$ なる $x_{u,c}$) とそこでの微分 $\lambda = \Phi'_{u,1}(x_{u,c})$ が path の漸近的性質と連続極限のとりかたを決める．その意味で (4) や (1) がこの問題における**くりこみ群**である．

この時点では $\Phi_{u,n}$ と確率過程の対応をまだ説明していないが，ひとまず $\Phi_{1,n}$ が random walk と Brown 運動に対応し，$\Phi_{0,n}$ が self-avoiding walk と等速度運動に対応することを認めてもらう. そうすると両者を内挿する，即ち，定理 1 を得る，ためには，くりこみ群 (1), (4) を一般化した

$$\Phi_{u,n+1}(z) = \Phi_{u,n}(\Phi_{u,1}(z)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

を $0 \leqq u \leqq 1$ に対して要請した上で (3) と (2) を内挿すればよさそうにみえる．それを実現するのはやさしい．

$$\Phi_{u,1}(z) = \frac{z^2}{1 - 2u^2 z^2}, \quad 0 \leqq u \leqq 1. \tag{6}$$

そして，実際にこれが定理 1 の path measure の族を与える．こうして，これまで研究が複数あったにもかかわらず誰も見つけることのできなかった確率過程の族を，(3) と (2) を内挿する (6) を見つけるだけで発見することができた．くりこみ群 (5) を第一原理として守ったことが成功の本質である．

くりこみ群から得られた $\Phi_{u,n}$ を確率過程の言葉に翻訳する作業が残っている．このために次の事実に注意しておく [30], [32, §4,§B].

命題２． $c_k \geqq 0,\ k=2,3,4,\cdots,$ に対して

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k \tag{7}$$

の収束半径は正で，$c_2 > 0$ 以外にも正のものがあるとする．Φ_1 の正の固定点を x_c

$$\Phi_1(x_c) = x_c > 0$$

とし，$\lambda = \Phi_1'(x_c)$ とおく．このとき (5) で定義された Φ_n について

$$\int_0^{\infty} e^{-s\xi} p_n(d\xi) = \frac{1}{x_c} \Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s} x_c)$$

で定まる $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 p_n は，$n \to \infty$ で $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 p^* に弱収束する．p^* は (ルベーグ測度に対して) 密度 ρ を持つ．ρ の support は $\mathbb{R}_+$ に一致し，遠方で指数関数的に decay する． $\diamond$

命題２の仮定が成り立ち，さらに，$w \in W_1$ に対して非負実数 $d(w)$ が存在して (7) の c_k が $c_k = \displaystyle\sum_{w \in W_1;\ L(w)=k} d(w)$ と書けるとき，

$$\mathrm{P}_1[\ w\ ] = d(w) x_c^{L(w)-1}, \quad w \in W_1, \tag{8}$$

で C 上の確率測度を定義すると，(5) と整合するように W_n 上に support された P_n が帰納的に定義できる．命題 2 によって， $\mathrm{P}_n[\,dw\,]$ の下での $w(\lambda^n t)$ の分布は $n \to \infty$ のとき C 上の確率測度に弱収束し，極限測度の path の性質を決める γ は

$$\gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda} \tag{9}$$

で与えられる[30]．例えば，$u = 1$ の場合は (2) から $x_c = x_{1,c} = 1/2$， $\lambda = \lambda_1 = 4$， $\gamma = \gamma_1 = 1/2$ となり，simple random walk とその極限の Brown 運動に対応している．

命題 2 の仮定にパラメータ u に関する連続性や一様性の仮定を追加すると $\gamma = \gamma_u$ の連続性等が保証される．これらを経由して (5) と (6) から定理 1 を得る．

2．Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk．

前節では，くりこみ群の固定点に対応する walk を考察したので，くりこみ群力学系の解析としては自明(0 次元空間上のくりこみ群)であった．大局的な軌道解析を要する場合として Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk の漸近的性質の話に転じる．

$O = (0,0)$, $a = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $b = (1,0)$, とおき，三角形 Oab の辺と頂点上の点の集合を F_0 とおく．$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ を帰納

的に，

$$F_{n+1} = F_n \cup (F_n + 2^n a) \cup (F_n + 2^n b), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

で定義する． F_n たちを有限pre-Sierpiński gasketと呼び，$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ を(無限)pre-Sierpiński gasket という．また，$\bigcup_{n=0}^{\infty} 2^{-n} F_n$ の閉包 $\tilde{F}$ を有限Sierpiński gasketという.

