19981108–19981203
服部哲弥，津田稔朗
v19981203;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例

2．可測関数と積分　([21], [24]–[33])

[21] (S61 熊本大 3)．もし $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば [19] (H3 神戸大 3) によって $f = 0$, a.e., となり，仮定に矛盾する．

[22] (欠番)．

[23] (欠番)．

[24] (S61 九州大 X)．$n = 0, 1, 2, \cdots,$ に対して f は $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$ 上で $2^n \le f < 2^{n+1}$ である．また，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に注意すれば B_n, $n = 0, 1, 2, \cdots,$ は互いに共通部分を持たない．以上より，$\displaystyle g = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \chi_{B_n}$ とおくと，$2g > f \ge g$ が $\displaystyle A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ で成り立つ．$[0,1] \setminus A_0$ では $(0 \le)\ f < 1$, $g = 0$, だから，f がルベーグ可積分であることと g がルベーグ可積分であることは同値である．

積分の定義から

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} g\,d\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(A_n) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\mu(A_{n+1})) = \frac{1}{2}\left(\mu(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(A_n)\right)\end{aligned}$$

も分かるので，f がルベーグ可積分であることと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(A_n)) < \infty$ は同値である．

[25] (H5 山形大 9)．

(1) $A = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \ge \epsilon\}$, $g = \epsilon \chi_A$, とおくと，$|f| \ge g$ が Ω 上で成り立つので，

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \ge \int_\Omega g\,d\mu \ge \epsilon\mu(A)\,.$$

(2) [17] (H6 東女大 6) から $|f| = 0$, a.e., となるから $f = 0$, a.e., である．

(3) $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f|(\omega) = +\infty\}) > 0$ とすると，

$$+\infty = \int_\Omega |f|\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu$$

（$f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$）なので，f の正部分と負部分いずれか少なくとも一方の積分が $+\infty$ だから f は積分不可能（積分が発散するか定義できない）である．

[26] (H6 山形大 9)．ルベーグ測度の平行移動不変性は認めて解く題意と理解する．

(1) (*) の左辺は $\mu((-\alpha + B) \cap A)$, 右辺は $\mu(B \cap (\alpha + A))$.

$$\begin{aligned}&(-\alpha + B) \cap A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in A,\ x + \alpha \in B\} = -\alpha + \{x + \alpha \in \mathbf{R} \mid x \in A,\ x + \alpha \in B\} \\ &= -\alpha + \{y \in \mathbf{R} \mid y \in \alpha + A,\ y \in B\} = -\alpha + (B \cap (\alpha + A))\end{aligned}$$

だから，ルベーグ測度の平行移動不変性より

$$\mu((-\alpha + B) \cap A) = \mu(-\alpha + (B \cap (\alpha + A))) = \mu(B \cap (\alpha + A))\,.$$

(2) $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{B_i}$ とおくと (*) の左辺は (1) より,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \int_A \chi_{B_i}(x+\alpha)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{A+\alpha} \chi_{B_i}(x)\, d\mu(x)$$

だから (*) の右辺に等しい.

(3) 非負可測関数の積分は，各点で増大してその関数に収束する非負値単関数列の積分の極限で定義されているから (2) より，この場合も (*) が成り立つ.

[**27**] (S63 新潟大 4).

(1) 広義リーマン積分の定義と,（本来の）リーマン積分はルベーグ積分に一致することと，単調収束定理より,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\, dx &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N f\, d\mu = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty f\,\chi_{(0,N)}\, d\mu \\ &= \int_0^\infty \lim_{N\to\infty} f\,\chi_{(0,N)}\, d\mu = \int_0^\infty f\, d\mu\end{aligned}$$

となる（この段階では無限大を許して等号が成立）が，広義リーマン積分可能という仮定より左辺が有限なので右辺も有限，即ち f はルベーグ積分可能.

(2) $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0,\infty)$, が非負なのは $E_+ := \bigcup_{n=0}^{\infty}(2n\pi,(2n+1)\pi)$ 上であるから f の正部分は $f^+ := \max\{f,0\} = f\,\chi_{E_+}$ である．よって,

$$\int_0^\infty f^+\, d\mu = \int_{E_+} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

$F := \bigcup_{n=0}^{\infty}\{x\in(0,\infty) \mid 2n\pi + \frac{\pi}{6} \le x \le 2n\pi + \frac{5\pi}{6}\} \subset E_+$ とおくと F 上で $f^+ \ge \frac{1}{2}$ だから

$$\int_0^\infty f^+\, d\mu \ge \frac{1}{2}\mu(F)\,.$$

しかし $\mu(F) = \infty$ だから f はルベーグ積分可能ではない.

