19980414–0609;10;11;18;23;24;1018(落合訂正);
20050207(合冊，platex 移行);08(未解答分解答)–10;
20080217;0528;
20181015;1214;
服部哲弥，津田稔朗

大学院入学試験問題（測度論）解答例
１．測度，外測度，ルベーグ測度

σ 加法族と測度.

[1] (H6 お茶大 8).

(1) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ はともに σ 加法族だから $\Omega \in \mathcal{A}$ かつ $\Omega \in \mathcal{B}$．故に $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は空でない．$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ならば $A \in \mathcal{A}$ かつ $A \in \mathcal{B}$．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は σ 加法族だから $A^c \in \mathcal{A}$ かつ $A^c \in \mathcal{B}$．故に $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は補集合について閉じている．同様に $A_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \cdots$, とすると，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ かつ $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$．故に $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$．即ち，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は可算和について閉じている．以上より，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は σ 加法族である．

(2) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ とすると，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ である．$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が σ 加法族ならば有限和について閉じていなければならないが，$\{1\}$ と $\{2\}$ がともに $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ に入っているのに，$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ は $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ に入っていない．よって σ 加法族ではない．

[2] (H6 千葉大 9).

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ の有限加法族だから $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$．故に $\mathcal{C} \ni \xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$．即ち $\mathcal{C}$ は空ではない．$\xi^{-1}(A) \in \mathcal{C}$ かつ $A \in \mathcal{A}$ とすると，$(\xi^{-1}(A))^c = \xi^{-1}(A^c)$ と $\mathcal{A}$ が補集合に関して閉じていることより $\xi^{-1}(A)^c \in \mathcal{C}$ となり，$\mathcal{C}$ は補集合について閉じている．同様に，$i = 1, 2$ に対して $\xi^{-1}(A_i) \in \mathcal{C}$ かつ $A_i \in \mathcal{A}$ とすると，$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ となり，他方，$\xi^{-1}(A_1) \cup \xi^{-1}(A_2) = \xi^{-1}(A_1 \cup A_2)$ だから，$\mathcal{C}$ は和集合について閉じている．故に $\mathcal{C}$ は有限加法族である．

(2) $\displaystyle\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supset \mathcal{C};\\ \mathcal{B} \text{ は } \sigma \text{ 加法族}}} \mathcal{B}$ ととればよい．

(3) 問題文の式の右辺の集合族を $\mathcal{F}$ とおく．$\mathcal{A} \subset \sigma[\mathcal{A}]$ と (1) から $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ を得るから，$\mathcal{F}$ が σ 加法族ならば，$\sigma[\mathcal{C}]$ が $\mathcal{C}$ を包含する最小の σ 加法族であることより，$\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{F}$ を得る．$\mathcal{F}$ は，$\mathcal{C}$ を含んでいることから空でなく，$\sigma[\mathcal{A}]$ が σ 加法族であることに注意すれば (1) と似た議論で $\mathcal{F}$ が補集合と可算和について閉じていることが言えるので，σ 加法族である．
逆向きの包含関係，即ち，$\sigma[\mathcal{C}] \supset \mathcal{F}$ を言う．$\mathcal{H} = \{A \in \sigma[\mathcal{A}] \mid \xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]\}$ とおく．(1) より $A \in \mathcal{A}$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{C}$ だから $\mathcal{H} \supset \mathcal{A}$．従ってもし $\mathcal{H}$ が σ 加法族ならば $\mathcal{H}$ は $\sigma[\mathcal{A}]$ を包含する．即ち，$A \in \sigma[\mathcal{A}]$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]$ が成り立つので $\sigma[\mathcal{C}] \supset \mathcal{F}$ が成立する．あとは $\mathcal{H}$ が σ 加法族であることを証明すれば良い．
$A \in \mathcal{H}$ ならば $\xi^{-1}(A) \in \sigma[\mathcal{C}]$ だから $\sigma[\mathcal{C}]$ が σ 加法族であることより (1) と同様の議論で $A^c \in \mathcal{H}$ になる．$\mathcal{H}$ が可算和について閉じていることも同様に言える．よって $\mathcal{H}$ は σ 加法族であるから，既に注意したことにより，(3) が成立する．

[3] (H9 富山大 B V)．成立しない．例えば $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を実数 $\Omega = \mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とし，

$$E_n = [n, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq n\} \in \mathcal{F}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とおくと，$\{E_n\}$ は単調減少で $\mu(E_n)=\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\emptyset$．故に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\infty$ だが $\displaystyle\mu\left(\lim_{n\to\infty}E_n\right)=0$ である．

[4] (S61 お茶大 5).

(1) $K=\sup\{\mu(A)\mid A\in\mathcal{A}\}$ とおく．K の定義から $\mathcal{A}$ に属する集合の列 A_n, $n=1,2,3,\cdots$, で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=K$ となるものがある．$\displaystyle B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ が求める性質を持つことを証明する．$\mathcal{A}$ は可算和に関して閉じているから $B\in\mathcal{A}$ であり，従って K の定義から $\mu(B)\leqq K$ である．他方，任意の n に対して $A_n\subset B$ だから，測度の単調性より $\mu(B)\geqq\mu(A_n)$ が任意の n に対して成り立つことになるから $\mu(B)\geqq K$ でもある．故に $\mu(B)=K$ である．

(2) $\mu(A\cap B^c)>0$ となる $A\in\mathcal{A}$ があると仮定する．$\mathcal{A}$ は可算和について閉じているから，有限和についても閉じているので $A\cup B\in\mathcal{A}$ であり，測度の加法性から $\mu(A\cup B)=\mu(A\cap B^c)+\mu(B)>\mu(B)$ となる（ここで $\mu(\Omega)<\infty$ だから $\mu(B)<\infty$ なので等号は生じないことを用いた）．これは (1) の B の定義と矛盾する．よって $A\in\mathcal{A}$ ならば $\mu(A\cap B^c)=0$ である．[1]

[5] (S61 九大 IX).

