

測度論の練習問題 (大学院入学試験問題) 解答例

2. 可測関数と積分 ([1]-[4], [6]-[10], [12]-[20])

[1] (H8 筑波大 6) .

(2) \Rightarrow (1): 仮定 (2) より $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$, $N \in \mathbf{N}$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, とおける. 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{i: a_i > a} E_i$. $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{E}]$ だから $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{F}$.

(1) \Rightarrow (2): 仮定 (1) より任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{F}$ である. もし f がある E_i 上一定でないとする, $f(x) < f(y)$ となる $x, y \in E_i$ が存在する. $f(x) < c < f(y)$ となる $c \in \mathbf{R}$ をとると, $x \notin f^{-1}((c, \infty))$ かつ $y \in f^{-1}((c, \infty))$. 一方 $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{E}]$ は E_i たちの (0 個以上の) 和集合からなる集合族だから $f^{-1}((c, \infty)) \notin \mathcal{F}$ となり, 矛盾. 故に f は各 E_i 上一定値をとる.

[2] (H3 立教大 6) .

(1) U_n は閉区間だからルベグ可測集合. その可算和だから U もルベグ可測. $\mu(U_n) = 2^{-n-1}$ だから, 測度の劣加法性より $\mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) = \frac{1}{2}$. 測度の単調性から $\mu(U) \geq \mu(U_1) = \mu([a_1 - 1/8, a_1 + 1/8])$ だが, $[a_1, a_1 + \frac{1}{8}]$ または $[a_1 - \frac{1}{8}, a_1]$ いずれかは $[0, 1]$ に含まれる. いずれもルベグ測度は $\frac{1}{8}$ だから $\mu(U) \geq \frac{1}{8}$.

(2) U はルベグ可測集合だから χ_U はルベグ可測関数であり, $\int_{[0,1]} \chi_U d\mu = \mu(U)$. U は $[0, 1]$ の全ての有理数を含むので, U は $[0, 1]$ で稠密. よって $U^c := [0, 1] \setminus U$ は内点を持たない集合で, しかも $\mu(U) \leq \frac{1}{2}$ だから $\mu(U^c) \geq \frac{1}{2}$. よって任意の $\delta > 0$ に対して, $[0, 1]$ の幅 $\delta > 0$ の区間による分割の中には必ず U と U^c 両方の点を含む区間が $\frac{1}{2\delta}$ 個以上ある. 従って χ_U のリーマン和の上限と下限には分割の幅 δ に関係なく $\frac{1}{2}$ 以上の幅がある. 即ちリーマン積分不可能である.

[3] (H9 熊本大 1) .

(1) 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty))$ は $[n-1, n)$ なる形の区間の 0 個以上の高々可算和だから $f(x)$ はルベグ可測である.

(2) f がルベグ可測なので非負値関数 $|f| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \chi_{[n-1, n)}$ もルベグ可測. 各点で増大する $|f|$ の非負

単関数近似列 $\sum_{n=1}^N |a_n| \chi_{[n-1, n)}$, $N = 1, 2, 3, \dots$, を考えれば積分の定義から

$$\int_{[0, \infty)} |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

よって f がルベグ可積分であることと $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することは同値 (即ち, とともに上式が有限ということ).

- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ と $n - 1 \leq x < n$ に対して $f^+(x) = \max\{a_n, 0\}$, $f^-(x) = \max\{-a_n, 0\}$, とおいて非負可測関数 f^\pm を定義すれば $f = f^+ - f^-$. (2) と同様に

$$\int_{[0, \infty)} f^+ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, 0\},$$

$$\int_{[0, \infty)} f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \max\{-a_n, 0\},$$

であって, しかも (2) より, f が積分可能ならばいずれも有限となる. よって積分の定義より

$$\int_{[0, \infty)} f d\mu = \int_{[0, \infty)} f^+ d\mu - \int_{[0, \infty)} f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, 0\} - \sum_{n=1}^{\infty} \max\{-a_n, 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

最後の変形で恒等式 $\max\{x, 0\} - \max\{-x, 0\} = x$ ($x \in \mathbf{R}$) を用いた.

- [4] (H9 広島大 6).

