

19980414-

服部哲弥, 津田稔朗

v19980513;14;18;19;21;26;0603;

10(H9 阪市 D2);11(S62 阪市 D2);18(H2 新潟 3);23(H6 お茶 9);

24(H6 熊本 8);

測度論の練習問題 (大学院入学試験問題)

1. 測度, 外測度, ルベーク測度

$\sigma$  加法族と測度 .

[1] (H6 お茶大 8) .  $\Omega$  を任意の集合とし,  $\Omega$  の部分集合の族で  $\sigma$  加法族になっているものを  $\mathcal{A}$ ,  $B$  とする . このとき次に答えよ .

- (1)  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  はまた  $\sigma$  加法族になることを示せ .
- (2)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  は必ずしも  $\sigma$  加法族にならないことを反例をもって示せ .

(ヒント :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  として考えてみよ .)

[2] (H6 千葉大 9) .  $\Omega$  を空でない集合,  $\xi$  を  $\Omega$  上で定義された実数値関数,  $\mathcal{A}$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合よりなる有限加法族とする .

- (1)  $\mathcal{C} = \{\xi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$  は  $\Omega$  上の有限加法族である .
- (2)  $\mathcal{C}$  を含む最小の  $\sigma$  加法族  $\sigma[\mathcal{C}]$  が存在する .
- (3)  $\sigma[\mathcal{C}] = \{\xi^{-1}(A) \mid A \in \sigma[\mathcal{A}]\}$  が成立する . ただし  $\sigma[\mathcal{A}]$  は  $\mathcal{A}$  を含む最小の  $\sigma$  加法族とする .<sup>1</sup>

[3] (H9 富山大 B V) . 測度空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  における可測集合列  $\{E_n\}_{n=1,2,\dots}$  が単調減少<sup>2</sup> のとき

$$\mu \left( \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

は成立するか?<sup>3</sup> 成立するならば, それを証明せよ . また, 成立しないのであれば  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\{E_n\}$  の例を述べよ .

[4] (S61 お茶大 5) .  $\mu(\Omega) < \infty$  なる測度空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において, 可測集合のある族を  $\mathcal{A}$  とし<sup>4</sup>,  $\mathcal{A}$  に属する任意の可算個の集合の合併は  $\mathcal{A}$  に属しているとする . このとき

- (1) その測度が  $\sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$  に等しくなるような集合  $B \in \mathcal{A}$  が存在する .
- (2) (1) における集合  $B$  は,  $\mathcal{A}$  に属する任意の集合  $A$  に対して  $\mu(A \cap B^c) = 0$  となる性質を持つ .

<sup>0</sup> 以下脚注は服部哲弥の注 . また, 本文においても断りなく原文の文言や記号を変えた場合がある .

<sup>1</sup> ヒント : ある性質を持つ集合からなる集合族  $\mathcal{H}$  が  $\sigma$  加法族をなすことと  $\mathcal{I}$  を含むことが言えれば  $\sigma[\cdot]$  の最小性から  $\sigma[\mathcal{H}] \subset \mathcal{I}$  が言える .

<sup>2</sup>  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$  のこと . ちなみに, 集合列が単調増加とは  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  のことを言う .

<sup>3</sup>  $\{E_n\}$  が単調減少のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  .

<sup>4</sup>  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  ということ .

[5] (S61 九大 IX) .

(1) 実数  $\mathbf{R}$  の部分集合族

$$B = \{A \subset \mathbf{R} \mid A \text{ または } A^c \text{ が高々可算集合}\}$$

は  $\mathbf{R}$  上の  $\sigma$  加法族<sup>5</sup> であることを証明せよ .

(2)  $A \in B$  が高々可算集合であれば  $\mu(A) = 0$  ,  $A^c \in B$  が高々可算集合であれば  $\mu(A) = 1$  と定義すると ,  $(\mathbf{R}, B, \mu)$  は測度空間となることを証明せよ .

[6] (H1 大阪市大 C3) . 集合  $\Omega$  の部分集合  $A$  のうち ,  $A$  または  $A^c$  が高々可算であるもの全体を  $\mathcal{A}$  とする .  $\mathcal{A} \ni A$  に対し

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & (A^c \text{ が高々可算}), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

と定義する .  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  が測度空間であるためには ,  $\Omega$  が非可算であることが必要十分であることを示せ .

