19980414–
服部哲弥，津田稔朗
v19980618;23(問題番号);1018(落合訂正);

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例

１．測度，外測度，ルベーグ測度 ([11]–[20])

[**11**] (H9 お茶大 8).

Γ_1： 非負性は自明．$\emptyset$ は有理数を含まないので $\Gamma_1(\emptyset) = 0$ も成り立つ．$A \subset B$ のとき $\Gamma_1(B) \neq 0$ ならば $\Gamma_1(B) = \infty \geq \Gamma_1(A)$ なので単調になる．$\Gamma_1(B) = 0$ ならば B は有理数を含まないから $A \subset B$ も有理数を含まず，$\Gamma_1(A) = 0 = \Gamma_1(B)$ となって，単調性が言える．劣加法性を言うために $A_n \subset \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \cdots$, および， $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ とする．$\Gamma_1(A) = 0$ ならば自明に $\Gamma_1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_1(A_n)$ が言えるから $\Gamma_1(A) \neq 0$ とすると，A は有理数を含むことになるから，ある n に対して A_n も有理数を含む．この n に対して $\Gamma_1(A_n) = \infty$ となるから，劣加法性が言える．したがって， Γ_1 は外測度.

Γ_1–可測集合を求める．$E \subset \mathbf{R}$ が可測集合であるためには任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して $\Gamma_1(A) \geq \Gamma_1(E \cap A) + \Gamma_1(E^c \cap A)$ が成り立つことが必要十分条件である．$\Gamma_1(A) = \infty$ ならばこの条件は自動的に成り立つので $\Gamma_1(A) = 0$ の場合のみ調べればよいが，このとき A は有理数を含まないので任意の E に対して $E \cap A$ も $E^c \cap A$ も有理数を含まない．従って $\Gamma_1(E \cap A) + \Gamma_1(E^c \cap A) = 0$ となって，条件はやはり成立する．

即ち，実数の任意の部分集合が Γ_1–可測である．

Γ_2： 非負性， $\Gamma_2(\emptyset) = 0$，単調性，劣加法性，が全て Γ_1 と同様に言えるので， Γ_2 も外測度.

Γ_2–可測集合を求める．$\Gamma_2(A) = 0$ なる $A \subset \mathbf{R}$ に対しては， Γ_1 のときと同様に任意の $E \subset \mathbf{R}$ に対して $\Gamma_2(A) \geq \Gamma_2(E\cap A) + \Gamma_2(E^c \cap A)$ が成り立つことが分かるので，$\Gamma_2(A) = 1$ の場合のみ条件を調べればよい．このとき，条件が成り立たない（即ち， E が可測集合でない）のは $\Gamma_2(E\cap A) = \Gamma_2(E^c \cap A) = 1$ となる A があるとき，そのときに限る．単調性からこの条件は $A = \mathbf{R}$ の場合，即ち，$\Gamma_2(E) = \Gamma_2(E^c) = 1$ となることと同値である．即ち，E が可測集合でないということと E, E^c の両方とも有理数を含むことが同値である．

よって Γ_2–可測集合は有理数を含まない集合全て，および，補集合が有理数を含まない集合全て，である．

[**12**] (H3 新潟大 2).

(1) $A \subset B$ ($\subset \mathbf{R}$) とする．$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ，各 I_n は開区間または空集合とすると，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ でもあるから，$\Gamma(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$．条件を満たす全ての $\{I_n\}$ に関して右辺の下限をとれば $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$ を得る．

(2) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$\epsilon > 0$ とする．各自然数 n に対して $\Gamma(A_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| - 2^{-n}\epsilon$ かつ $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ となる開区間（または空集合）の列 $I_{n,k}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, を取れる．このとき $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ となるから，

$$\Gamma(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma(A_n) + 2^{-n}\epsilon) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$$

を得る．$\epsilon > 0$ は任意だから，$\Gamma(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ を得る．

(3) $x \in \mathbf{R}$ とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\{x\} \subset (x - \frac{1}{2}\epsilon, x + \frac{1}{2}\epsilon)$ だから (1) より $0 \le \Gamma(\{x\}) \le \epsilon$．故に $\Gamma(\{x\}) = 0$．$\mathbf{Q}$ は可算集合なので (2) より $\Gamma(\mathbf{Q}) = 0$.

[**13**] (H9 立教大 8).