Self-repelling process の構成(定理 1)は有限Sierpiński gasket の上でも，$\mathbb{R}$のときとほぼ同様に可能である[30]．ところで，その両極端，Brown運動とself-avoiding processはどちらもSierpiński gasketと $\mathbb{R}$ では著しく異なる．中でもself-avoiding process は $\mathbb{R}$ 以外では自明でない.

Self-avoiding walk および self-avoiding processは，フラクタル上に限らず, random walkやBrown運動に比べて難しい．Self-avoiding walkは過去に通った点は通らないという制約条件のため，マルコフ性を欠くからである．無限に細かい構造を持つself-avoiding processは存在するかどうか自体が，特に低次元空間で殆ど知られていないが，Sierpiński gasketおよび3次元Sierpiński gasketでは存在する.

定理 3． C を $w(0) = 0, \lim_{t \to \infty} w(t) = a$ を満たす $\tilde{F}$ 上の連続関数の集合とする．このとき C 上のボレル測度 P で以下を満たすものが存在する.

(i) a を hit する前は P-確率 1 で self-avoiding ($t \neq t'$ ならば $w(t) \neq w(t')$).

(ii) P-確率 1 で $\{w(t) \mid 0 \leqq t < \infty\}$ の Hausdorff 次元は 1 より大.

$\diamond$

一般に高次元 Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群は高次元空間上の力学系になるが，定理 3 の Hausdorff 次元は，くりこみ群のある不変領域の中の唯一の固定点におけるヤコビ行列の最大固有値 λ から (9) によって得られる γ を用いて，$1/\gamma$ になる．Hausdorff 次元が 1 より大きいということは無限に細かいぎざぎざがあることを意味するが，くりこみ群ではこのように，ぎざぎざの様子がヤコビ行列の最大固有値として自然にとらえられる．

定理 1 における (5) と同様，定理 3 の証明も，対応する self-avoiding walk のくりこみ群に基づいて，命題 2 (の高次元拡張) を経由して行う [12, 16].

Walk の連続極限として連続確率過程を構成することは，walk の歩数が大きいときの漸近的性質に対応する．

定理 4． 無限 pre-Sierpiński gasket F を構成する単位正三角形の頂点たちの集合を G とおき，原点から出発する self-avoiding walk $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$ で，各時刻毎に前の時刻の隣の点

に移るものの集合を $W^{(0)}$ とする．正整数 k に対して，$W^{(0)}$ の要素 w で総歩数 $L(w)=k$ のものの上の一様分布を P_k と書く．このとき

$$\lim_{k\to\infty}(\log k)^{-1}\log \mathrm{E}_{P_k}[\,|w(k)|^{s\gamma}\,]=s,\quad s\in\mathbb{R}.$$

ここで γ は定理 3 の説明で言及した γ である． ◇

定理 4 は mean square displacement の指数が γ であることを意味し，Sierpiński gasket で成り立つ [11, 13] 他に 3 次元 Sierpiński gasket でも成り立ち [16]，また，4 次元 Sierpiński gasket 上の restricted model でも成り立つ [31].

定理 3 はくりこみ群の(適切な)固定点が見つかれば証明可能だが，定理 4 はくりこみ群の大局的な軌道解析が本質的である．このことを説明するために，Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群を簡単に紹介する．

1つの三角形の通り方は1歩で通り抜けるか折れ曲がって2歩で通るか2通りである．F_n の O から $2^n a$ までの self-avoiding walk のうちで $2^n b$ を通るものと通らないものの集合をそれぞれ $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ とする．Path w に対して，単位三角形のうち 1歩で通り抜けるものの個数を $s_1(w)$, 2歩で通り抜ける

ものの個数を $s_2(w)$ とし，その結合母関数を

$$\vec{\Phi}_n = (\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2});\quad \Phi_{n,i}(x,y) = \sum_{w\in W_{n,i}} x^{s_1(w)} y^{s_2(w)},\quad i=1,2,$$

とおく．F_n の各単位三角形を F_1 と合同な図形で置き換えれば $2^{-1}F_{n+1}$ が得られることから，(5) を多次元にした

$$\vec{\Phi}_n(\vec{z}) = \vec{\Phi}_{n-1}(\vec{\Phi}_1(\vec{z})),\quad \vec{z} = (x,y), \tag{10}$$