[7] (H4 富山大 B VI) .  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間<sup>6</sup> とし ,  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  とするとき , 次を示せ .

$$P(A_k) \geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots) \implies P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \frac{1}{2} .$$

[8] (H9 大阪市大 D2) . 測度空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において , 集合族  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  が  $\Omega$  の可測分割であるとは ,  $A_i$  が可測<sup>7</sup> で  $\sum_{i=1}^N A_i = \Omega$  であることをいう . 可測分割  $\mathcal{A}$  および  $\mathcal{B}$  に対して

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{A} \iff (\forall A \in \mathcal{A}) \exists B \in \mathcal{B}; A \subset B$$

と定義し ,  $\Omega$  上の実数値有界関数  $f$  に対して

$$L_f(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \left( \inf_{x \in A} f(x) \right) \mu(A), \quad U_f(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \left( \sup_{x \in A} f(x) \right) \mu(A)$$

と定義する . 次のことを示せ .

(1)(a)  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$  ならば  $L_f(\mathcal{B}) \leq L_f(\mathcal{A})$  かつ  $U_f(\mathcal{B}) \geq U_f(\mathcal{A})$  ,

(b) 任意の可測分割  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に対して  $L_f(\mathcal{A}) \leq U_f(\mathcal{B})$  .

(2) 任意の可測分割  $\mathcal{B}$  に対して

$$\sup\{L_f(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ は可測分割}\} = \sup\{L_f(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ は } \mathcal{B} \prec \mathcal{A} \text{ である可測分割}\} .$$

有限加法族 , 外測度 , 可測集合 .

[9] (S62 大阪市大 D2) .  $\mathcal{G}$  を空間  $\Omega$  上の有限加法族 ,  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{G}$  から生成される  $\sigma$  加法族 ,  $\mu$  を  $\mathcal{F}$  上の確率測度とする . このとき , 任意の  $\epsilon > 0$  と  $A \in \mathcal{F}$  に対して ,  $\mathcal{G}$  の元  $B$  と  $C$  が存在して

<sup>5</sup>  $\mathbf{R}$  を全体集合とする  $\sigma$  加法族のこと .

<sup>6</sup> 測度空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において  $\mu(\Omega) = 1$  であるとき , この空間を確率空間とも呼び , このときの測度  $\mu$  を確率測度と呼ぶ .

<sup>7</sup>  $A_i \in \mathcal{F}$

$B \subset A \subset C$  かつ  $\mu(C) - \mu(B) < \epsilon$  をみたすか? もし正しければ証明し, そのような  $B$  または  $C$  が存在しない例があるならば, その例を挙げよ.<sup>8</sup>

[10] (H5 大阪市大 D1).  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間とする.  $\mathcal{F}$  が有限加法族  $\mathcal{G}$  によって生成されている<sup>9</sup> とき, 任意の  $\mathcal{F}$  の元  $A$  と任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $P(A \Delta D) < \epsilon$  を満たす  $\mathcal{G}$  の元  $D$  が存在することを示せ. 但し,  $\Delta$  は対称差<sup>10</sup> とする.<sup>11</sup>

[11] (H9 お茶大 8).  $\mathbb{R}$  は実数空間,  $2^{\mathbb{R}}$  は  $\mathbb{R}$  の部分集合の全体を表すとする. 集合関数  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) が  $2^{\mathbb{R}}$  上に次のように定義されたときに, これが外測度になるかどうか調べよ. もし, 外測度であれば,  $\Gamma_i$ -可測 ( $i = 1, 2$ ) な集合をすべて求めよ.

$$\Gamma_1(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{ が有理数を含まない集合の場合}), \\ \infty & (A \text{ が上記以外の集合の場合}). \end{cases}$$

$$\Gamma_2(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{ が有理数を含まない集合の場合}), \\ 1 & (A \text{ が上記以外の集合の場合}). \end{cases}$$

[12] (H3 新潟大 2). 任意の  $A \subset \mathbb{R}$  に対して

$$\Gamma(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ は开区間または空集合} \right\},$$

ただし,  $|I|$  は开区間  $I$  の長さを表し,  $I$  が空集合のときは  $|I| = 0$  とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  ならば  $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$  であることを示せ.
- (2)  $\{A_n\}$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合の列とすると,

$$\Gamma \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$$

であることを示せ.