- (1) $E, F \in \mathcal{A}$ より $\theta(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx$ と $\theta(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F f_k(x) dx$ が存在する. $f_k, k \in \mathbf{N}$, は非負可測で, $E \cap F = \emptyset$ より, $\int_{E \cup F} f_k(x) dx = \int_E f_k(x) dx + \int_F f_k(x) dx$ である. 故に $\theta(E \cup F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \cup F} f_k(x) dx$ は存在し, 従って $E \cup F \in \mathcal{A}$ であって, $\theta(E \cup F) = \theta(E) + \theta(F)$ が成り立つ.
- (2) E のルベグ測度が 0 ならば積分の定義より $\int_E f_k(x) dx = 0$. よって $E \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(E) = 0$.
- (3) E が $x = \frac{1}{2}$ を内点にもてば, ある $k_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, 任意の $k \geq k_0$ に対して $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \subset E$ となる. このとき f_k は E 上で

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる. よって, 任意の $k \geq k_0$ に対して

$$\int_E f_k(x) dx = k \frac{1}{k} = 1$$

となる. これより $E \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(E) = 1$.

- (4) $I = (a, b] \subset U$ とおく.

$\frac{1}{2} < a$ または $b < \frac{1}{2}$ の場合: ある $k_0 \in \mathbf{N}$ が存在して $k \geq k_0$ なる任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して f_k は I 上 0 になる. よって任意の $k \geq k_0$ に対して $\int_I f_k(x) dx = 0$. よって $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k(x) dx = 0$. 故に $I \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(I) = 0$.

$a = \frac{1}{2}$ の場合: f_k は I 上で

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

よって, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $\int_I f_k(x) dx = k \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. 故に $I \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(I) = \frac{1}{2}$.

$b = \frac{1}{2}$ の場合: $a = \frac{1}{2}$ の場合と同様に考えれば $I \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(I) = \frac{1}{2}$ を得る.

$a < \frac{1}{2} < b$ の場合: (3) より $I \in \mathcal{A}$ かつ $\theta(I) = 1$.

以上で全ての場合が尽くされた.

- [5] (欠番).

- [6] (S61 山形大 9).

- (1) \mathbf{R} 上の実数値関数がボレル可測であるとは, \mathbf{R} の任意のボレル集合の逆像がボレル集合である¹ こと. このことは, 任意の実数 a に対して開区間 (a, ∞) の逆像がボレル集合であるという条件と同値であり, 任意の開集合の逆像がボレル集合である条件とも同値である. 実数値関数がルベーク可測であるとは, \mathbf{R} の任意のボレル集合の逆像がルベーク可測集合である² こと. このことは, 任意の実数 a に対して開区間 (a, ∞) の逆像がルベーク可測集合であるという条件と同値であり, 任意の開集合の逆像がルベーク可測集合である条件とも同値である.
- (2) 開集合の連続関数による逆像は定義によって開集合であるからボレル集合である. よって, 上記定義より連続関数はボレル可測関数.
- (3) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であって, 開集合の g による逆像が開集合, その f による逆像がルベーク可測集合となるから, $g \circ f$ はルベーク可測関数である.
- (4) $A \subset \mathbf{R}$ をルベーク可測だがボレル可測でない集合とし, $f = \chi_A, g = \text{id}$ (恒等写像) と選ぶと, f, g はそれぞれルベーク可測, ボレル可測で, $f \circ g = f$ はルベーク可測だが $f^{-1}((1/2, \infty)) = A$ だからボレル可測ではない.

[7] (S62 新潟大 4)³.

- (1) f が \mathcal{F} -可測実数値関数なので, 任意の 1 次元ボレル集合 $B \in \mathcal{B}_1$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. よって $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$. 特に, B は空でない. $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$ だから $E \in \mathcal{B}$ ならば $f^{-1}(E^c) \in \mathcal{F}$. 故に \mathcal{B} は補集合を取る演算について閉じている. 同様に $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$ より \mathcal{B} は可算和についても閉じている. 従って \mathcal{B} は σ 加法族である.
- (2) g が \mathcal{B}_1 -可測だから, 任意の $A \in \mathcal{B}_1$ に対して $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$. これと f が \mathcal{F} -可測なことから, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$. 故に $g \circ f$ は \mathcal{F} -可測.