(1) $\emptyset\in\mathcal{B}$ だから $\mathcal{B}$ は空でない．$A\in\mathcal{B}$ ならば $A=(A^c)^c$ または A^c が高々可算集合だから，$A^c\in\mathcal{B}$．$A_n\in\mathcal{B}, n=1,2,\cdots,$ ならば, 各 n 毎に A_n または ${A_n}^c$ が高々可算集合．全ての自然数 n に対して A_n のほうが高々可算集合ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ が高々可算集合なので $\mathcal{B}$ に入る．そうでなければ ${A_m}^c$ が高々可算集合になる自然数 m があるので $\displaystyle\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}{A_n}^c\subset{A_m}^c$ は高々可算集合となるからやはり $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}$ である．以上により $\mathcal{B}$ は空でなく，かつ，補集合と可算和に関して閉じているから σ 加法族である．

(2) $\mathbb{R}$ は非可算集合なので A が高々可算集合ならば A^c は非可算であり，A^c が高々可算集合ならば A は非可算になるので μ は $\mathcal{B}$ 上 well-defined．μ の定義域 $\mathcal{B}$ が σ 加法族であることは (1) で証明した．μ が非負で恒等的に無限大でないことは明らかだから，あとは可算加法性を示せばよい．
$A_n\in\mathcal{B}$, $n=1,2,\cdots,$ が $n\neq m$ ならば $A_n\cap A_m=\emptyset$ を満たすとする．A_n たちが全て高々可算集合ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ も高々可算なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=0$ かつ $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$ となって両者は等しい．もしそうでなければ $A_n\in\mathcal{B}$ なので，ある自然数 m に対して ${A_m}^c$ が高々可算集合になる．故に $\displaystyle\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}{A_n}^c\subset{A_m}^c$ も高々可算になって，$\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1$ である．$n\neq m$ とすると，$A_n\cap A_m=\emptyset$ なので $A_n\subset{A_m}^c$ であるが，${A_m}^c$ が高々可算集合なので A_n も高々可算になる．故に $n\neq m$ ならば $\mu(A_n)=0$ である．${A_m}^c$ が高々可算集合なので $\mu(A_m)=1$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(A_m)=1=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ が成り立つ．以上により μ の可算加法性が証明された．

[6] (H1 大阪市大 C3). $\mathcal{A}$ が σ 加法族になることは前問 (S61 九大 IX) の (1) の証明がそのまま適用できる．Ω が非可算集合ならば前問の (2) の証明がそのまま適用できて $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ は測度空間になる．逆に $\Omega=\emptyset^c$ が可算集合ならば μ の定義から $\mu(\emptyset)=1$ となるので μ は測度になり得ない．よって測度空間ならば Ω は非可算集合でなければならない．

[1] 背理法を陽に用いない別証明．　$\mathcal{A}$ は可算和について閉じているから有限和についても閉じるので，$A\cup B\in\mathcal{A}$. 測度の加法性と K および B の定義から

$$K\geqq\mu(A\cup B)=\mu(A\cap B^c)+\mu(B)=\mu(A\cap B^c)+K\,.$$

$K\leqq\mu(\Omega)<\infty$ だから両辺から K を引けば $0\geqq\mu(A\cap B^c)$ を得るが，測度の非負値性から $\mu(A\cap B^c)=0$ となる．

[**7**] (H4 富山大 B VI)．仮定と有限加法性から，任意の k に対して $P(A_k{}^c) = 1 - P(A_k) \leqq \dfrac{1}{2^{k+1}}$ である．これと有限加法性と劣加法性から $1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k{}^c\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2}$．これより求める不等式を得る．

[**8**] (H9 大阪市大 D2)．

(1) $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_{N_A}\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_{N_B}\}$, とおく．

(a) $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ であり，$\mathcal{B}$ が分割だから，各 $A \in \mathcal{A}$ 毎に $A \subset B$ なる $B \in \mathcal{B}$ がただ一つあるので，その B を $B(A)$ と書くことにする．inf の定義から $A \subset B$ ならば $\inf_{x \in A} f(x) \geqq \inf_{x \in B} f(x)$ なので，$L_f(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \inf_{x \in A} f(x)\mu(A) \geqq \sum_{A \in \mathcal{A}} \inf_{x \in B(A)} f(x)\mu(A) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B} f(x) \sum_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A)=B}} \mu(A)$．さらに $\mathcal{A}$ に属するどの二つの集合も共通部分を持たないことと μ の加法性を用いれば，$L_f(\mathcal{A}) \geqq \sum_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B} f(x)\mu(\bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A)=B}} A)$．ここで $\mathcal{A}$ が分割だから $\bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A};\\ B(A)=B}} A = B$ となるので $L_f(\mathcal{A}) \geqq \sum_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B} f(x)\mu(B) = L_f(\mathcal{B})$ を得る．$U_f(\mathcal{B}) \geqq U_f(\mathcal{A})$ の証明も同様である．