(1) $\Omega = [0,1]$ とおく．Γ の定義の右辺で $I_j = [0,1]$, $j \in \mathbf{N}$, ととれることに注目すれば Γ の定義は well-defined であることが分かる．非負性は自明．$\epsilon > 0$ に対して，$I_j = [0, 2^{-j}\epsilon]$, $j \in \mathbf{N}$, とおくことにより $0 \le \Gamma(\emptyset) \le \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\epsilon = \epsilon$ を得るが $\epsilon > 0$ は任意なので $\Gamma(\emptyset) = 0$ を得る．

$A \subset B \subset \Omega$ とする．$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ かつ各 I_j が閉区間ならば，$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ でもあるから，$\Gamma(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$. 条件を満たす全ての $\{I_j\}$ に関して右辺の下限をとれば $\Gamma(A) \le \Gamma(B)$ を得る．ゆえに単調性が成り立つ．

劣加法性をいうために Ω の部分集合の列 $\{A_n\}$ をとり，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$\epsilon > 0$ とする．各自然数 n に対して

$$\Gamma(A_n) \ge \sum_{j=1}^{\infty} |I_{n,j}| - 2^{-n}\epsilon,\ A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}\,,$$

となる閉区間の列 $I_{n,j}$, $j = 1, 2, 3, \cdots$, を取れる．このとき $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$ となるから，

$$\Gamma(A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_{n,j}| \le \sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma(A_n) + 2^{-n}\epsilon) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)$$

を得る．$\epsilon > 0$ は任意だから，$\Gamma(A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)$ を得る．

以上により Γ は外測度である．

(2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_L$ は明らかだから $E \in \mathcal{F}_L$ に対して $E \in \mathcal{F}$ を示す．劣加法性から $A \subset \Omega$ に対して $\Gamma(A) \le \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A)$ はいつでも成り立つから，逆向きの不等号を示せばよい．

任意の $\epsilon > 0$ に対して $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ かつ $\Gamma(A) \ge \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| - \epsilon$ を満たす区間の列 $\{I_j\}$ を取れる．$E \in \mathcal{F}_L$ だから，ヒントの $\Gamma(I_j) = |I_j|$ も用いると，$\Gamma(E \cap I_j) + \Gamma(E^c \cap I_j) = |I_j|$ が全ての $j \in \mathbf{N}$ に対して言える．故に

$$\Gamma(A) + \epsilon \ge \sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma(E \cap I_j) + \Gamma(E^c \cap I_j)) \ge \Gamma\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) + \Gamma\left(E^c \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right).$$

最後の変形で外測度の劣加法性を用いた．$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ を用いると，Γ の単調性から

$$\Gamma(A) + \epsilon \ge \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A)\,.$$

$\epsilon > 0$ は任意だから求める不等号を得る．

[**14**] (H8 都立大 7).

(1) $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ かつ $\sup_j |I_j| \le N^{-1}$ とすると，$N|I_j| \le 1$ であり，$\alpha > \beta > 0$ だから，$\sum_{j=1}^{\infty} |NI_j|^{\alpha} \le \sum_{j=1}^{\infty} |NI_j|^{\beta}$．故に $N^{\alpha-\beta} H_N^{\alpha}(A) \le N^{\alpha-\beta}\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^{\alpha} \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^{\beta}$．条件を満たす全ての $\{I_j\}$ に関して右辺の下限をとれば $N^{\alpha-\beta} H_N^{\alpha}(A) \le H_N^{\beta}(A)$ を得る．

(2) $\epsilon > 0$ に対して $I_j = [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$, $j = 1, 2, 3, \cdots, N$, および，$I_j = [0, 2^{N-j}\epsilon]$, $j = N+1, N+2, \cdots$, とおくと，閉区間列 $\{I_j\}$ は I を覆う．よって $H^1_N(I) \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = 1 + \epsilon$．$\epsilon > 0$ は任意だから，$H^1_N(I) \le 1$．(1) と合わせると，$N^{\alpha-1} H^\alpha_N(I) \le H^1_N(I) \le 1$． $\alpha > 1$ だから $0 \le H^\alpha_N(I) \le N^{1-\alpha} \to 0$ $(N \to \infty)$ となって， $H^\alpha(I) = 0$ を得る．

(3) (2) の証明から $H^1_N(I) \le 1$．他方，長さの単調性と劣加法性より $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ ならば $1 = |I| \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$ だから $H^1_N(I) \ge 1$．故に $H^1_N(I) = 1$ を得て，$H^1(I) = 1$ となる．

(4) (1)(3) より $N^{1-\alpha} = N^{1-\alpha} H^1_N(I) \le H^\alpha_N(I)$．$0 < \alpha < 1$ だから $H^\alpha(I) = \lim_{N\to\infty} H^\alpha_N(I) = \infty$.