を得る．これがこの問題の**くりこみ群**である．$\vec{\Phi}_1$ は具体的に数えると，

$$\vec{\Phi}_1(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy). \tag{11}$$

総歩数 $L(w)$ を固定したときの振る舞いは $L = s_1 + 2s_2$ の母関数の振る舞いから Tauber 型の定理を経由して得られるから，$y = x^2$ とした $\Phi_{n,i}(x,x^2) = \sum_{w\in W_{n,i}} x^{L(w)}$ を調べたい．(この場合の $\{(x,y)\in {\mathbb{R}_+}^2 \mid y = x^2\} \subset {\mathbb{R}_+}^2$ のような，調べたい部分集合を canonical surface という．)

他方 $\vec{\Phi}_1$ の，第 1 象限における原点以外の固定点は (11) から $\vec{x}_c = (\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 0)$ なので，canonical surface の上にはない．従って，self-avoiding walk の漸近的性質を調べるためには，(10) で定まる力学系の軌道のうちで，canonical surface から固定点 $\vec{x}_c$ に向かうもの (critical surface) を探す必要があ

る．この意味で固定点だけではなく大局的な軌道解析が必要である．

d次元Sierpiński gasketの場合，対応するくりこみ群の固定点は$\mathbb{R}_+^{[d/2]}$上のくりこみ群の固定点として与えられる．Self-avoiding walkの漸近的性質が次元dによって著しく異なると考えられていることから考えればくりこみ群がdによって大きく変わることは不思議なことではないけれども，self-avoiding walkは，random walkと異なり，Sierpiński gasketにおける結果の高次元Sierpiński gasketへの一般化が極めて困難であることを示唆する．

くりこみ群の軌道の振舞いからself-avoiding walkの振舞を得るのは短い話ではないが，最近，d次元gasket上のself-avoiding walkが定理4の漸近的性質を持つための十分条件をくりこみ群の言葉（ある不変部分空間における固定点の存在とcanonical surfaceからの軌道の収束，および若干の技術的条件）で記述することができた[31]．Self-avoiding walkの漸近的性質の問題を，くりこみ群の大局的軌道解析の問題と，walkの漸近的性質への翻訳の2つの問題に分離し，後者については解決したことになる．裏返せば，高次元Sierpiński gasket上のself-avoiding walkの性質が空間次元dに

強く依ることは，くりこみ群がdによって大きく変わることを示す．この意味でくりこみ群の軌道解析がself-avoiding walkの次元依存性の本質であることが分かった．

３．Sierpiński gasket，Sierpiński carpet上の非等方拡散の等方性の回復．

マルコフ性を持たない確率過程におけるくりこみ群の役割を強調したが，フラクタル上では拡散過程においても，くりこみ群の大局的軌道の解析が重要な現象がある．漸近一次元拡散の存在，および，それと表裏一体の関係にある非等方拡散の等方性の回復という現象の発見について説明する．

フラクタル上の拡散過程の研究ではこれまで対応するくりこみ群の固定点に対応するrandom walkの連続極限として得られるものが主に考察されてきた．この場合，元のフラクタルの部分図形だけにしか遷移しない（例えば左右方向への遷移のみが許される）random walkに対応する固定点では，元のフラクタル上の拡散とは言えない．このため，固定点に対応するrandom walkが十分いろんな方向への遷移を可能にする条件（非退化固定点であること）が必要である．よく用いられるnested fractalというフラク

タルの族は，random walk に対応するくりこみ群に非退化固定点が存在するための十分条件を満たす族として定義された．

ところで，退化固定点が不安定な固定点ならばそれに基づいてフラクタル全体に広がる拡散が構成できる．払うべき費用は自己相似でないということだけである．この拡散を漸近一次元拡散と呼ぶ[17].