(b) 可測分割 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C} = \{A_i \cap B_j \mid i = 1, 2, \cdots, N_A,\ j = 1, 2, \cdots, N_B\}$ とおくと $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ となる可測分割である．定義より $L_f(\mathcal{C}) \leqq U_f(\mathcal{C})$ だから，(a) と合わせると $L_f(\mathcal{A}) \leqq L_f(\mathcal{C}) \leqq U_f(\mathcal{C}) \leqq U_f(\mathcal{B})$．

(2) 証明すべき式の左辺のほうが sup をとる対象が広いので，右辺に比べて小さくなることはない．逆に，かってな可測分割 $\mathcal{A}$ に対して，(1)(b) と同様に $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ を満たす可測分割 $\mathcal{C}$ をとると，$L_f(\mathcal{A}) \leqq L_f(\mathcal{C})$ かつ $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ となるので，証明すべき式の右辺は左辺以上である．よって等号が成立する．

有限加法族，外測度，可測集合．

[**9**] (S62 大阪市大 D2)．ヒントのように Ω, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, μ, A, ϵ をとる．$\mathcal{G}$ が有限加法族であることは (S61 九大 IX) と類似の方法で証明できる．$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して $\mathcal{G} \ni \{n\}$ だから，$\sigma[\mathcal{G}] \ni \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \{n\}\right)^c = \{1\}$．よって $\sigma[\mathcal{G}] = 2^\Omega = \mathcal{F}$．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が確率空間になることも分かる．ヒントに与えた $A \in \mathcal{F}$ に対して $B \subset A \subset C$ かつ $\mu(C) - \mu(B) < \epsilon$ をみたす $B, C \in \mathcal{G}$ があるとすると，$B^c \supset A^c = \{2, 4, 6, \cdots\}$ だから B^c は無限集合になるので $B \in \mathcal{G}$ であるためには B が 1 を含まない有限集合でなければならない．$B \subset A = \{1, 3, 5, \cdots\}$ だから，特に $B \subset \{3, 5, \cdots\}$ である．測度の単調性から $\mu(B) \leqq \mu(\{3, 5, 7, \cdots\}) = 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} + \cdots = 2^{-3}(1 - 2^{-2})^{-1} = \dfrac{1}{6}$．同様の計算で $\mu(A) = \dfrac{2}{3}$ だから $\mu(C) - \mu(B) \geqq \mu(A) - \mu(B) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} = \epsilon$ となって矛盾する．ゆえに問題が主張する B, C は取れない．

[**10**] (H5 大阪市大 D1)．$\epsilon > 0$ に対して $P(A \triangle D) < \epsilon$ を満たす $D \in \mathcal{G}$ が存在するような $A \subset \Omega$ を全て集めた集合族を $\mathcal{C}$ とする．$A \in \mathcal{G}$ ならば $D = A$ ととれるので $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$．よって $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることが言えれば $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{G}]$ が $\mathcal{G}$ を含む最小の σ 加法族であることから $\mathcal{C} \supset \mathcal{F}$ となり，全ての $A \in \mathcal{F}$ が求める性質を持つことになる．あとは $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることを証明すればよい．

$A \in \mathcal{C}$ とし，$\epsilon > 0$ を任意に選ぶ．$P(A \triangle D) < \epsilon$ となる $D \in \mathcal{G}$ をとると $A \triangle D = A^c \triangle D^c$ だから $P(A^c \triangle D^c) = P(A \triangle D) < \epsilon$．$\mathcal{G}$ は有限加法族なので $D \in \mathcal{G}$ ならば $D^c \in \mathcal{G}$ だから，$A^c \in \mathcal{C}$ を得る．ゆえに $\mathcal{C}$ は補集合に関して閉じている．$A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \cdots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする．確率の連続性より，$P\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\right) < \dfrac{\epsilon}{2}$ となる番号 N がとれる．$A_n \in \mathcal{C}$ だから $P(A_n \triangle D_n) < \epsilon\, 2^{-n-1}$ となる $D_n \in \mathcal{G}$

が存在する．$\left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right) \triangle A \subset \bigcup_{n=1}^{N} (D_n \triangle A_n) \cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \triangle A\right)$ に注意すれば $P\left(A \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right)\right) \leqq \sum_{n=1}^{N} P(D_n \triangle A_n) + P\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) < \epsilon$ を得る．故に $A \in \mathcal{C}$． 即ち， $\mathcal{C}$ は可算和に関しても閉じている．以上により $\mathcal{C}$ が σ 加法族であることが証明された．

[11] (H9 お茶大 8).

Γ_1： 非負性は自明．$\emptyset$ は有理数を含まないので $\Gamma_1(\emptyset) = 0$ も成り立つ．$A \subset B$ のとき $\Gamma_1(B) \neq 0$ ならば $\Gamma_1(B) = \infty \geqq \Gamma_1(A)$ なので単調になる．$\Gamma_1(B) = 0$ ならば B は有理数を含まないから $A \subset B$ も有理数を含まず，$\Gamma_1(A) = 0 = \Gamma_1(B)$ となって，単調性が言える．劣加法性を言うために $A_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \cdots$, および， $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とする．$\Gamma_1(A) = 0$ ならば自明に $\Gamma_1(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_1(A_n)$ が言えるから $\Gamma_1(A) \neq 0$ とすると，A は有理数を含むことになるから，ある n に対して A_n も有理数を含む．この n に対して $\Gamma_1(A_n) = \infty$ となるから，劣加法性が言える．したがって， Γ_1 は外測度.