[**15**] (H6 お茶大 10)．問題文の最初の μ を μ_1，あとの μ を μ_2 と書く．$\emptyset \in \mathcal{I}$ （明示されてはいないが，$(0,0] \times (0,0] \in \mathcal{I}$ は $\emptyset \in \mathcal{I}$ の約束と考えるべきである）だから $\mu_1(A) \le \mu_2(A)$ は明らか．以下 $\mu_2(A) \le \mu_1(A)$ を示す．

$\delta > 0$ を任意に取り，$\mathbf{R^2}$ を $x = j\,\delta$ および $y = j\,\delta$ $(j \in \mathbf{Z})$ に目盛り用の直線が引かれた（無限に広い）方眼紙とみなす．方眼紙のマス目 I_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ で円 A を覆うことにすると，$n \in \mathbf{N}$(有限) で $I_j \in \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, であり，しかも，高々円周に沿ったマス目の分だけ大きい面積の図形で覆うことになる．

円 A は凸な図形なので，円周が通るマス目はこの円を覆う正方形の４辺を覆うマス目の個数 $8\,[1/\delta] + 4$ 個（$[x]$ は x を越えない最大の整数）を越えることはない．(なぜなら，円周が通るマス目のうち $j\,\delta \le y < (j+1)\,\delta$ にあるものと $(j-1)\,\delta \le y < j\,\delta$ にあるもので縦に並んでいる (x が等しい) ものは一つの象限当たり高々 1 個.）マス目 1 つの面積は δ^2 だから $\sum_{j=1}^{n} m(I_j) \le \mu_1(A) + (8\,[1/\delta] + 4)\delta^2$．故に $\mu_2(A) \le \mu_1(A) + (8\,[1/\delta] + 4)\delta^2 \le \mu_1(A) + (8 + 4\delta)\delta$．$\delta > 0$ は任意だから $\mu_2(A) \le \mu_1(A)$ を得る．

[**16**] (H9 津田塾大 A3)．

(1) 可算個の区間の合併からなる A を覆う列 $J_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nj}$, $n \in \mathbf{N}$, であって，$\sum_{j=1}^{\infty} |I_{nj}|$ が $n \to \infty$ で 0 に収束するものが取れること．式で書けば $\inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A,\ I_j$ は区間 $\} = 0$．

(2) 各 $i \in \mathbf{N}$ に対して $\mu(A_i) = 0$ だから (1) より，任意の $\epsilon > 0$ に対して $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nij}$ かつ $0 \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_{nij}| < 2^{-i}\epsilon$ となる区間達 I_{nij}, $n, j \in \mathbf{N}$, が存在する．$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nij}$ かつ $0 \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_{nij}| < \epsilon$ だから，再び (1) より $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ となる．

(3) $C' = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n = 0$ または $2\}$ とおく（本来，これがカントール集合と呼ばれる）．$\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ ということと区間の長さは平行移動で変わらないことに注意すれば $\mu(C) = \mu(C')$ となるから $\mu(C')$ を求めればよい．

$n \in \mathbf{N}$ と $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0, 2\}^n$ に対して $C_{n,x} = [\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + 3^{-n}]$ とおくと，$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 3^{-n}$ だから，$C' \subset \bigcup_{x \in \{0,2\}^n} C_{n,x}$ が成り立つ．各 $x \in \{0, 2\}^n$ に対して $C_{n,x}$ は長さ 3^{-n} の区間であり，$\{0, 2\}^n$ は要素の数が 2^n の集合だから $\mu\left(\bigcup_{x \in \{0,2\}^n} C_{n,x}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ となり，$n \to \infty$ で 0 に収束する．よって (1) より $\mu(C) = \mu(C') = 0$.

[**17**] (S60 お茶大 7). 全ての S を集めた集合 A は, $A = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta^k \mid a_k \in \{0,1\}\ (k=0,1,2,\cdots),\ \sup\{k \geq 0 \mid a_k = 1\} = \infty\}$ と書ける. n をかってな自然数とすると, $0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k\delta^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta^k = \frac{\delta^n}{1-\delta}$ だから, 級数の n 項目以降の和を先にとることにより,

$$\begin{aligned} A &\subset \{x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^k \mid 0 \leq x \leq \frac{\delta^n}{1-\delta},\ a_k \in \{0,1\}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)\} \\ &= \bigcup_{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n} \{x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^k \mid 0 \leq x \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる.

右辺の和の中の各集合は閉区間 $[\sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^k, \frac{\delta^n}{1-\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^k]$ だから, その長さ（ルベーグ測度）は $\frac{\delta^n}{1-\delta}$ に等しい. 特に, 長さは $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ によらない. また, 右辺の和は 2^n 個の項にわたる. 従って, ルベーグ測度を μ, ルベーグ外測度を Γ と書くと,

$$0 \leq \Gamma(A) \leq \sum_{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n} \frac{\delta^n}{1-\delta} = \frac{(2\delta)^n}{1-\delta},$$

が任意の n に対して成り立つ.

$0 \leq \delta < 1/2$ ならば右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するから, この式が任意の n に対して成り立つためには $\Gamma(A) = 0$ でなければならない. ルベーグ測度は完備なので, このことから A がルベーグ可測で, かつ, $\mu(A) = \Gamma(A) = 0$ となる.