各頂点で，水平(x軸に平行な)方向に比べて各斜め方向への遷移確率がr倍であるようなpre-gasket F上のrandom walkを考える．例えば水平方向の辺が1本，斜め方向の辺が3本集まっている頂点では水平方向への遷移が確率$1/(1+3r)$, その他の方向へは確率$r/(1+3r)$で起こる．これらに基づいてF_1で$2a$を最初にhitする確率と$2b$を最初にhitする確率を計算し，その比をとることで，相対確率r_nのrecursionとして，

$$r_{n+1} = f(r_n), \quad f(r) = \frac{4r + 6r^2}{3 + 6r + r^2}, \tag{12}$$

を得る．fの非負固定点$f(r) = r \geqq 0$は0と1である．$r = 0$は直線に沿ってのsimple random walkに対応し，$r = 1$は等方的なrandom walkに対応する．また，(12)から$r_0 > 0$ならば$\lim_{n\to\infty} r_n = 1$となること，即ち大きな距離で眺めると等方性が

回復することが分かる．他方，連続極限を取るときは，細かい構造を見るので，上記を逆に解いて得られるくりこみ群の無限逆軌道が必要であるが，$n \to -\infty$ で $r_n = O((3/4)^{-n})$ のように固定点に近づく逆軌道が存在する．((12) は (5) や (10) のような母関数に対するrecursionではない．母関数に対するrecursionを書くためには，多次元空間の上の写像を考えないといけない[27]ので，簡単のためにrecursionが1次元になる相対遷移確率について説明した[17].)

等方性の回復現象は一様な空間$\mathbb{R}^d$にはない，新しい現象である[24]. また，Sierpiński gasket だけでなく，Sierpiński carpet と呼ばれるフラクタルでも $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, r_n$ が初期値 $r>0$ によらない正定数で上下からboundできることが分かっている[25].(Sierpiński carpet では対応するくりこみ群が無限次元になるので問題は難しくなるが，非退化固定点の付近で重要になる部分空間にくりこみ群のrecursionを射影して得られる不等式を立てることで結果を得ることができる.)

このように問題をくりこみ群力学系の軌道解析としてformulateすることで，系固有の特徴的な現象を見抜くことができる．しかも，単にSierpiński gasket に固有の方法ではなく，普遍性がある．

4．4次元 hierarchical Ising model の臨界軌道の存在．

くりこみ群の軌道解析が有効なのはフラクタル上の確率過程だけではない．元々，くりこみ群の描像は，スピン系の統計力学から始まったが，その分野でもくりこみ群に基づく数学的な解析が行われてきた．この分野に関して次の研究に関わった．

- 4次元 hierarchical Ising model における Gauss 測度に収束する block spin 変換軌道の存在 [29].

フラクタル上の確率過程とスピン系の統計力学のように全く異質な問題であっても，くりこみ群の大局的な軌道解析が本質的であるという一貫した視点があることを紹介したい．

集合 Λ を index とする変数(スピン変数) を $\varphi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\} \in \mathbb{R}^\Lambda$ のように書く．$\mathbb{R}^\Lambda$ 上の測度

$$\rho(\varphi)d\varphi = e^{-\frac{\beta}{2}(\varphi,C\varphi)}e^{-V(\varphi)}d\varphi$$

を考える．C は $\Lambda \times \Lambda$ の行列で，

$$(\varphi, C\varphi) = \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} C_{ij}\varphi_i\varphi_j\,.$$

$\beta > 0$ は実パラメータ.

$\mathbb{Z}^d$ 上の強磁性スピン系の平衡系統計力学と呼ばれるモデルでは $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ である．最も素朴なモデルの場合は，$C_{ij} = 1\ (|i-j| = 1),\ = 0\ (|i-j| \neq 1)$，かつ，$e^{-V(\varphi)} = \prod_{i\in\Lambda} h(\varphi_i)$ ととる．無限体積極限 $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ における，大きなスケールの振る舞い（例えば，i と j が大きく離れているときの $\mathrm{E}[\,\varphi_i\varphi_j\,]$ の振る舞い，などの意味）に興味がある．

h が，± 1 の付近に最大値を持つ場合を考える．この測度の下での「典型的な」sample φ は，$(\varphi, C\varphi)$ によって i と j が近いときは φ_i と φ_j が近い値を持ち，遠くなれば相関は小さい，と考えられる．β が大きいときは遠くまで値が近い可能性が大きいが，β が 0 に近いと各 φ_i は殆ど独立である．そこで途中のある値 β_c で，「φ_i の値は遠くまで近いが，全体としては異なる値が混在する」のが典型的な sample となりうる．このような $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$ (configuration) として，「$+$ の海の中に大きな $-$ 符号の陸がいくつかあり，そのそれぞれの中にかなり大きな $+$ 符号の海があって，それが小さなスケールまで繰り返される」というフラクタル的な構造が考えられてきた．β_c の近くでは，あらゆるスケールの構造を持つ configuration が典型的だろう．ここにくりこみ群解析の可能性がある．

