19980414–
服部哲弥，津田稔朗
v19980609;10;11;1018(落合訂正);

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例

１．測度，外測度，ルベーグ測度 ([1]–[10])

[**1**] (H6 お茶大 8).

(1) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ はともに σ 加法族だから $\Omega \in \mathcal{A}$ かつ $\Omega \in \mathcal{B}$．故に $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は空でない．$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ならば $A \in \mathcal{A}$ かつ $A \in \mathcal{B}$．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は σ 加法族だから $A^c \in \mathcal{A}$ かつ $A^c \in \mathcal{B}$．故に $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は補集合について閉じている．同様に $A_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, n = 1, 2, \cdots,$ とすると，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$．故に $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は可算和について閉じている．以上より，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は σ 加法族である．

(2) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ とすると，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ である．$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が σ 加法族ならば有限和について閉じていなければならないが，$\{1\}$ と $\{2\}$ がともに $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ に入っているのに，$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ は $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ に入っていない．よって σ 加法族ではない．

[**2**] (H6 千葉大 9).

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathbf{R}$ の有限加法族だから $\mathbf{R} \in \mathcal{A}$．故に $\mathcal{C} \ni \xi^{-1}(\mathbf{R}) = \Omega$．即ち $\mathcal{C}$ は空ではない．$\xi^{-1}(A) \in \mathcal{C}$ かつ $A \in \mathcal{A}$ とすると，$(\xi^{-1}(A))^c = \xi^{-1}(A^c)$ と $\mathcal{A}$ が補集合に関して閉じていることより $\xi^{-1}(A)^c \in \mathcal{C}$ となり，$\mathcal{C}$ は補集合について閉じている．同様に，$i = 1, 2$ に対して $\xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{C}$ かつ $A_i \in \mathcal{A}$ とすると，$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ となり，他方，$\xi^{-1}(A_1) \cup \xi^{-1}(A_2) = \xi^{-1}(A_1 \cup A_2)$ だから，$\mathcal{C}$ は和集合について閉じている．故に $\mathcal{C}$ は有限加法族である．

(2) $\displaystyle\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supset \mathcal{C};\\ \mathcal{B}\text{ は }\sigma\text{ 加法族}}} \mathcal{B}$ ととればよい．

(3) 問題文の式の右辺の集合族を $\mathcal{F}$ とおく．$\mathcal{A} \subset \sigma[\mathcal{A}]$ と (1) から $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ を得るから，$\mathcal{F}$ が σ 加法族ならば，$\sigma[\mathcal{C}]$ が $\mathcal{C}$ を包含する最小の σ 加法族であることより，$\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{F}$ を得る．$\mathcal{F}$ は，$\mathcal{C}$ を含んでいることから空でなく，$\sigma[\mathcal{A}]$ が σ 加法族であることに注意すれば (1) と似た議論で $\mathcal{F}$ が補集合と可算和について閉じていることが言えるので，σ 加法族である．
逆向きの包含関係，即ち，$\sigma[\mathcal{C}] \supset \mathcal{F}$ を言う．$\mathcal{H} = \{A \in \sigma[\mathcal{A}] \mid \xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]\}$ とおく．(1) より $A \in \mathcal{A}$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{C}$ だから $\mathcal{H} \supset \mathcal{A}$．従ってもし $\mathcal{H}$ が σ 加法族ならば $\mathcal{H}$ は $\sigma[\mathcal{A}]$ を包含する．即ち，$A \in \sigma[\mathcal{A}]$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]$ が成り立つので $\sigma[\mathcal{C}] \supset \mathcal{F}$ が成立する．あとは $\mathcal{H}$ が σ 加法族であることを証明すれば良い．
$A \in \mathcal{H}$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]$ だから $\sigma[\mathcal{C}]$ が σ 加法族であることより (1) と同様の議論で $A^c \in \mathcal{H}$ になる．$\mathcal{H}$ が可算和について閉じていることも同様に言える．よって $\mathcal{H}$ は σ 加法族であるから，既に注意したことにより，(3) が成立する．

[**3**] (H9 富山大 B V)．成立しない．例えば $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を実数 $\Omega = \mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とし，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $E_n = [n, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq n\} \in \mathcal{F}$ とおくと，$\{E_n\}$ は単調減少で $\mu(E_n) = \infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$．故に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$ だが $\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = 0$ である．

[**4**] (S61 お茶大 5).

