19980414–
服部哲弥，津田稔朗
v19980623;24;1018(落合訂正);

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例

１．測度，外測度，ルベーグ測度 ([21]–[22])

[**21**] (H6 熊本大 8).

(1) 集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と書く．$\mathcal{B}$ の定義から $\mathcal{B}=\sigma[\mathcal{G}]\supset\mathcal{G}$ である．他方，例えば $[0,1]\notin\mathcal{G}$ であるが，$[0,1]=\{(-\infty,0)\cup(1,\infty)\}^c\in\mathcal{B}$ なので $\mathcal{G}\neq\mathcal{B}$ である．

(2) 任意の $A=(-\infty,a]\in\mathcal{H}$ に対して $A_n=\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\cdots,$ とおくと A_n は開集合で $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ だから $A\in\mathcal{B}$．よって $\mathcal{H}\subset\mathcal{B}$． $\mathcal{B}$ は σ 加法族だから $\sigma[\mathcal{H}]\subset\mathcal{B}$.
次に任意の $-\infty\le a\le b\le\infty$ に対して $(a,b]=(-\infty,b]\cap(-\infty,a]^c\in\sigma[\mathcal{H}]$．開集合 $G\in\mathcal{G}$ に対して $x\in G$ ならば， x を内部に含みしかも G に含まれる区間 $I_x=(a_x,b_x]\in\sigma[\mathcal{H}]$ がある．I_x の内部を ${I_x}^o$ と書くと $\bigcup_{x\in G}{I_x}^o\supset G$ だから Lindelöf の被覆定理より可算個の $x_n\in G$, $n\in\mathbf{N}$, が存在して，$G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}{I_{x_n}}^o\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}$．各 x_n に対して $I_{x_n}\subset G$ だから $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\subset G$．よって，$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}$． $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\in\sigma[\mathcal{H}]$ だから $G\in\sigma[\mathcal{H}]$ を得る．即ち $\mathcal{G}\subset\sigma[\mathcal{H}]$．故に $\mathcal{B}\subset\sigma[\mathcal{H}]$.
以上により， $\mathcal{B}=\sigma[\mathcal{H}]$.

(3) （問 [20](3) も参照のこと.）
F が連続ならば $\mu((-\infty,x])=F(x)=\lim_{n\to\infty}F(x-n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-n^{-1}])=\mu((-\infty,x))$ が任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して成立．ここで最後の変形で確率の連続性を用いた．これより， $\mu(\{x\})=0, x\in\mathbf{R}$.
逆を言うために，先ず F の右連続性 $\lim_{y\downarrow x}F(y)=F(x), x\in\mathbf{R}$, はいつでも成り立つことに注意する．実際，$F$ が単調関数であることと確率の連続性から，$\lim_{y\downarrow x}F(y)=\lim_{n\to\infty}F(x+n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x+n^{-1}])=\mu((-\infty,x])=F(x)$ が成り立つ．さて， $\mu(\{x\})=0$, $x\in\mathbf{R}$, とすると，再び F が単調関数であることと確率の連続性から，$\lim_{y\uparrow x}F(y)=\lim_{n\to\infty}F(x-n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-n^{-1}])=\mu((-\infty,x))=\mu((-\infty,x))+\mu(\{x\})=\mu((-\infty,x])=F(x)$ が成り立つ．故に， F は $\mathbf{R}$ 上連続.
以上より，F が $\mathbf{R}$ 上連続であるための必要十分条件は，任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して $\mu(\{x\})=0$ なること.

(4) F は非負増加関数で $\lim_{x\to\infty}F(x)=\mu(\mathbf{R})=1$ だから，特に $0\le F(x)\le 1$, $x\in\mathbf{R}$． $1=\mu([0,1])=\mu((-\infty,1])-\mu((-\infty,0))=F(1)-\lim_{n\to\infty}F(-n^{-1})\le 1$ だから，$F(1)=1$ かつ $\lim_{n\to\infty}F(-n^{-1})=0$ が必要十分．後者は $F(x)=0, x<0$ と同値．よって必要十分条件は $F(1)=1$ かつ $F(x)=0, x<0$.

[**22**] (H6 お茶大 9).

(1) $A_1=I_{a,a+3^{-2},0,1}$, $a=\sum_{k=1}^{2}\frac{a_k}{3^k}$, $a_1=a_2=0$．よって $\mu(A_1)=\frac{1-0}{2^2}=\frac{1}{4}$.

(2) $A_2=I_{a,a+\frac{1}{3},0,1}$, $a=\frac{a_1}{3^1}$, $a_1=1$．よって $\mu(A_2)=0$.

(3) $A_3=\sum_{n=1}^{\infty}I_{a^{(n)},b^{(n)},0,\frac{1}{2}}$, $a^{(1)}=0$, $a^{(n)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^k}$ $(n\ge 2)$, $b^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$ $(n\ge 1)$, $\mu(I_{a^{(1)},b^{(1)},0,\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}$, $\mu(I_{a^{(n)},b^{(n)},0,\frac{1}{2}})=0$ $(n\ge 2)$, だから $\mu(A_3)=\frac{1}{4}$.