[8] (H1 山形大 8)⁴.

- (1) $f^{-1}(\mathbf{R}) \in \mathcal{F}$ より \mathcal{F} は空でない. $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ に対して $(f^{-1}(E))^c = f^{-1}(E^c) \in \mathcal{F}$. 故に \mathcal{F} は補集合をとる演算について閉じている. $F_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}$, とすると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $F_n = f^{-1}(E_n), E_n \in \mathcal{B}_1$, なる E_n がある. よって,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \in \mathcal{F}$$

となるから, \mathcal{F} は可算和についても閉じている.

- (2) ボレル可測関数 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して $g = h \circ f$ が成り立つならば, 任意の $A \in \mathcal{B}_1$ に対して, $g^{-1}(A) = f^{-1}(h^{-1}(A))$. h がボレル可測だから $h^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$. よって $f^{-1}(h^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$. 故に g は \mathcal{F} -可測である.

逆に g が \mathcal{F} -可測とすると, 任意の $A \in \mathcal{B}_1$ に対して $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. 即ち, $g^{-1}(A) = f^{-1}(E)$ となる $E \in \mathcal{B}_1$ が存在する.

$f(x) = f(y)$ ならば $f(x) = f(y) \in E$ と $x, y \in f^{-1}(E)$ が同値になるから, $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ は x, y を同時に要素に持つか両方とも要素に持たないかどちらかである. $g(x) \neq g(y)$ とすると, 例えば $g(x) \in A$ かつ $g(y) \notin A$ を満たす $A \in \mathcal{B}_1$ があるから $x \in g^{-1}(A)$ かつ $y \in g^{-1}(A)$ となって矛盾. よって, $f(x) = f(y)$

¹ \mathbf{R} の集合がボレル集合であるとは, ボレル集合族の要素であること. ボレル集合族とは, 開集合を全て要素に持つ σ 加法族のうち最小のものこと.

² ルベーク可測集合とはボレル集合族を完備化した集合族 (ルベーク σ 加法族) の要素. このことは次と同値: 差集合がルベーク測度 0 であって包含関係にあるような 2 つのボレル集合がとれて, 問題の集合が小さい方を包含し, 大きい方に包含されるようにできること.

³ 19981120 版の問題集ための注: (2) は g も実数値関数であるときの解答であるが, g の値域が何であって同様の解答が成り立つ.

⁴ 19981120 版の問題集ための注: g も実数値関数とする.

g の値域の可測空間は σ 加法族が任意の 2 点を分離するものでないとこの問題の (2) は成り立たない. $\Omega = \Omega' = \{0, 1\}, \mathcal{F}' = \{\emptyset, \Omega'\}, f(0) = f(1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$, とすると $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ であって g は \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測だが, 明らかに $g = h \circ f$ なる h はありえない.

ならば $g(x) = g(y)$. 従って特に, 関数 $h = g \circ f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ は (集合関数ではなく点関数として) well-defined である. 従って $h \circ f = g$ となる (h は $\mathbf{R} \setminus f(\Omega)$ 上では, 例えば $h = 0$ と定義する.) このとき, 上と同じ A, E の選び方に対して,

$$h^{-1}(A) = \{x \in \mathbf{R} \mid f^{-1}(x) \in g^{-1}(A)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid f^{-1}(x) \in f^{-1}(E)\} = E \in \mathcal{B}_1$$

だから, h はボレル可測関数である.

[9] (H6 大阪市大 D3a). $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{B}_2 \mid Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とおく. $\mathcal{I} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1\}$ とおくと $B_1 \times B_2 \in \mathcal{I}$ に対して $Z^{-1}(B_1 \times B_2) = X^{-1}(B_1) \cap Y^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$ だから $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$. $A \in \mathcal{B}$ に対して $Z^{-1}(A^c) = (Z^{-1}(A))^c \in \mathcal{F}$, また, $A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbf{N}$, に対して $Z^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$.

故に \mathcal{B} は \mathcal{I} を含む σ 加法族となり, $\mathcal{B}_2 = \sigma[\mathcal{I}]$ であることが知られているので, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$. 即ち $A \in \mathcal{B}_2$ ならば $Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. 故に $Z : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ は可測関数.

[10] (H9 山形大 8).