(1) $K = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ とおく．K の定義から $\mathcal{A}$ に属する集合の列 $A_n, n = 1, 2, 3, \cdots,$ で $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = K$ となるものがある．$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が求める性質を持つことを証明する．$\mathcal{A}$ は可算和に関して閉じているから $B \in \mathcal{A}$ であり，従って K の定義から $\mu(B) \le K$ である．他方，任意の n に対して $A_n \subset B$ だから，測度の単調性より $\mu(B) \ge \mu(A_n)$ が任意の n に対して成り立つことになるから $\mu(B) \ge K$ でもある．故に $\mu(B) = K$ である．

(2) $\mu(A \cap B^c) > 0$ となる $A \in \mathcal{A}$ があると仮定する．$\mathcal{A}$ は可算和について閉じているから，有限和についても閉じているので $A \cup B \in \mathcal{A}$ であり，測度の加法性から $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B) > \mu(B)$ となる（ここで $\mu(\Omega) < \infty$ だから $\mu(B) < \infty$ なので等号は生じないことを用いた）．これは (1) の B の定義と矛盾する．よって $A \in \mathcal{A}$ ならば $\mu(A \cap B^c) = 0$ である．

背理法を陽に用いない別証明 (19980824 落合啓之先生).　$\mathcal{A}$ は可算和について閉じているから有限和についても閉じるので，$A \cup B \in \mathcal{A}$. 測度の加法性と K および B の定義から

$$K \ge \mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B) = \mu(A \cap B^c) + K\,.$$

$K \le \mu(\Omega) < \infty$ だから両辺から K を引けば $0 \ge \mu(A \cap B^c)$ を得るが，測度の非負値性から $\mu(A \cap B^c) = 0$ となる．

[**5**] (S61 九大 IX).

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$ だから $\mathcal{B}$ は空でない．$A \in \mathcal{B}$ ならば $A = (A^c)^c$ または A^c が高々可算集合だから，$A^c \in \mathcal{B}$. $A_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \cdots,$ ならば, 各 n 毎に A_n または ${A_n}^c$ が高々可算集合．全ての自然数 n に対して A_n のほうが高々可算集合ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が高々可算集合なので $\mathcal{B}$ に入る．そうでなければ ${A_m}^c$ が高々可算集合になる自然数 m があるので $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \subset {A_m}^c$ は高々可算集合となるからやはり $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ である．以上により $\mathcal{B}$ は空でなく，かつ，補集合と可算和に関して閉じているから σ 加法族である．

(2) $\mathbf{R}$ は非可算集合なので A が高々可算集合ならば A^c は非可算であり，A^c が高々可算集合ならば A は非可算になるので μ は $\mathcal{B}$ 上 well-defined. μ の定義域 $\mathcal{B}$ が σ 加法族であることは (1) で証明した．μ が非負で恒等的に無限大でないことは明らかだから，あとは可算加法性を示せばよい．
$A_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \cdots,$ が $n \ne m$ ならば $A_n \cap A_m = \emptyset$ を満たすとする．A_n たちが全て高々可算集合ならば，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も高々可算なので $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$ かつ $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ となって両者は等しい．もしそうでなければ $A_n \in \mathcal{B}$ なので，ある自然数 m に対して ${A_m}^c$ が高々可算集合になる．故に $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \subset {A_m}^c$ も高々可算になって，$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ である．$n \ne m$ とすると，$A_n \cap A_m = \emptyset$ なので $A_n \subset {A_m}^c$ であるが，${A_m}^c$ が高々可算集合なので A_n も高々可算になる．故に $n \ne m$ ならば $\mu(A_n) = 0$ である．${A_m}^c$ が高々可算集合なので $\mu(A_m) = 1$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_m) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ が成り立つ．以上により μ の可算加法性が証明された．

[**6**] (H1 大阪市大 C3). $\mathcal{A}$ が σ 加法族になることは前問 (S61 九大 IX) の (1) の証明がそのまま適用できる．Ω が非可算集合ならば前問の (2) の証明がそのまま適用できて $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間になる．逆に $\Omega = \emptyset^c$ が可算集合ならば μ の定義から $\mu(\emptyset) = 1$ となるので μ は測度になり得ない．よって測度空間ならば Ω は非可算集合でなければならない．

[**7**] (H4 富山大 B VI). 仮定と有限加法性から，任意の k に対して $P({A_k}^c) = 1 - P(A_k) \le \dfrac{1}{2^{k+1}}$ である．これと有限加法性と劣加法性から $1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} {A_k}^c\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2}$. これより求める不等式を得る．

[**8**] (H9 大阪市大 D2).

(1) $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_{N_A}\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_{N_B}\}$, とおく．

(a) $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ であり，$\mathcal{B}$ が分割だから，各 $A \in \mathcal{A}$ 毎に $A \subset B$ なる $B \in \mathcal{B}$ がただ一つあるので，その B を $B(A)$ と書くことにする．inf の定義から $A \subset B$ ならば $\inf_{x\in A} f(x) \ge \inf_{x\in B} f(x)$ なので，$L_f(\mathcal{A}) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \inf_{x\in A} f(x)\mu(A) \ge \sum_{A\in\mathcal{A}} \inf_{x\in B(A)} f(x)\mu(A) = \sum_{B\in\mathcal{B}} \inf_{x\in B} f(x) \sum_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A) = B}} \mu(A)$. さらに $\mathcal{A}$ に属するどの二つの集合も共通部分を持たないことと μ の加法性を用いれば，$L_f(\mathcal{A}) \ge \sum_{B\in\mathcal{B}} \inf_{x\in B} f(x)\mu\Bigl(\bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A) = B}} A\Bigr)$.
ここで $\mathcal{A}$ が分割だから $\bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A) = B}} A = B$ となるので $L_f(\mathcal{A}) \ge \sum_{B\in\mathcal{B}} \inf_{x\in B} f(x)\mu(B) = L_f(\mathcal{B})$ を得る．
$U_f(\mathcal{B}) \ge U_f(\mathcal{A})$ の証明も同様である．