Γ_1–可測集合を求める．$E \subset \mathbb{R}$ が可測集合であるためには任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して $\Gamma_1(A) \geqq \Gamma_1(E \cap A) + \Gamma_1(E^c \cap A)$ が成り立つことが必要十分条件である．$\Gamma_1(A) = \infty$ ならばこの条件は自動的に成り立つので $\Gamma_1(A) = 0$ の場合のみ調べればよいが，このとき A は有理数を含まないので任意の E に対して $E \cap A$ も $E^c \cap A$ も有理数を含まない．従って $\Gamma_1(E \cap A) + \Gamma_1(E^c \cap A) = 0$ となって，条件はやはり成立する．

即ち，実数の任意の部分集合が Γ_1–可測である．

Γ_2： 非負性， $\Gamma_2(\emptyset) = 0$，単調性，劣加法性，が全て Γ_1 と同様に言えるので， Γ_2 も外測度.

Γ_2–可測集合を求める．$\Gamma_2(A) = 0$ なる $A \subset \mathbb{R}$ に対しては，Γ_1 のときと同様に任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して $\Gamma_2(A) \geqq \Gamma_2(E \cap A) + \Gamma_2(E^c \cap A)$ が成り立つことが分かるので，$\Gamma_2(A) = 1$ の場合のみ条件を調べればよい．このとき，条件が成り立たない（即ち，E が可測集合でない）のは $\Gamma_2(E \cap A) = \Gamma_2(E^c \cap A) = 1$ となる A があるとき，そのときに限る．単調性からこの条件は $A = \mathbb{R}$ の場合，即ち，$\Gamma_2(E) = \Gamma_2(E^c) = 1$ となることと同値である．即ち，E が可測集合でないということと E, E^c の両方とも有理数を含むことが同値である．

よって Γ_2–可測集合は有理数を含まない集合全て，および，補集合が有理数を含まない集合全て，である．

[12] (H3 新潟大 2).

(1) $A \subset B$ $(\subset \mathbb{R})$ とする．$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ，各 I_n は開区間または空集合とすると，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ でもあるから，$\Gamma(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$．条件を満たす全ての $\{I_n\}$ に関して右辺の下限をとれば $\Gamma(A) \leqq \Gamma(B)$ を得る．

(2) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$\epsilon > 0$ とする．各自然数 n に対して $\Gamma(A_n) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| - 2^{-n}\epsilon$ かつ $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ となる開区間（または空集合）の列 $I_{n,k}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, を取れる．このとき $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ となるから，$\Gamma(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma(A_n) + 2^{-n}\epsilon) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ を得る．$\epsilon > 0$ は任意だから，$\Gamma(A) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ を得る．

(3) $x \in \mathbb{R}$ とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\{x\} \subset (x - \frac{1}{2}\epsilon, x + \frac{1}{2}\epsilon)$ だから (1) より $0 \leqq \Gamma(\{x\}) \leqq \epsilon$．故に $\Gamma(\{x\}) = 0$． $\mathbb{Q}$ は可算集合なので (2) より $\Gamma(\mathbb{Q}) = 0$.

[13] (H9 立教大 8).

(1) $\Omega=[0,1]$ とおく．Γ の定義の右辺で $I_j=[0,1]$, $j\in\mathbb{N}$, ととれることに注目すれば Γ の定義は well-defined であることが分かる．非負性は自明．$\epsilon>0$ に対して，$I_j=[0,2^{-j}\,\epsilon]$, $j\in\mathbb{N}$, とおくことにより $0\leqq\Gamma(\emptyset)\leqq\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\,\epsilon=\epsilon$ を得るが $\epsilon>0$ は任意なので $\Gamma(\emptyset)=0$ を得る．

$A\subset B\subset\Omega$ とする．$B\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ かつ各 I_j が閉区間ならば，$A\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ でもあるから，$\Gamma(A)\leqq\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|$. 条件を満たす全ての $\{I_j\}$ に関して右辺の下限をとれば $\Gamma(A)\leqq\Gamma(B)$ を得る．ゆえに単調性が成り立つ．

劣加法性をいうために Ω の部分集合の列 $\{A_n\}$ をとり，$A=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおく．$\epsilon>0$ とする．各自然数 n に対して

$$\Gamma(A_n)\geqq\sum_{j=1}^{\infty}|I_{n,j}|-2^{-n}\,\epsilon,\ A_n\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{n,j}\,,$$

となる閉区間の列 $I_{n,j}$, $j=1,2,3,\cdots$, を取れる．このとき $A\subset\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{n,j}$ となるから，

$$\Gamma(A)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|I_{n,j}|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma(A_n)+2^{-n}\,\epsilon)=\epsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)$$

を得る．$\epsilon>0$ は任意だから，$\Gamma(A)\leqq\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(A_n)$ を得る．

以上により Γ は外測度である．

(2) $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_L$ は明らかだから $E\in\mathcal{F}_L$ に対して $E\in\mathcal{F}$ を示す．劣加法性から $A\subset\Omega$ に対して $\Gamma(A)\leqq\Gamma(E\cap A)+\Gamma(E^c\cap A)$ はいつでも成り立つから，逆向きの不等号を示せばよい．