- (3)  $\mathbb{Q}$  を  $\mathbb{R}$  の有理点の全体とすると,  $\Gamma(\mathbb{Q}) = 0$  であることを示せ.

[13] (H9 立教大 8). 区間  $I = [a, b]$  に対して  $|I| = b - a$  とおき,  $A \subset [0, 1]$  に対して,

$$\Gamma(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A, I_j \text{ たちは区間} \right\},$$

とおく. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\Gamma$  は  $[0, 1]$  を全体集合とする外測度になることを証明せよ.
- (2) 集合族  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}_L$  を

$$\mathcal{F} = \{E \subset [0, 1] \mid A \subset [0, 1] \text{ ならば } \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) = \Gamma(A)\},$$

$$\mathcal{F}_L = \{E \subset [0, 1] \mid I \subset [0, 1] \text{ が区間ならば } \Gamma(E \cap I) + \Gamma(E^c \cap I) = \Gamma(I)\},$$

で定義すると  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_L$  となることを証明せよ.

<sup>8</sup> 原文は「みたすことを証明せよ」となっているが, 反例がある. ヒント:  $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ,  $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A < \infty, A^c \ni 1, \text{ または } \#A^c < \infty, A \ni 1\}$ ,  $\mu(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$  は題意を満たすことを示せ. ここで

$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \in \mathcal{F}$ ,  $\epsilon = 1/4 > 0$  をとると, 問題の主張を満たすような  $B$  はとれるだろうか?

<sup>9</sup>  $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{G}]$  であることを  $\mathcal{G}$  が  $\mathcal{F}$  を生成すると言う.

<sup>10</sup>  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ .

<sup>11</sup> ヒント: 求める性質を持つ集合からなる集合族が  $\sigma$  加法族をなすことと  $A$  を含むことを言う.

必要ならば, 区間  $I \subset [0, 1]$  に対して  $\Gamma(I) = |I|$  となることを用いてもよい.

[14] (H8 都立大 7) .  $A$  を  $\mathbf{R}$  の部分集合とし,  $I_j, j = 1, 2, \dots$  は有界閉区間 ( $\subset \mathbf{R}$ ) とする.  $\alpha > 0$ , 自然数  $N$  に対して,

$$H_N^\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^\alpha \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A, \sup_j |I_j| \leq \frac{1}{N}\right\}$$

$$H^\alpha(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} H_N^\alpha(A)$$

を定義する. 但し,  $|I_j|$  は区間  $I_j$  の長さを表す.

(1)  $A$  を有界な集合とする.  $\alpha > \beta > 0$  であるとき,

$$N^{\alpha-\beta} H_N^\alpha(A) \leq H_N^\beta(A)$$

を証明せよ.

(2)  $I = [0, 1]$  とおく.  $\alpha > 1$  のとき,  $H^\alpha(I) = 0$  を示せ.

(3)  $\alpha = 1$  のとき,  $H^\alpha(I) = 1$  を示せ.

(4)  $0 < \alpha < 1$  のとき,  $H^\alpha(I) = \infty$  を示せ.

ルベーグ測度, ボレル集合族.

[15] (H6 お茶大 10) .  $\mathbf{R}^2$  のボレル集合  $B$  のルベーグ測度は次式で与えられる<sup>12</sup>.

$$\mu(B) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset B, I_j \in \mathcal{I}\right\}.$$

但し,  $\mathcal{I} = \{(a, b] \times (c, d] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty, -\infty \leq c \leq d \leq \infty\}$ ,  $m((a, b] \times (c, d]) = (b-a)(d-c)$  である. このとき円  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  のルベーグ測度は有限個の合併に関する次式でも求められることを証明せよ.