(b) 可測分割 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C} = \{A_i \cap B_j \mid i = 1, 2, \cdots, N_A,\ j = 1, 2, \cdots, N_B\}$ とおくと $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ となる可測分割である．定義より $L_f(\mathcal{C}) \le U_f(\mathcal{C})$ だから，(a) と合わせると $L_f(\mathcal{A}) \le L_f(\mathcal{C}) \le U_f(\mathcal{C}) \le U_f(\mathcal{B})$.

(2) 証明すべき式の左辺のほうが sup をとる対象が広いので，右辺に比べて小さくなることはない．逆に，かってな可測分割 $\mathcal{A}$ に対して，(1)(b) と同様に $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ を満たす可測分割 $\mathcal{C}$ をとると，$L_f(\mathcal{A}) \le L_f(\mathcal{C})$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ となるので，証明すべき式の右辺は左辺以上である．よって等号が成立する．

[**9**] (S62 大阪市大 D2). ヒントのように $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mu, A, \epsilon$ をとる．$\mathcal{G}$ が有限加法族であることは (S61 九大 IX) と類似の方法で証明できる．$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して $\mathcal{G} \ni \{n\}$ だから，$\sigma[\mathcal{G}] \ni \left(\bigcup_{n=2}^{\infty}\{n\}\right)^c = \{1\}$. よって $\sigma[\mathcal{G}] = 2^\Omega = \mathcal{F}$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が確率空間になることも分かる．ヒントに与えた $A \in \mathcal{F}$ に対して $B \subset A \subset C$ かつ $\mu(C) - \mu(B) < \epsilon$ をみたす $B, C \in \mathcal{G}$ があるとすると，$B^c \supset A^c = \{2, 4, 6, \cdots\}$ だから B^c は無限集合になるので $B \in \mathcal{G}$ であるためには B が 1 を含まない有限集合でなければならない．$B \subset A = \{1, 3, 5, \cdots\}$ だから，特に $B \subset \{3, 5, \cdots\}$ である．測度の単調性から $\mu(B) \le \mu(\{3, 5, 7, \cdots\}) = 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} + \cdots = 2^{-3}(1 - 2^{-2})^{-1} = \dfrac{1}{6}$. 同様の計算で $\mu(A) = \dfrac{2}{3}$ だから $\mu(C) - \mu(B) \ge \mu(A) - \mu(B) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} = \epsilon$ となって矛盾する．ゆえに問題が主張する B, C は取れない．

[**10**] (H5 大阪市大 D1). $\epsilon > 0$ に対して $P(A \triangle D) < \epsilon$ を満たす $D \in \mathcal{G}$ が存在するような $A \subset \Omega$ を全て集めた集合族を $\mathcal{C}$ とする．$A \in \mathcal{G}$ ならば $D = A$ ととれるので $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$. よって $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることが言えれば $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{G}]$ が $\mathcal{G}$ を含む最小の σ 加法族であることから $\mathcal{C} \supset \mathcal{F}$ となり，全ての $A \in \mathcal{F}$ が求める性質を持つことになる．あとは $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを証明すればよい．

$A \in \mathcal{C}$ とし，$\epsilon > 0$ を任意に選ぶ．$P(A \triangle D) < \epsilon$ となる $D \in \mathcal{G}$ をとると $A \triangle D = A^c \triangle D^c$ だから $P(A^c \triangle D^c) = P(A \triangle D) < \epsilon$. $\mathcal{G}$ は有限加法族なので $D \in \mathcal{G}$ ならば $D^c \in \mathcal{G}$ だから，$A^c \in \mathcal{C}$ を得る．ゆえに $\mathcal{C}$ は補集合に関して閉じている．$A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \cdots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする．確率の連続性より，$P\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\right) < \dfrac{\epsilon}{2}$ となる番号 N がとれる．$A_n \in \mathcal{C}$ だから $P(A_n \triangle D_n) < \epsilon\, 2^{-n-1}$ となる $D_n \in \mathcal{G}$

が存在する． $\left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right) \triangle A \subset \bigcup_{n=1}^{N}(D_n \triangle A_n) \cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \triangle A\right)$ に注意すれば $P\left(A \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{N} P(D_n \triangle A_n) + P\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) < \epsilon$ を得る．故に $A \in \mathcal{C}$． 即ち，$\mathcal{C}$ は可算和に関しても閉じている．以上により $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることが証明された．