任意の $\epsilon>0$ に対して $A\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ かつ $\Gamma(A)\geqq\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|-\epsilon$ を満たす区間の列 $\{I_j\}$ を取れる．$E\in\mathcal{F}_L$ だから，ヒントの $\Gamma(I_j)=|I_j|$ も用いると，$\Gamma(E\cap I_j)+\Gamma(E^c\cap I_j)=|I_j|$ が全ての $j\in\mathbb{N}$ に対して言える．故に

$$\Gamma(A)+\epsilon\geqq\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma(E\cap I_j)+\Gamma(E^c\cap I_j))\geqq\Gamma\left(E\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\right)+\Gamma\left(E^c\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\right).$$

最後の変形で外測度の劣加法性を用いた．$A\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ を用いると，Γ の単調性から

$$\Gamma(A)+\epsilon\geqq\Gamma(E\cap A)+\Gamma(E^c\cap A)\,.$$

$\epsilon>0$ は任意だから求める不等号を得る．

[14] (H8 都立大 7).

(1) $A\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$ かつ $\displaystyle\sup_j|I_j|\leqq N^{-1}$ とすると，$N|I_j|\leqq 1$ であり，$\alpha>\beta>0$ だから，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|NI_j|^{\alpha}\leqq\sum_{j=1}^{\infty}|NI_j|^{\beta}$. 故に $N^{\alpha-\beta}H_N^{\alpha}(A)\leqq N^{\alpha-\beta}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|^{\alpha}\leqq\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|^{\beta}$. 条件を満たす全ての $\{I_j\}$ に関して右辺の下限をとれば $N^{\alpha-\beta}H_N^{\alpha}(A)\leqq H_N^{\beta}(A)$ を得る．

(2) $\epsilon>0$ に対して $I_j=[\dfrac{j-1}{N},\dfrac{j}{N}]$, $j=1,2,3,\cdots,N$, および，$I_j=[0,2^{N-j}\,\dfrac{\epsilon}{N}]$, $j=N+1,N+2,\cdots$, とおくと，閉区間列 $\{I_j\}$ は I を覆う．よって $H_N^1(I)\leqq\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|=1+\epsilon$. $\epsilon>0$ は任意だから，$H_N^1(I)\leqq 1$.

(1) と合わせると，$N^{\alpha-1}H_N^\alpha(I) \leqq H_N^1(I) \leqq 1$． $\alpha > 1$ だから $0 \leqq H_N^\alpha(I) \leqq N^{1-\alpha} \to 0$ $(N \to \infty)$ となって， $H^\alpha(I) = 0$ を得る．

(3) (2) の証明から $H_N^1(I) \leqq 1$．他方，長さの単調性と劣加法性より $I \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ ならば $1 = |I| \leqq \sum_{j=1}^\infty |I_j|$ だから $H_N^1(I) \geqq 1$．故に $H_N^1(I) = 1$ を得て，$H^1(I) = 1$ となる．

(4) (1)(3) より $N^{1-\alpha} = N^{1-\alpha}H_N^1(I) \leqq H_N^\alpha(I)$．$0 < \alpha < 1$ だから $H^\alpha(I) = \lim_{N\to\infty} H_N^\alpha(I) = \infty$.

ルベーグ測度，ボレル集合族.

[15] (H6 お茶大 10)．問題文の最初の μ を μ_1，あとの μ を μ_2 と書く．$\emptyset \in \mathcal{I}$ （明示されてはいないが，$(0,0] \times (0,0] \in \mathcal{I}$ は $\emptyset \in \mathcal{I}$ の約束と考えるべきである）だから $\mu_1(A) \leqq \mu_2(A)$ は明らか．以下 $\mu_2(A) \leqq \mu_1(A)$ を示す．

$\delta > 0$ を任意に取り，$\mathbb{R}^2$ を $x = j\,\delta$ および $y = j\,\delta$ $(j \in \mathbb{Z})$ に目盛り用の直線が引かれた（無限に広い）方眼紙とみなす．方眼紙のマス目 I_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ で円 A を覆うことにすると，$n \in \mathbb{N}$(有限) で $I_j \in \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, であり，しかも，高々円周に沿ったマス目の分だけ大きい面積の図形で覆うことになる．

円 A は凸な図形なので，円周が通るマス目はこの円を覆う正方形の 4 辺を覆うマス目の個数 $8\,[1/\delta] + 4$ 個（$[x]$ は x を越えない最大の整数）を越えることはない．（なぜなら， 円周が通るマス目のうち $j\,\delta \leqq y < (j+1)\,\delta$ にあるものと $(j-1)\,\delta \leqq y < j\,\delta$ にあるもので縦に並んでいる (x が等しい) ものは一つの象限当たり高々 1 個.）マス目 1 つの面積は δ^2 だから $\sum_{j=1}^n m(I_j) \leqq \mu_1(A) + (8\,[1/\delta] + 4)\delta^2$．故に $\mu_2(A) \leqq \mu_1(A) + (8\,[1/\delta] + 4)\delta^2 \leqq \mu_1(A) + (8 + 4\delta)\delta$．$\delta > 0$ は任意だから $\mu_2(A) \leqq \mu_1(A)$ を得る．

[16] (H9 津田塾大 A3).

(1) 可算個の区間の合併からなる A を覆う列 $J_n = \bigcup_{j=1}^\infty I_{nj}$, $n \in \mathbb{N}$, であって，$\sum_{j=1}^\infty |I_{nj}|$ が $n \to \infty$ で 0 に収束するものが取れること．式で書けば $\inf\{\sum_{j=1}^\infty |I_j| \mid \bigcup_{j=1}^\infty I_j \supset A,\ I_j$ は区間 $\} = 0$.