[**28**] (S60 筑波大 6)．まず，任意のルベーグ可測関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して $\int_{\mathbf{R}} |a(x)\, f(x)|\, dx \le C\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx$ を仮定する． $E = \{x\in\mathbf{R} \mid |a(x)| > C\}$ とおき， $f = \chi_E$ と選ぶと，仮定から $\int_E (|a(x)| - C)\, dx \le 0$ を得るが，積分範囲で $|a(x)| - C > 0$ なので左辺は非負だから，0 でなければならない．よって [17] (H6 東女大 6) から $|a(x)| = C$, a.e.–$x\in E$. 故に $\mu(\{x\in\mathbf{R} \mid |a(x)| > C\}) = 0$.

逆に $\mu(\{x\in\mathbf{R} \mid |a(x)| > C\}) = 0$ とすると $C \ge |a|$, a.e., だから任意のルベーグ可測関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して $\int_{\mathbf{R}}(C - |a(x)|)|f(x)|\, dx \ge 0$ となって $\int_{\mathbf{R}} |a(x)\, f(x)|\, dx \le C\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx$ を得る.

[**29**] (S62 富山大 BV).

(1)(a) $f = 0$, a.e., $\iff (\forall\lambda>0)\mu(\{x\in(0,1) \mid |f(x)| > \lambda\}) = 0 \iff \|f\|_* = 0$.

(b) $\|\cdot\|_*$ の定義より，任意の $\epsilon > 0$ に対して非負実数 λ が存在して， $\lambda\mu(\{x\in(0,1) \mid |f(x)+g(x)| > \lambda\}) \ge \|f+g\|_* - \epsilon$ が成り立つ．故に

$$\begin{aligned}&\|f+g\|_* - \epsilon \le \lambda\mu(\{x\in(0,1) \mid |f(x)| + |g(x)| > \lambda\}) \\ &\le \lambda\mu(\{x\in(0,1) \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x\in(0,1) \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ &\le 2\left(\frac{\lambda}{2}\mu(\{x\in(0,1) \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) + \frac{\lambda}{2}\mu(\{x\in(0,1) \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\})\right) \le 2(\|f\|_* + \|g\|_*)\,.\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だから $\|f+g\|_* \le 2(\|f\|_* + \|g\|_*)$.

(c) [25] (H5 山形大 9) の (1) で $\Omega = (0,1)$, $\epsilon = \lambda$, とおけば全く同様の証明が成り立つ.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$, とおくと $\lambda > 0$ に対して

$$\{x \in (0,1) \mid |f|(x) > \lambda\} = (0, \min\{1, \frac{1}{\lambda}\})$$

となるから, $\|f\|_* = \sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda\, \mu(\{x \in (0,1) \mid |f|(x) > \lambda\}) = 1 < \infty$ であるが, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$ なので $f \notin L^1$ である.

[30] (H4 広島大 6). **(i)** $\mu(D) < \infty \;\Rightarrow\; L^2(D,\mu) \subset L^1(D,\mu)$ **:** $f \in L^2(D,\mu)$ とすると, シュワルツの不等式[1] から

$$\int_D |f|\,d\mu = \int_D |f|\,\chi_D\,d\mu \le \left(\int_D |f|^2\,d\mu\right)^{1/2} \left(\int_D {\chi_D}^2 d\mu\right)^{1/2} \le \left(\int_D |f|^2\,d\mu\right)^{1/2} (\mu(D))^{1/2} < \infty$$

となるので $f \in L^1(D,\mu)$ を得る.

(ii) $\mu(D) = \infty \;\Rightarrow\; L^2(D,\mu) \not\subset L^1(D,\mu)$ **:** 任意の自然数 N に対して $\mu(D \cap [-N,N]^d) \subset (2N)^d < \infty$ だから増大する自然数列 $1 \le n_1 \le n_2 \le \cdots$ がとれて $D_k = D \cap [-n_k, n_k]^d$, $k \in \mathbf{N}$, とおくとき $\mu(D_{k+1} \setminus D_k) \ge 1$, $k = 1,2,3,\cdots$, かつ, $\mu(D_1) \ge 1$, とできる. $f:\ D \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\sqrt{\mu(D_{k+1} \setminus D_k)}}, & x \in D_{k+1} \setminus D_k, \quad k = 1,2,3,\cdots, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\mu(D_1)}}, & x \in D_1\,, \end{cases}$$

で定義すると,

$$\int_D |f|\,d\mu \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \quad \int_D |f|^2\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 1 < \infty,$$

となるので, $f \in L^2(D,\mu)$ だが $f \notin L^1(D,\mu)$ である.

[31] (S63 大阪市大 D2). ある $a > 0$ に対して $\mu(\{x \in A_2 \mid f(x) > a\}) > 0$ ならば仮定から $\mu(\{x \in A_2 \mid f(x) > a\}) = \infty$ だから, $\displaystyle\int_\Omega |f|^q\,d\mu = \infty$ となる. よって $f \in L^q$ ならば

$$\mu(\{x \in A_2 \mid |f(x)| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A_2 \mid f(x) > \frac{1}{n}\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{x \in A_2 \mid f(x) > \frac{1}{n}\}\right) = 0\,,$$

即ち, $f(x) = 0$, a.e.–$x \in A_2$. 特に $\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,d\mu = \int_{A_1} |f|^p\,d\mu$, $\displaystyle\int_\Omega |f|^q\,d\mu = \int_{A_1} |f|^q\,d\mu$, となる.