(1) $\Omega' = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1, C \in 2^{\{+\infty, -\infty\}}\}$ とおく. $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ が \mathcal{F} -可測であるとは, 任意の $A \in \mathcal{F}'$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となること.

同値な定義の例:

任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{F}$ となること.

任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ となること.

任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{F}$ となること.

任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ となること.

(2) 任意の $b \in \mathbf{R}$ に対して $(-f)^{-1}((b, \infty]) = f^{-1}([-\infty, -b]) \in \mathcal{F}$ だから, $-f$ は \mathcal{F} -可測. 任意の $b \in \mathbf{R}$ に対して $(f+a)^{-1}((b, \infty]) = f^{-1}((b-a, \infty]) \in \mathcal{F}$ だから $f+a$ は \mathcal{F} -可測.

(3) $\{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{x \in \Omega \mid f(x) < r\} \cap \{x \in \Omega \mid r < g(x)\}) \in \mathcal{F}$.

(4) 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して $(f+g)^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \Omega \mid g(x) > -f(x) + a\}$. よって, (2) と (3) より $f+g$ は \mathcal{F} -可測.

[11] (欠番).

[12] (S62 お茶大 1). 主張のような α が無いとする. すると, $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid |g(x)| \geq 2^n\}) > 0$ が任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ. $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \geq 2^n\}) > 0$ も $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \leq -2^n\}) > 0$ も n に関して減少する集合だから少なくとも一方の列は任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して測度正である. 必要なら $-g$ を考えることで $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \geq 2^n\}) > 0$ が任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して成り立つとしてよい.

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $\tilde{E}_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 2^{n+1} > g(x) \geq 2^n\}$ とおく. $\mu(\tilde{E}_n) = \infty$ のときは測度の連続性から, 十分大きい $N > 0$ を取ってきて $E_n = \tilde{E}_n \cap [-N, N]$ とおくと $0 < \mu(E_n) < \infty$ とできる. $\mu(\tilde{E}_n) < \infty$ のときは $E_n = \tilde{E}_n$ とする. 前段落の考察から任意の $n_0 \in \mathbf{N}$ に対して $\mu(\sum_{n=n_0}^{\infty} E_n) > 0$ となるから, $\mu(E_n) > 0$ となる n が無数にある.

$$f = \sum_{\substack{n \geq 1; \\ \mu(E_n) > 0}} \frac{1}{2^{n/2} \mu(E_n)} \chi_{E_n}$$

とおくと, f は (非負) 実数値ルベーク可測関数であって $\int_{\mathbf{R}} f d\mu \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n/2} < \infty$ だから積分可能である.

他方, E_n 上で $g \geq 2^n$ であることに注意すると

$$\int_{\mathbf{R}} fg d\mu \geq \sum_{\substack{n \geq 1; \\ \mu(E_n) > 0}} 2^{n-n/2}.$$

よって $\mu(E_n) > 0$ となる任意の $n \geq 1$ に対して $\int_{\mathbf{R}} fg d\mu \geq 2^{n/2}$ であるが, そのような n は無数にあるから $\int_{\mathbf{R}} fg d\mu = \infty$ となって, fg が積分可能という仮定に矛盾する. 背理法により結論が成立する.

[13] (H6 千葉大 B8)⁵. $S = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \alpha\}) = 0\}$ だから $g \leq \lambda$, μ -a.e., 即ち $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \lambda\}) = 0$ ならば $\lambda \in S$ となり, 特に $\lambda \geq \inf S$ でなければならない.

逆に $\lambda \geq \inf S$ とすると, S 中の減少列 $\alpha_n, n = 1, 2, 3, \dots$, であって $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \lambda$ となるものがある. $\alpha_n \in S$ だから $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \alpha_n\}) = 0$. これと, 測度の諸性質 (非負性, 単調性, 劣加法性) から

$$0 \leq \mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \alpha\}) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \alpha_n\}\right) \leq 0,$$

即ち, $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \alpha\}) = 0$ を得る. よって, 測度の単調性と $\alpha \leq \lambda$ から $\mu(\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) > \lambda\}) = 0$ を得るので $g \leq \lambda$, μ -a.e..

[14] (H2 富山大 BVI).