(2) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(A_i) = 0$ だから (1) より，任意の $\epsilon > 0$ に対して $A_i \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_{nij}$ かつ $0 \leqq \sum_{j=1}^\infty |I_{nij}| < 2^{-i}\epsilon$ となる区間達 I_{nij}, $n, j \in \mathbb{N}$, が存在する．$\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty I_{nij}$ かつ $0 \leqq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |I_{nij}| < \epsilon$ だから，再び (1) より $\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = 0$ となる．

(3) $C' = \{\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{3^n} \mid x_n = 0$ または $2\}$ とおく（本来，これがカントール集合と呼ばれる）．$\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{3 - x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{3^n}$ ということと区間の長さは平行移動で変わらないことに注意すれば $\mu(C) = \mu(C')$ となるから $\mu(C')$ を求めればよい．

$n \in \mathbb{N}$ と $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0, 2\}^n$ に対して $C_{n,x} = [\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k}, \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} + 3^{-n}]$ とおくと，$\sum_{k=n+1}^\infty \frac{2}{3^k} = 3^{-n}$ だから，$C' \subset \bigcup_{x \in \{0,2\}^n} C_{n,x}$ が成り立つ．各 $x \in \{0, 2\}^n$ に対して $C_{n,x}$ は長さ 3^{-n} の区間であり，$\{0, 2\}^n$ は要素の数が 2^n の集合だから $\mu\left(\bigcup_{x \in \{0,2\}^n} C_{n,x}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ となり，$n \to \infty$ で 0 に収束する．よって (1) より $\mu(C) = \mu(C') = 0$.

[17] (S60 お茶大 7)．全ての S を集めた集合 A は，$A=\{\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta^k \mid a_k\in\{0,1\}\ (k=0,1,2,\cdots),\ \sup\{k\geqq 0\mid a_k=1\}=\infty\}$ と書ける．n をかってな自然数とすると，$0\leqq\sum_{k=n}^{\infty}a_k\delta^k\leqq\sum_{k=n}^{\infty}\delta^k=\dfrac{\delta^n}{1-\delta}$ だから，級数の n 項目以降の和を先にとることにより，

$$\begin{aligned}A&\subset\{x+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\delta^k \mid 0\leqq x\leqq\frac{\delta^n}{1-\delta},\ a_k\in\{0,1\}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)\}\\&=\bigcup_{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n}\{x+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\delta^k \mid 0\leqq x\leqq\frac{\delta^n}{1-\delta}\}\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．

右辺の和の中の各集合は閉区間 $[\sum_{k=0}^{n-1}a_k\delta^k,\dfrac{\delta^n}{1-\delta}+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\delta^k]$ だから，その長さ（ルベーグ測度）は $\dfrac{\delta^n}{1-\delta}$ に等しい．特に，長さは $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ によらない．また，右辺の和は 2^n 個の項にわたる．従って，ルベーグ測度を μ，ルベーグ外測度を Γ と書くと，$0\leqq\Gamma(A)\leqq\sum_{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n}\dfrac{\delta^n}{1-\delta}=\dfrac{(2\delta)^n}{1-\delta}$ が任意の n に対して成り立つ．

$0\leqq\delta<1/2$ ならば右辺は $n\to\infty$ で 0 に収束するから，この式が任意の n に対して成り立つためには $\Gamma(A)=0$ でなければならない．ルベーグ測度は完備なので，このことから A がルベーグ可測で，かつ，$\mu(A)=\Gamma(A)=0$ となる．

$\delta=1/2$ のとき，区間 $(0,2]$ の任意の点は，2 進展開すれば A に含まれることが分かる（2 進有理点は 1 が無限に続く表示をとる）．逆に任意の $x\in A$ に対して，$0<x\leqq 2$ が成り立つことも容易に分かる．よって $A=(0,2]$ となるから $\mu(A)=2$．[2]

[18] (H6 京大 7)．$r\geqq 0$ に対して原点を中心とする半径 r の n 次元閉球を $B(r)$ と書き，$f(r)=\mu(E\cap B(r))$ とおいて $f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ を定義する．$E\cap B(r)$ はコンパクト集合であることに注意．f は非減少関数で $f(r)\leqq\mu(B(r))=O(r^n)$，および，測度の σ 加法性から $\mu(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E\cap(B(k)\setminus B(k-1)))$ において，左辺が有限なので右辺の級数が収束すべきだから，特に $\lim_{k\to\infty}\mu(E\cap B(k))=\mu(E)$．よって f が連続であることが言えれば中間値の定理から $\mu(E\cap B(r))=a$ となる $r>0$ が存在するので $K=E\cap B(r)$ とすればよい．f の $r>0$ での連続性は，測度の連続性

$$\lim_{n\to\infty}f(r+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\mu(E\cap B(r+\frac{1}{n}))=\mu(E\cap B(r))=f(r)$$

から従う．

[19] (S63 お茶大 6)．

(1) μ が測度であることと条件 (3) より，x が自然数のとき主張が成り立つ．x が正の有理数のとき $x=\frac{m}{n}$ となる $n,m\in\mathbb{N}$ がある．再び μ が測度であることと条件 (3) より，$n\mu([0,\frac{1}{n}))=\mu([0,1))$ となるから $\mu([0,x))=\frac{m}{n}\mu([0,1))$ となって，x が正の有理数のときも主張が成り立つ．