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^n m(I_j) \mid n \in \mathbf{N}, \bigcup_{j=1}^n I_j \supset A, I_j \in \mathcal{I}\right\}.$$

[16] (H9 津田塾大 A3) .  $\mu$  を直線  $\mathbf{R}$  上のルベーグ測度とする.

(1)  $\mathbf{R}$  の部分集合  $A$  の測度が 0:  $\mu(A) = 0$  であるとはどういうことか, 定義を述べよ.

(2)  $\mathbf{R}$  の部分集合  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) はすべて測度 0 であるとする:  $\mu(A_i) = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ).

このとき  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$  であることを (1) の定義を用いて示せ.

(3)  $I = [0, 1]$  を直線  $\mathbf{R}$  の単位区間とする. カントール集合

$$C = \left\{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in I \mid x_n = 1 \text{ または } 2\right\}$$

の測度は 0 であることを示せ:  $\mu(C) = 0$ . ただし, カントール集合  $C$  の可測性は仮定してよい.<sup>13</sup>

<sup>12</sup> 一般に,  $\Omega$  が位相空間のとき  $\Omega$  のボレル集合族とは  $\Omega$  の全ての開集合を含む最小の  $\sigma$  加法族のこと. この集合族を通常  $\mathcal{B}(\Omega)$  と書き, その要素 (集合) をボレル集合と呼ぶ.

<sup>13</sup> カントール集合は  $C$  の定義の中で「 $x_n = 0$  または 2」と定義するのが普通. ここの定義だと鏡映を取って平行移動したことになる. 但し, ルベーグ測度は鏡映と平行移動に関して不変なので, 影響はない.

[17] (S60 お茶大 7) .  $\delta$  は定数で  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  とする . 無限数列  $1, \delta, \delta^2, \dots$  の任意の部分無限数列の和を  $S$  とするとき , 全ての  $S$  の集合は , ルベークの意味で測度 0 であることを示せ . また ,  $\delta = \frac{1}{2}$  の場合には , 上に述べたことがどうなるかを調べよ .

[18] (S63 お茶大 6) .  $\mathbf{R}$  を実数空間 ,  $\mathcal{B}$  を  $\mathbf{R}$  上のボレル集合族とする . 可測空間  $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$  上の測度  $\mu$  は次の 3 つの条件を満足する (ただし測度は完全加法的であるとする .)

- (1) 有界なボレル集合に対しては有限な値をとる .
- (2) 空でない開集合に対しては正の値をとる .
- (3) 平行移動に関して不変である (すなわち , 任意の  $x \in \mathbf{R}$  および  $A \in \mathcal{B}$  に対して  $\mu(A+x) = \mu(A)$  が成り立つ .)

このとき , 次を証明せよ .

- (1)  $\mu([0, x]) = x\mu([0, 1])$  (ここで  $x > 0$  とする) .
- (2)  $\mu$  はルベーク測度の正定数倍である .<sup>14</sup>

[19] (S63 奈良女子大 II B) .  $\mu$  を  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  上の測度で , 全ての  $-\infty < a < b < \infty$  に対して ,  $\mu([a, b]) \leq |a - b|$  を満たすとする . このとき ,

- (1) 全ての  $x \in \mathbf{R}$  について ,  $\mu(\{x\}) = 0$  を示せ .
- (2)  $\mu(\mathbf{Q})$  を求めよ ( $\mathbf{Q}$  は有理数全体) .

[20] (H2 新潟大 3) .  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  を測度空間とする . 次の問に答えよ .

- (1)  $A_n \in \mathcal{B}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$  のとき ,  $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  である<sup>15</sup> ことを示せ .
- (2)  $A_n \in \mathcal{B}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$  , かつ ,  $\mu(A_1) < \infty$  のとき ,  $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  であることを示せ .
- (3) 特に ,  $\Omega = \mathbf{R}$  ,  $\mathcal{B}$  を (1次元)ボレル集合族とし ,  $\mu(\Omega) < \infty$  とする . さらに ,  $f(t) = \mu((-\infty, t])$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) とおくと ,  $f(t)$  が  $\mathbf{R}$  上で連続である必要十分条件は , 全ての  $a \in \mathbf{R}$  に対して  $\mu(\{a\}) = 0$  となることであることを示せ .