---

[1] f, g を測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 値可測関数とするとき成り立つ不等式 $\displaystyle\int_\Omega |f\,g|\,d\mu \le \|f\|_2\,\|g\|_2$ のこと. ここで, $\|f\|_2 := \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^2\,d\mu\right)^{1/2}$.

証明は, $\|f\|_2 = 0$ ならば $f = 0$, a.e., を得るので, 成立, $\displaystyle\int |f\,g|\,d\mu = \infty$ ならば $\mu(f \ne 0) > 0$, $\mu(g \ne 0) > 0$, に先ず注意する. $\displaystyle\int (|f| - |g|)^2\,d\mu \ge 0$ を考えると $\|f\|_2 = \infty$ または $\|g\|_2 = \infty$ を得るので, 成立. 残りの場合は $t := \dfrac{\int |fg| d\mu}{{\|f\|_2}^2} \in \mathbf{R}$ を t について の恒等式 $\displaystyle\int (t\,|f| - |g|)^2\,d\mu \ge 0$ に代入して分母を払うと成立する.

$\mu(A_1) < \infty$ に注意すれば，ヘルダーの不等式[2] から

$$\int_{A_1} |f|^p \, d\mu = \int_{A_1} |f|^p \, \chi_{A_1} \, d\mu \leq \left(\int_{A_1} |f|^q \, d\mu \right)^{p/q} (\mu(A_1))^{1-p/q}$$

となるので， $f \in L^q$ から $f \in L^p$ を得る.

[**32**] (H8 金沢大 5).

(1) [30] (H4 広島大 6) の (i) $\mu(D) < \infty$ から $L^2(D, \mu) \subset L^1(D, \mu)$ を導く証明において D を Ω とし，ルベーグ測度 μ を Ω 上の与えられた測度 μ とすれば全く同様の証明が成り立つ.

(2) 仮定より $|\Phi''(x)| \leq M$, $x \in \mathbf{R}$, なる定数 $M \geq 0$ があるから，テイラーの定理より

$$|\Phi(x) - \Phi(0) - \Phi'(0)x| \leq \frac{M}{2} x^2, \quad x \in \mathbf{R}\,.$$

これと三角不等式から，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\Phi \circ f| \, d\mu \leq \int_\Omega |\Phi(0) + \Phi'(0) \, f(x)| \, \mu(dx) + \int_\Omega \frac{M}{2} f(x)^2 \, d\mu(dx) \\ &\leq |\Phi(0)| \mu(\Omega) + |\Phi'(0)| \int_\Omega |f(x)| \, \mu(dx) + \frac{M}{2} \int_\Omega |f(x)|^2 \, d\mu(dx) \end{aligned}$$

となるが，有限測度空間だから右辺第 1 項は有限，f が 2 乗可積分だから第 3 項も有限，(1) よりこのとき f は可積分だから第 2 項も有限となり，$\Phi \circ f$ は可積分である.

[**33**] (H6 新潟大 2).

(1) $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &\{x \in \Omega \mid |f(x)| > a\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) < -a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) \geq -a\}^c \\ &= \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f(x) > -a - \frac{1}{n}\}^c \in \mathcal{F}\,. \end{aligned}$$

よって $|f|$ は $\mathcal{F}$–可測.

(2)

$$\begin{aligned} &\{x \in \Omega \mid \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} > a\} = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > a\,(1 + |f(x)|)\} \\ &= \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}, & a \geq 1, \\ \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \dfrac{a}{1-a}\} \in \mathcal{F}, & a < 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

よって $\dfrac{|f|}{1 + |f|}$ は $\mathcal{F}$–可測.

---

[2] 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において，$p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, のとき成り立つ不等式 $\int_\Omega |f\,g| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$ のこと. ここで，$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$.

証明は，$\|f\|_p = 0$ または $\|g\|_q = 0$ ならば $f = 0$, a.e., または $g = 0$, a.e., を得るので成立するから $\|f\|_p \|g\|_q > 0$ としてよい. $-\log$ が下に凸なので任意の $a \geq 0$, $b \geq 0$, に対して

$$\log(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(ab)\,.$$

$c = \|g\|_q{}^{1/p} / \|f\|_p{}^{1/q}$, $a = c\,|f(x)|$, $b = \dfrac{1}{c}\,|g(x)|$, を代入して $x \in \Omega$ について積分すると成立する.

(3) $|f(x)| > 1$ ならば $\dfrac{2|f(x)|}{1+|f(x)|} > 1$ なので

$$2\int_\Omega \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu \geq \int_{\{x\in\Omega \,|\, |f(x)|>1\}} \frac{2|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu \geq \mu(\{x\in\Omega \mid |f(x)|>1\})\,.$$

[**34**] (欠番).

[**35**] (欠番).

[**36**] (欠番).