(1) $\emptyset \subset \mathbf{R}$ は高々可算集合だから $\emptyset \in \mathcal{F}$ なので \mathcal{F} は空でない. $A \in \mathcal{F}$ とすると, A または A^c は高々可算であるから A^c または $(A^c)^c$ が高々可算である. 故に \mathcal{F} は補集合をとる演算で閉じている. $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}$, とする. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ だから, A_n^c が高々可算であるような n が一つでもあれば $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ が高々可算となって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ である. そのような n が一つもなければ \mathcal{F} の定義より全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して A_n が高々可算だから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も高々可算となって \mathcal{F} に属する. 故に \mathcal{F} は可算和に関して閉じている. 以上より \mathcal{F} は σ 加法族.

(2) まず, $x \rightarrow |x|$ の値域の可測空間を通常のボレル集合族と解釈する (つまり, 通常の意味で実数値可測関数と理解する).

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| > 1\} = (1, \infty) \cup (-\infty, -1)$ とおくと, A も $A^c = [-1, 1]$ も非可算集合で \mathcal{F} に属さないから $x \rightarrow |x|$ は \mathcal{F} -可測ではない.

これでは出題意図が分からないので, 念のため題意を「 $x \rightarrow |x|$ が \mathcal{F}/\mathcal{F} -可測か?」, と解釈した解も挙げておく.

$A \in \mathcal{F}$ に対して $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \in A\} = A \cup (-A)$ だが, A が高々可算ならば $A \cup (-A)$ も高々可算, A^c が高々可算ならば $(A \cup (-A))^c = A^c \cap (-A)^c$ も高々可算, よって常に $A \cup (-A) \in \mathcal{F}$ となるから, \mathcal{F}/\mathcal{F} -可測である.⁶

[15] (H8 広島大 6B).

(1) $a \geq 0$ のとき, $\{x \in E \mid g_\epsilon(x) > a\} = \{x \in F_\epsilon \mid f(x) > a\}$. f は F_ϵ 上連続だからこの集合は \mathbf{R}^N の閉集合 F_ϵ の開集合だからボレル可測集合. $a < 0$ のとき, $\{x \in E \mid g_\epsilon(x) \leq a\} = \{x \in F_\epsilon \mid f(x) > a\} \cup (E \setminus F_\epsilon)$. 上と同様に第 1 項はボレル可測集合, 一方第 2 項はルベーク可測集合. 以上より g_ϵ は E 上のルベーク可測関数.

⁵ 19981120 版の問題集ための注: 元の問題には明示されていないが, 題意から g は実数値関数である. 特に, $\mu(\{g = \infty\}) > 0$ を許すと反例が生じるので $g = \infty$ は許さないことを明記する意味で「 g は実数値可測関数」と出題すべきである.

⁶ これでも $|x|$ を考える自然な理由はないので, 結局題意は分からなかった.

(2) 問題の前提から

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \exists \tilde{F}_n \subset E; \text{閉集合, } \mu(E \setminus \tilde{F}_n) < \frac{1}{n}, \text{ かつ } f|_{\tilde{F}_n} \text{ は連続.}$$

そこで $F_n = \bigcup_{k=1}^n \tilde{F}_k, n \in \mathbf{N}$, とおくと, これは E に含まれる \mathbf{R}^N の閉集合増大列で, 各 F_n 上で f は連続関数である. さらに, $\mu(E \setminus F_n) \leq \mu(E \setminus \tilde{F}_n) < \frac{1}{n}$ を満たすので, $\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 0$. 故にこの $F_n, n = 1, 2, 3, \dots$, が求めるものである.

(3) (2) より, $a \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\{x \in E \mid f(x) > a\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in F_n \mid f(x) > a\} \right) \cup \left\{ x \in E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \mid f(x) > a \right\}$$

において, f は F_n 上連続だから右辺第 1 項はボレル集合, 第 2 項はルベーク測度 0 の集合 $E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ の部分集合だから (ルベーク測度の完備性より) ルベーク可測集合, よって右辺はルベーク可測集合となるから, f は E 上ルベーク可測関数である.

[16] (H8 熊本大 1).