実数 $x>0$ に対して，$x_n\uparrow x$ なる有理数列 $\{x_n\}$ を取る．$\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,x_n)=[0,x)$ だから測度の連続性から $\mu([0,x))=\lim_{n\to\infty}\mu([0,x_n))=\lim_{n\to\infty}x_n\mu([0,1))=x\mu([0,1))$．[3]

---

[2] $\delta<1/2$ のときの，ルベーグ外測度の並進不変性と定数倍に対する線形性を既知とした別解の概略．　実数 a と実数の集合 A に対して $aA=\{ax\mid x\in A\}$，$a+A=\{a+x\mid x\in A\}$ などと書くことにすると，$0\leqq\delta<1/2$ のとき $A=\delta A+(1+\delta A)$ だから，ルベーグ測度の並進不変性と定数倍に対する線形性から $\Gamma(A)=\Gamma(\delta A)+\Gamma(1+\delta A)=2\delta\Gamma(A)$．$0\leqq\delta<1$ なので $\Gamma(A)<\infty$ であり，$\delta\neq 1/2$ なので上の式から $\Gamma(A)=0$ を得る．

[3] 測度の連続性ではなく単調性を用いた別証明．　x が有理数の場合の証明までは上に同じ．$x>0$ が一般の実数のとき，$x_n\uparrow x$ なる有理数列 $\{x_n\}$ と $y_n\downarrow x$ なる有理数列 $\{y_n\}$ を取ると，測度の単調性から

$$x_n\mu([0,1))=\mu([0,x_n))\leqq\mu([0,x))\leqq\mu([0,y_n))=y_n\mu([0,1))$$

となるので，$n\to\infty$ の極限をとって，数列の極限に関する挟み撃ちの原理を用いれば証明が終わる．

(2) 問 (1) と条件 (3) より $\mu([a,b)) = (b-a)\mu([0,1))$．即ち区間に対してルベーグ測度の $\mu([0,1))$ 倍になる．従って，ルベーグ測度の構成と同様に外測度を作り可測集合に制限すると測度を得るが，その値はルベーグ測度の値の $\mu([0,1))$ 倍になる．条件 (1)(2) よりこの定数 $\mu([0,1))$ は正の実数である．

[20] (S63 奈良女大 II B).

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\{x\} \subset [x-\frac{1}{2}\epsilon, x+\frac{1}{2}\epsilon]$ なので $\mu(\{x\}) \leqq \mu([x-\frac{1}{2}\epsilon, x+\frac{1}{2}\epsilon]) = \epsilon$．$\epsilon > 0$ は任意だから $\mu(\{x\}) = 0$．

(2) 測度の可算加法性から $\mu(\mathbb{Q}) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}} \mu(\{x\}) = 0$.

[21] (H2 奈良女大 VII).

(1) $x \in F^c$ ならばある $\epsilon > 0$ があって $\mu((x-\epsilon, x+\epsilon)) = 0$．$|y-x| < \epsilon/2$ ならば $x-\epsilon \leqq y-\epsilon/2$ および $y+\epsilon/2 \leqq x+\epsilon$ だから $(y-\epsilon/2, y+\epsilon/2) \subset (x-\epsilon, x+\epsilon)$ なので $\mu((y-\epsilon/2, y+\epsilon/2)) = 0$．すなわち $y \in F^c$ となるから，x は F^c の内点である．従って F^c は開集合だから，F は閉集合である．

(2) $x \in F$ が孤立点とすると，$0 < |y-x| < \delta$ ならば $y \in F^c$ であるように $\delta > 0$ がとれる．そのような y に対して $\delta_y > 0$ が存在して $\mu((y-\delta_y, y+\delta_y)) = 0$.（本質ではないが簡単のため,）$\delta_y$ は十分小さく

$$x \notin (y-\delta_y, y+\delta_y) \subset (x-\delta, x+\delta)$$

となるようとっておくと，

$$\bigcup_{y\in((x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\})} (y-\delta_y, y+\delta_y) = (x-\delta, x+\delta)\setminus\{x\} = (x-\delta, x)\cup(x, x+\delta).$$

つまり左辺は右辺の 2 つの開区間の和の開被覆だから，その中の可算個で $(x-\delta, x+\delta)\setminus\{x\}$ を覆うことができる．言い換えると，可算集合 A がとれて

$$\bigcup_{y\in A}(y-\delta_y, y+\delta_y) = (x-\delta, x+\delta)\setminus\{x\}.$$

また，F の定義から $\mu((x-\delta, x+\delta)) > 0$．したがって

$$\mu(\{x\}) = \mu((x-\delta, x+\delta)) - \mu(\bigcup_{y\in A}(y-\delta_y, y+\delta_y)) > 0$$

となるが，これは μ が連続であるという仮定に反するから F の点は孤立点にはなりえない．

[22] (H2 新潟大 3).