$\delta = 1/2$ のとき, 区間 $(0,2]$ の任意の点は, 2 進展開すれば A に含まれることが分かる（2 進有理点は 1 が無限に続く表示をとる）. 逆に任意の $x \in A$ に対して, $0 < x \leq 2$ が成り立つことも容易に分かる. よって $A = (0,2]$ となるから $\mu(A) = 2$.

$\delta < 1/2$ **のときの，ルベーグ外測度の並進不変性と定数倍に対する線形性を既知とした別解の概略.** (19980824 落合啓之先生). 実数 a と実数の集合 A に対して $aA = \{ax \mid x \in A\}$, $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$ などと書くことにすると, $0 \leq \delta < 1/2$ のとき $A = \delta A + (1 + \delta A)$ だから, ルベーグ測度の並進不変性と定数倍に対する線形性から $\Gamma(A) = \Gamma(\delta A) + \Gamma(1 + \delta A) = 2\delta\Gamma(A)$. $0 \leq \delta < 1$ なので $\Gamma(A) < \infty$ であり, $\delta \neq 1/2$ なので上の式から $\Gamma(A) = 0$ を得る.

[**18**] (S63 お茶大 6).

(1) μ が測度であることと条件 (3) より, x が自然数のとき主張が成り立つ. x が正の有理数のとき $x = \frac{m}{n}$ となる $n, m \in \mathbf{N}$ がある. 再び μ が測度であることと条件 (3) より, $n\mu([0, \frac{1}{n})) = \mu([0,1))$ となるから $\mu([0,x)) = \frac{m}{n}\mu([0,1))$ となって, x が正の有理数のときも主張が成り立つ.

実数 $x > 0$ に対して, $x_n \uparrow x$ なる有理数列 $\{x_n\}$ を取る. $\bigcup_{n=1}^{\infty}[0, x_n) = [0, x)$ だから測度の連続性から $\mu([0,x)) = \lim_{n\to\infty} \mu([0,x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n\mu([0,1)) = x\mu([0,1))$.

測度の連続性ではなく単調性を用いた別証明 (19980824 落合啓之先生). x が有理数の場合の証明までは上に同じ. $x > 0$ が一般の実数のとき, $x_n \uparrow x$ なる有理数列 $\{x_n\}$ と $y_n \downarrow x$ なる有理数列 $\{y_n\}$ を取ると, 測度の単調性から

$$x_n\mu([0,1)) = \mu([0,x_n)) \leq \mu([0,x)) \leq \mu([0,y_n)) = y_n\mu([0,1))$$

となるので, $n \to \infty$ の極限をとって, 数列の極限に関する挟み撃ちの原理を用いれば証明が終わる.

(2) 問 (1) と条件 (3) より $\mu([a,b)) = (b-a)\mu([0,1))$. 即ち区間に対してルベーグ測度の $\mu([0,1))$ 倍になる. 従って, ルベーグ測度の構成と同様に外測度を作り可測集合に制限すると測度を得るが, その値はルベーグ測度の値の $\mu([0,1))$ 倍になる. 条件 (1)(2) よりこの定数 $\mu([0,1))$ は正の実数である.

[19] (S63 奈良女子大 II B).

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\{x\} \subset [x-\frac{1}{2}\epsilon, x+\frac{1}{2}\epsilon]$ なので $\mu(\{x\}) \leq \mu([x-\frac{1}{2}\epsilon, x+\frac{1}{2}\epsilon]) = \epsilon$. $\epsilon > 0$ は任意だから $\mu(\{x\}) = 0$.

(2) 測度の可算加法性から $\mu(\mathbf{Q}) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbf{Q}} \mu(\{x\}) = 0$.

[20] (H2 新潟大 3).

(1) $B_1 = A_1$, および, $n = 2,3,4,\cdots$ に対して $B_n = A_n - A_{n-1}$ とおくと σ 加法性と有限加法性から $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$.

(2) $A'_n = A_1 - A_n$, $n \in \mathbf{N}$, とおけば (1) から

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c)\right)\\ &= \mu(\lim_{n\to\infty} A'_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.\end{aligned}$$

$\mu(A_1) < \infty$ だから $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(3) $t_n \downarrow t$ とする. $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n = (-\infty, t_n] \in \mathcal{B}$ とおくと $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, t]$ だから $\mu(\Omega) < \infty$ と (2) から $f(t) = \mu((-\infty, t]) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu((-\infty, t_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$.
次に $t_n \uparrow t$ とする. $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n = (-\infty, t_n]$ とおくと $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, t)$ だから (1) から $\mu((-\infty, t)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu((-\infty, t_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$. 故に $f(t) = \mu((-\infty, t]) = \mu(\{t\}) + \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$.
よって f が $\mathbf{R}$ 上連続であることと $\mu(\{t\}) = 0$, $t \in \mathbf{R}$, が同値になる.