(4) A_4 と $I-A_4$ をそれぞれ計算しやすいように $\mathcal{I}$ の要素達で覆い，後者に関しては μ の単調性も用いて $\mu(A_4)$ を上下から評価する正攻法（(5) の解答例参照）でも計算できるが，y 軸方向の平行移動不変性 $\mu(A)=\mu(\{(x,y+a)\mid(x,y)\in A\})$ $(a\in\mathbf{R}, A\in\mathcal{B}, \{(x,y+a)\mid(x,y)\in A\}\subset I)$ がルベーグ測度のときと同様に示されるので，それを認めれば議論は短い.

即ち，$A \cap B = \emptyset$ のときに限り $A + B = A \cup B$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}A_4 &= \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ \frac{x}{2} < y \le \frac{1}{2}\} + \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ \frac{1}{2} < y \le \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ 0 < y \le \frac{x}{2}\} + \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ \frac{x}{2} < y \le \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ 0 < y \le \frac{1}{2}\} = I_{0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}} + I_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{1}{2}} + I_{\frac{2}{3},1,\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

よって $\mu(A_4) = \dfrac{1}{4} + 0 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

(5) $A_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \le y \le \min\{1, x + \frac{1}{2}\}\}$ であるが $A_5' = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \mid 0 < x \le 1,\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < y \le \min\{1, x + \frac{1}{2}\}\}$ とおく．

$m \in \mathbf{N}$ とする．$k = 0, 1, \cdots, 3^m - 1$ に対して $I_k^{(m)} = (\frac{k}{3^m}, \frac{k+1}{3^m}] \times (\frac{1}{2}\frac{k}{3^m} + \frac{1}{2}, \min\{1, \frac{k+1}{3^m} + \frac{1}{2}\}]$, とおくと，$I_k^{(m)} \in \mathcal{I}$ であり，

$$\mu(I_k^{(m)}) = \begin{cases} 2^{-m}(\min\{\frac{1}{2}, \frac{k+1}{3^m}\} - \frac{1}{2}\frac{k}{3^m}), & \frac{k}{3^m} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \frac{a_\ell}{3^\ell} \text{ かつ } a_\ell \in \{0,2\} \text{ for all } \ell = 1, \cdots, m, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

$A_5' \subset \displaystyle\bigcup_{k=0}^{3^m-1} I_k^{(m)}$ だから

$$\begin{aligned}\mu(A_5') &\le \sum_{a_1 \in \{0,2\}} \cdots \sum_{a_m \in \{0,2\}} 2^{-m} \left(\min\{\frac{1}{2}, 3^{-m} + \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell 3^{-\ell}\} - \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell 3^{-\ell}\right) \\ &= \sum_{a_2 \in \{0,2\}} \cdots \sum_{a_m \in \{0,2\}} 2^{-m} \left(3^{-m} + \sum_{\ell=2}^{m} a_\ell 3^{-\ell} - \frac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{m} a_\ell 3^{-\ell}\right) \\ &\quad + \sum_{a_2 \in \{0,2\}} \cdots \sum_{a_m \in \{0,2\}} 2^{-m} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{m} a_\ell 3^{-\ell}\right) \\ &= \sum_{a_2 \in \{0,2\}} \cdots \sum_{a_m \in \{0,2\}} 2^{-m}(3^{-m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{1}{3^m})\,.\end{aligned}$$

任意の m に対してこれが成り立つから $\mu(A_5') \le \dfrac{1}{12}$．$I - A_5'$ に対して同様の計算を行えば $\mu(I - A_5') \le \dfrac{11}{12}$ を得る．従って，$\mu(A_5') = \mu(I) - \mu(I - A_5') \ge 1 - \dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{12}$ となり，結局 $\mu(A_5') = \dfrac{1}{12}$ を得る．
定義から任意の連続関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ に対して $\mu(\{(x,y) \in I \mid y = f(x)\}) = 0$ が成り立つ．従って $\mu(A_5) = \mu(A_5') = \dfrac{1}{12}$.
（最後の部分の議論を使わずに直接 A_5 を A_5' に対して行ったように区間で覆って評価することもできるが $3^{-m}\epsilon > 0$ をあちこちに書かねばならず，解答例としては煩雑になるので省略した.）

別解の方針 (19980824 落合啓之先生).　Fubini の定理 $\mu(A) = \displaystyle\int_0^1 \mu_y(A_x)\, d\mu(x)$ を用いれば，(4) で用いた y 軸方向の平行移動不変性や，$x = 1/2$ に関する鏡映不変性を用いて三角形を変形して長方形に（μ 測度を変えずに）変形できるので，計算がエレガントに早くできる．出題の意図が Fubini の定理を既知としていないようなので詳しいことは省略するが，各自証明を工夫されたい．