[21] (H6 熊本大 8) .  $\mathcal{B}$  を  $\mathbf{R}$  のボレル集合族とする . 次の問に答えよ .

- (1) 開集合の全体のなす集合族を  $\mathcal{G}$  とすると ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$  かつ  $\mathcal{G} \neq \mathcal{B}$  であることを示せ .
- (2)  $(-\infty, a]$  ,  $a \in \mathbf{R}$  , の形の区間の全体を  $\mathcal{H}$  とすると ,  $\mathcal{H}$  を含む最小の  $\sigma$  加法族は  $\mathcal{B}$  と一致することを示せ .
- (3)  $\mu$  を  $\mathcal{B}$  上の確率測度とすると ,  $\mu$  の分布関数  $F(x) = \mu((-\infty, x])$  が連続であるための必要十分条件を求めよ .
- (4)  $\mu$  を  $\mathcal{B}$  上の確率測度とすると ,  $\mu([0, 1]) = 1$  であるための分布関数  $F$  に関する条件を求めよ .

[22] (H6 お茶大 9) . 区間  $[0, 1]$  の点  $x$  は 3 進展開すると  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$  ,  $x_k \in \{0, 1, 2\}$  と表され

<sup>14</sup> 原文は「定数倍」だが、「正定数倍」が題意と思われる .

<sup>15</sup>  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  を意味し , 逆に ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  を意味する .

る . 正方形  $I = (0, 1] \times (0, 1]$  中の矩形  $I_{a,b,c,d} = (a, b] \times (c, d]$  で特に有限個の  $a_k \in \{0, 1, 2\}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) が存在して ,  $a = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$  ,  $b = a + \frac{1}{3^n}$  と表されるような矩形の全体を

$$\mathcal{I} = \{I_{a,b,c,d} \mid n \in \mathbf{N}, a = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}, b = a + \frac{1}{3^n}, 0 \leq c \leq d \leq 1\}$$

とする .  $\mathcal{I}$  の元  $I_{a,b,c,d}$  に対して実数  $\mu(I_{a,b,c,d})$  を

$$\mu(I_{a,a+\frac{1}{3^n},c,d}) = \begin{cases} \frac{d-c}{2^n}, & a = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} \text{ かつ } a_k \in \{0, 2\} \text{ for all } k = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

によって定義する . さらに , 正方形  $I$  の任意の部分集合  $B$  に対し ,

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) \mid \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset B, I_j \in \mathcal{I} \right\}$$

により  $\mu(B)$  を定義したとき ,  $\mu$  は  $I$  のボレル集合族上の測度となる .<sup>16</sup> このとき , 次の集合の測度  $\mu(A_j)$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) を求めよ .

- (1)  $A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leq \frac{1}{9}, 0 < y \leq 1\}$
- (2)  $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, 0 < y \leq 1\}$
- (3)  $A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{2}\}$
- (4)  $A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \frac{x}{2} < y \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\}$
- (5)  $A_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leq y \leq \min\{1, x + \frac{1}{2}\}\}$

完備性 , 位相的性質 .

[23] (S60 新潟大 2) .  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  を測度空間とする .  $\Omega$  の部分集合  $E$  で , 条件

(\*) 「 $E \Delta B \subset N$  ,  $\mu(N) = 0$  なる  $B \in \mathcal{B}$  ,  $N \in \mathcal{B}$  が存在する .」

を満たすものの全体を  $\bar{\mathcal{B}}$  とする (但し ,  $E \Delta B$  は対称差集合 , すなわち ,  $E \Delta B = (E \cap B^c) \cup (B \cap E^c)$  .) このとき ,

- (1)  $\bar{\mathcal{B}}$  は  $\sigma$  加法族になることを示せ .
- (2)  $E \in \bar{\mathcal{B}}$  に対して (\*) の条件を満たす  $B$  をとって ,  
 (\*\*)  $\bar{\mu}(E) = \mu(B)$   
 と定義する . このとき  $\bar{\mu}$  は (\*\*) によって一意的に定まることを示せ .
- (3)  $\bar{\mu}$  は  $\bar{\mathcal{B}}$  上の測度になることを示し , さらに完備になることを示せ .