(1) $\tilde{f}(x) = \sin^4 x, x \in [0, 2\pi]$, とおくと, 有理数のルベーク測度は 0 だから, $f(x) = \tilde{f}(x), \text{ a.e. } x \in [0, 2\pi]$. よって

$$\int_0^{2\pi} f(x) d\mu(x) = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) d\mu(x) = \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\pi.$$

最後の積分はリーマン可積分関数はリーマン積分とルベーク積分が一致することを用いて高校時代のリーマン積分を実行した.

(2) $\{(x, y) \in E \mid xy \in \mathbf{Q}\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{(x, y) \in E \mid xy = r\}$ において, 集合 $\{(x, y) \in E \mid xy = r\}$ は (双曲線の一部であることに注意すれば) 任意の $\epsilon > 0$ に対して一辺 ϵ の正方形高々 $2/\epsilon$ 個でおおえることはすぐに分かるから, 2次元ルベーク測度 0 の集合の部分集合であることが分かり, ルベーク測度の完備性からルベーク測度 0 のルベーク可測集合と分かる. その可算個の和集合だから $\{(x, y) \in E \mid xy \in \mathbf{Q}\}$ もルベーク測度 0 である.

よって (1) と同様に

$$\int_E f(x, y) d\mu(x, y) = \int_E xy d\mu(x, y) = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}.$$

[17] (H6 東女大 6). 結論が成り立たないとすると,

$$0 < \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$$

だから, ある $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}) > 0$ である. この n に対して

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq \int_{\{x \in \Omega \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}) > 0$$

となって仮定に矛盾する.

[18] (S60 金沢大 6). $n \in \mathbf{N}$ に対して $E_n = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ とおく. 仮定から $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$, かつ, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ だから, 測度の連続性よりある ($A \in \mathcal{A}$ によらない) $n \in \mathbf{N}$ に対して $|E_n| \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha$

となる. この n に対して $A \in \mathcal{A}$ ならば,

$$1 = |[0, 1]| \geq |A \cup E_n| = |A| + |E_n| - |A \cap E_n| \geq \alpha + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) - |A \cap E_n|.$$

よって $|A \cap E_n| \geq \frac{1}{2}\alpha$ となる. 故に,

$$\int_A f(x) dx \geq \int_{A \cap E_n} f(x) dx \geq \frac{1}{n}|A \cap E_n| \geq \frac{1}{2n}\alpha > 0.$$

最右辺は $A \in \mathcal{A}$ によらないから $\inf_{A \in \mathcal{A}} \int_A f(x) dx \geq \frac{1}{2n}\alpha > 0$.

[19] (H3 神戸大 3).

(1) [17] (H6 東女大 6) と全く同様の証明が成り立つ.

(2) 仮定より, 任意のルベグ可測集合 $E \subset [0, 1]$ に対して $\int_E (f - g)(x) dx = 0$ である. $E_+ = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq g(x)\}$, $E_- = \{x \in [0, 1] \mid f(x) < g(x)\}$, とおくと E_+ 上で $f - g$ は非負値で $\int_{E_+} (f - g)(x) dx = 0$ だから (1) と全く同様にして $f(x) - g(x) = 0$, a.e.- $x \in E_+$, となり, E_- 上で $g - f$ は非負値で $\int_{E_-} (g - f)(x) dx = -\int_{E_-} (f - g)(x) dx = 0$ だから, 同様に $g(x) - f(x) = 0$, a.e.- $x \in E_-$, となる. $[0, 1] = E_+ \cup E_-$ だから, 以上より $f(x) = g(x)$, a.e.- $x \in [0, 1]$.

[20] (H6 熊本大 1).

(1) 恒等的に 0 ではない非負値関数 $f = \chi_{\{(0,0)\}}$ は容易に分かるようにボレル可測関数なのでルベグ可測関数. 1 点集合 $\{(0,0)\}$ のルベグ測度は 0 だから $\int_{\mathbf{R}^2} f(x) dx = 0$ である.

(2) [17] (H6 東女大 6) と全く同様に $f(x) = 0$, a.e.- $x \in \mathbf{R}^2$, が成り立つ. f が非負値連続関数で恒等的に 0 でないとすると, ある開集合上で $f > 0$ となる. 開集合には正の半径の開円が含まれるから, 特に測度正なので $f = 0$, a.e., に矛盾する.