スピン系のくりこみ群解析で標準的に行われるスケール変換はblock spin変換である．これは，正定数a（波動関数のくりこみ）と$\Lambda' \subset \Lambda$でラベルされたΛのブロック分割

$$\Lambda = \bigcup_{i' \in \Lambda'} \mathbb{B}_{i'}$$

が与えられたとき，$\mathbb{R}^{\Lambda'} \times \mathbb{R}^{\Lambda}$ 行列 $B = (B_{i'\,i})$ を

$$(B\varphi)_{i'} = a \sum_{i \in \mathbb{B}_{i'}} \varphi_i \tag{13}$$

で定義すれば，

$$(\mathcal{R}\rho)(\varphi') = e^{-\frac{1}{2}(\varphi', (\mathcal{R}C)\varphi')} e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} = \int \delta(\varphi' - B\varphi)\, \rho(\varphi)\, d\varphi \tag{14}$$

で $\mathbb{R}^{\Lambda}$ 上の確率測度から $\mathbb{R}^{\Lambda'}$ 上の確率測度への写像$\mathcal{R}$を考えることである．

$\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系では，元の e^{-V} がsingle site measureの直積でも，$e^{-\mathcal{R}V}$ はそうではなくなる（フラクタルとしてみたときにinfinitely ramifiedであることに対応する）．一般に$\mathbb{Z}^d$上のスピン系のくりこみ群は非常に難しい．

(14)で直積測度が直積測度に写るモデルとしてhierarchical modelが知られている[1, 3, 4]．Lを自然数，$\Lambda_L = \{0,1\}^L = \{i = (i_L, \cdots, i_2, i_1) \mid i_k = 0, 1,\ k = 1, 2, \cdots, L\}$ とし，

$$(\varphi, C\varphi) = (\varphi, C_L\varphi) = -\sum_{n=1}^{L} \left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{i_L, \dots, i_{n+1}} \left(\sum_{i_n, \dots, i_1} \varphi_{i_L, \dots, i_1} \right)^2,$$

かつ，$e^{-V(\varphi)} = \prod_{i\in\Lambda_L} h(\varphi_i)$ ととったとき，hierarchical model という.

Hierarchical modelについて，block spin変換 (13) として，

$$\varphi'_\tau = \frac{\sqrt{c}}{2} \sum_{i_1=0,1} \varphi_{\tau i_1}\,,\ \tau = (\tau_{L-1}, ..., \tau_1),$$

を選び，$\mathcal{R}C = C_{L-1}$ とおくと，

$$\mathcal{R}h(x) \propto \exp(\frac{\beta}{2}x^2) \int_{\mathbb{R}} h(\frac{x}{\sqrt{c}} + y) h(\frac{x}{\sqrt{c}} - y)\, dy,\ x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

を得る．ここで $e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} = \prod_{i\in\Lambda'} (\mathcal{R}h)(\varphi'_i)$ とおいた．このように，hierarchical modelでは，くりこみ群は$\mathbb{R}$上の測度の集合の上の力学系にreduceする.

Hierarchical modelのくりこみ群 (15) はGauss測度 $h_G(x) \propto \exp(-\frac{1}{4}x^2)$ を固定点に持つ．このときの $\mathbb{Z}^d$ の場合との対応から，φ のnormalizationを $\beta = c^{-1} - 2^{-1}$ で定めると $c = 2^{1-2/d}$ によってhierarchical modelにおける d が決まる.

くりこみ群の軌道 $h_N = \mathcal{R}^N h_0,\ N = 0, 1, 2, \cdots,$ の解析に関しては，特にGauss固定点 h_G の近傍で詳細に調べられてきた [3, 4]. 他方，h_G から離れた領域は，$d = 3$ における非Gauss固定点の存在証明がある[18, 19]が，他にはほとんど分かっていない．$d \geqq 4$ では h_G から離れた点から出発しても単位分布以外に収束する軌道は h_G に収束すると予想されてき

た (triviality). この問題に関して，次の結果を得た [29].