[24] (H2 奈良女子大 VII) .  $\mu$  を  $\mathbf{R}$  上の測度とする . 任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\mu((x - \epsilon, x + \epsilon)) > 0$  となる点  $x$  の集合を  $F$  とおく .

- (1)  $F$  は閉集合であることを示せ .

<sup>16</sup> 測度になるという事実も証明すべき事項だが , 時間や解答紙面の限られている入試問題としての題意は ,  $\mu$  が測度であることは認めて以下に答えれば良いと考える .

(2)  $\mu$  が連続な測度<sup>17</sup> ならば  $F$  は孤立点を持たないことを示せ .

[25] (H6 京大 7) .  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) の閉集合  $E$  は , ルベーグ測度  $\mu$  について  $0 < \mu(E) < \infty$  であるとする . このとき  $0 < a < \mu(E)$  を満たす任意の  $a$  に対し ,  $\mu(K) = a$  なるコンパクト集合  $K \subset E$  が存在することを示せ .

[26] (S60 学習院大 10) .  $C \subset [0, 1]$  をカントールの 3 進集合<sup>18</sup> とし ,  $C' \subset [0, 1]$  を次に定める集合とする .  $I'_0 = [0, 1/4]$ ,  $I'_1 = [1/2, 1]$ ,  $I'_{00} = [0, 1/16]$ ,  $I'_{01} = [1/8, 1/4]$ ,  $I'_{10} = [1/2, 5/8]$ ,  $I'_{11} = [3/4, 1]$  . 以下 , 帰納的に  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  を , 0 または 1 からなる数列とするととき ,  $I'_{i_1, \dots, i_k}$  を 4 等分して左から 2 番目の开区間を除いて得られた閉区間を左から  $I'_{i_1, \dots, i_k, 0}$ ,  $I'_{i_1, \dots, i_k, 1}$  , としておく . そして ,  $C'_k = \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} I'_{i_1, \dots, i_k}$  ,  $C' = \bigcup_k C'_k$  , とおく . そのとき ,

- (1)  $C'$  のルベーグ測度は 0 であることを示せ .
- (2)  $\mathbf{R}$  から  $\mathbf{R}$  の上への同相写像  $h$  で  $h(C) = C'$  となるものが存在することを示せ .
- (3)  $\mathbf{R}$  から  $\mathbf{R}$  の上への  $C^1$  微分同相写像  $f$  で  $f(C) = C'$  となるものは存在しないことを示せ .

[27] (H3 東工大 8) .  $\mathcal{B}_{[0,1]}$  は区間  $[0, 1]$  のボレル集合族とし ,  $\mu$  はその上のルベーグ測度とする . さらに , 集合  $A, B$  に対して  $A \Delta B$  は対称差  $(A - B) \cup (B - A)$  を表すものとする .

- (1)  $A, B \in \mathcal{B}_{[0,1]}$  に対し  $\mu(A \Delta B) = 0$  のとき  $A \sim B$  と書くことにすれば ' $\sim$ ' は同値関係であり , 商  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{[0,1]} / \sim$  には  $d([A], [B]) = \mu(A \Delta B)$  で定義される距離  $d$  が入ることを示せ . 但し ,  $[A]$  はボレル集合  $A$  の同値類を表すものとする .
- (2) 距離空間  $(\mathcal{B}, d)$  は完備<sup>19</sup> であることを示せ .
- (3) 距離空間  $(\mathcal{B}, d)$  は可分であることを示せ .

<sup>17</sup> どの点  $x$  に対しても  $\mu(\{x\}) = 0$  となるとき  $\mu$  は連続であるという .  $\mathbf{R}$  上のボレル測度のとき意味のある概念 . 問題文原文は単に測度となっているが , 題意から开区間を定義域に含んでいるので , Borel 測度のつもりで出題していると思われる .

<sup>18</sup>  $C = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in I \mid x_n = 0 \text{ または } 2\}$

<sup>19</sup> 距離空間としての完備性 . 測度空間の完備性とは無関係であることに注意 .