定理 5． $s \geqq 0$ をパラメータとする $\mathbb{R}$ 上の測度の族

$$h_{\mathrm{I},s}(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)), \tag{16}$$

を single site measure h とする hirarchical model (hierarchical Ising model) について， $d \geqq 4$ ならばある $s_c > 0$ が存在して，(15) のくりこみ群軌道 $\mathcal{R}^N(h_{\mathrm{I},s_c})$ は $N \to \infty$ のとき Gauss 固定点 h_G に弱収束する． $\diamond$

Hierarchical Ising measure は Gauss measure とは大きく異なる．Hierarchical model において，ガウス固定点近傍の外側からの大局的な軌道の厳密な追跡に成功したのは初めてである．

参考文献

[1] F. J. Dyson, *Exisitence of a phase–transision in a one–dimensional Ising ferromagnet,* Commun. Math. Phys. **12** (1969) 91–107.

[2] K. Gawedzki, A. Kupiainen, *A rigorous block spin approach to massless lattice theories,* Commun. Math. Phys. **77** (1980) 31–64.

[3] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transition: rigorous results,* Pergamon Press, 1982.

[4] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Triviality of ϕ_4^4 and all that in a hierarchical model approximation,* Journ. Stat. Phys. **29** (1982) 683–699.

[5] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Asymptotic freedom beyond perturbation theory,* in K. Osterwalder and R. Stora eds., *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories,* Les Houches 1984, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[6] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Massless lattice ϕ_4^4 Theory: Rigorous control of a remormalizable asymptotically free model,* Commun. Math. Phys. **99** (1985) 199–252.

[7] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal,* Proc. Taniguchi Symp. (1987) 251–274.

[8] M. T. Barlow, E. A. Perkins, *Brownian Motion on the Sierpinski Gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **79** (1988) 543–623.

[9] E. Bolthausen, *On self-repellent one dimensional random walks,* Probab. Theor. Relat. Fields **86** (1990) 423–441.

[10] T. Lindstrøm, *Brownian motion on nested fractals,* Mem. Amer. Math. Soc. **420** (1990) 1–128.

[11] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **84** (1990) 1–26.

[12] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **88** (1991) 405–428.

[13] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **93** (1992) 273–284.

[14] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions, I, the critical behaviour,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 101–136.

[15] 服部哲弥，２０４１年くりこみ群の研究，統計数理研究所リポート **48** (1993.10) 139–147.

[16] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[17] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the abc-gaskets,* Probab. Theor. Relat. Fields **100** (1994) 85–116.

[18] H. Koch, P. Wittwer, *A nontrivial renormalization group fixed point for the Dyson–Baker hierarchical model,* Commun. Math. Phys. **164** (1994) 627–647.

[19] H. Koch, P. Wittwer, *Bounds on the zeros of a renormalization group fixed point,* Mathematical Physics Electronic Journal **1** (1995) No. 6, 24pp..

[20] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding-walk and percolation critical points in high dimensions,* Combinatrics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[21] C. Sabot, C. R. Acad. Sci. Paris, Series I (1995) 715–720.

[22] D. C. Bryges, G. Slade, *The diffusive phase of a model of self-interacting walks,* Probab. Theor. Relat. Fields **103** (1995) 285–315.

[23] B. Tóth, *The 'true' self-avoiding walk with bond repulsion on $\mathbb{Z}$: Limit theorems,* Ann. Probab. **23** (1995) 1523–1556.

[24] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3042–3045.

[25] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* Commun. Math. Phys. **188** (1997) 1–28.

[26] T. Hattori, *Asymptotically one-dimensional diffusions on scale-irregular gaskets,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **4** (1997) 229–278.

[27] T. Hattori, H. Watanabe, *Anisotropic random walks and the asymptotically one-dimensional diffusions on the abc-gaskets,* Journal of Statistical Physics **88** (1997) 105–128.

[28] 服部哲弥, フラクタルにおける対称性の回復, 数理科学 (1997.4) 55–62.

[29] T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions,* Commun. Math. Phys. **220** (2001) 13–40.

[30] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling Walk on the Sierpiński Gasket,* preprint (2001).

[31] T. Hattori, T. Tsuda, *Asymptotic properties of self-avoiding paths on d-dimensional Sierpiński Gasket from renormalization group analysis,* preprint (2001).

[32] 服部哲弥,「数理物理学」講義録, 2001,

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/～hattori.