(1) $B_1 = A_1$，および，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して $B_n = A_n - A_{n-1}$ とおくと σ 加法性と有限加法性から
$\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu(B_n) = \lim_{N\to\infty}\mu\left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty}\mu(A_N).$

(2) $A'_n = A_1 - A_n$, $n \in \mathbb{N}$, とおけば (1) から

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\cap A_n^c)\right)\\ &= \mu(\lim_{n\to\infty} A'_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A'_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\,.\end{aligned}$$

$\mu(A_1) < \infty$ だから $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

(3) $t_n \downarrow t$ とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = (-\infty, t_n] \in \mathcal{B}$ とおくと $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, t]$ だから $\mu(\Omega) < \infty$ と (2) から $f(t) = \mu((-\infty, t]) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu((-\infty, t_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$.
次に $t_n \uparrow t$ とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = (-\infty, t_n]$ とおくと $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty, t)$ だから (1) から $\mu((-\infty, t)) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu((-\infty, t_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$．故に $f(t) = \mu((-\infty, t]) = \mu(\{t\}) + \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$.
よって f が $\mathbb{R}$ 上連続であることと $\mu(\{t\}) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, が同値になる．

[23] (H6 熊本大 8).

(1) 集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と書く．$\mathcal{B}$ の定義から $\mathcal{B}=\sigma[\mathcal{G}]\supset\mathcal{G}$ である．他方，例えば $[0,1]\notin\mathcal{G}$ であるが，$[0,1]=\{(-\infty,0)\cup(1,\infty)\}^c\in\mathcal{B}$ なので $\mathcal{G}\neq\mathcal{B}$ である．

(2) 任意の $A=(-\infty,a]\in\mathcal{H}$ に対して $A_n=\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\cdots$, とおくと A_n は開集合で $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ だから $A\in\mathcal{B}$．よって $\mathcal{H}\subset\mathcal{B}$．$\mathcal{B}$ は σ 加法族だから $\sigma[\mathcal{H}]\subset\mathcal{B}$.
次に任意の $-\infty\leqq a\leqq b\leqq\infty$ に対して $(a,b]=(-\infty,b]\cap(-\infty,a]^c\in\sigma[\mathcal{H}]$．開集合 $G\in\mathcal{G}$ に対して $x\in G$ ならば，x を内部に含みしかも G に含まれる区間 $I_x=(a_x,b_x]\in\sigma[\mathcal{H}]$ がある．I_x の内部を $I_x{}^o$ と書くと $\bigcup_{x\in G}I_x{}^o\supset G$ だから Lindelöf の被覆定理より可算個の $x_n\in G$, $n\in\mathbb{N}$, が存在して，$G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}{}^o\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}$．各 x_n に対して $I_{x_n}\subset G$ だから $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\subset G$．よって，$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{x_n}\in\sigma[\mathcal{H}]$ だから $G\in\sigma[\mathcal{H}]$ を得る．即ち $\mathcal{G}\subset\sigma[\mathcal{H}]$．故に $\mathcal{B}\subset\sigma[\mathcal{H}]$.
以上により，$\mathcal{B}=\sigma[\mathcal{H}]$.

(3) F が連続ならば $\mu((-\infty,x])=F(x)=\lim_{n\to\infty}F(x-n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-n^{-1}])=\mu((-\infty,x))$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して成立．ここで最後の変形で確率の連続性を用いた．これより，$\mu(\{x\})=0, x\in\mathbb{R}$.
逆を言うために，先ず F の右連続性 $\lim_{y\downarrow x}F(y)=F(x), x\in\mathbb{R}$, はいつでも成り立つことに注意する．実際，$F$ が単調関数であることと確率の連続性から，$\lim_{y\downarrow x}F(y)=\lim_{n\to\infty}F(x+n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x+n^{-1}])=\mu((-\infty,x])=F(x)$ が成り立つ．さて，$\mu(\{x\})=0$, $x\in\mathbb{R}$, とすると，再び F が単調関数であることと確率の連続性から，$\lim_{y\uparrow x}F(y)=\lim_{n\to\infty}F(x-n^{-1})=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-n^{-1}])=\mu((-\infty,x))=\mu((-\infty,x))+\mu(\{x\})=\mu((-\infty,x])=F(x)$ が成り立つ．故に，F は $\mathbb{R}$ 上連続.
以上より，F が $\mathbb{R}$ 上連続であるための必要十分条件は，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $\mu(\{x\})=0$ なること[4].

(4) F は非負増加関数で $\lim_{x\to\infty}F(x)=\mu(\mathbb{R})=1$ だから，特に $0\leqq F(x)\leqq 1$, $x\in\mathbb{R}$．$1=\mu([0,1])=\mu((-\infty,1])-\mu((-\infty,0))=F(1)-\lim_{n\to\infty}F(-n^{-1})\leqq 1$ だから，$F(1)=1$ かつ $\lim_{n\to\infty}F(-n^{-1})=0$ が必要十分．後者は $F(x)=0$, $x<0$ と同値．よって必要十分条件は $F(1)=1$ かつ $F(x)=0$, $x<0$.

[24] (H6 お茶大 9).

(1) $A_1=I_{a,a+3^{-2},0,1}$, $a=\sum_{k=1}^{2}\frac{a_k}{3^k}$, $a_1=a_2=0$．よって $\mu(A_1)=\frac{1-0}{2^2}=\frac{1}{4}$.

(2) $A_2=I_{a,a+\frac{1}{3},0,1}$, $a=\frac{a_1}{3^1}$, $a_1=1$．よって $\mu(A_2)=0$.

(3) $A_3=\sum_{n=1}^{\infty}I_{a^{(n)},b^{(n)},0,\frac{1}{2}}$, $a^{(1)}=0$, $a^{(n)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^k}$ $(n\geqq 2)$, $b^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$ $(n\geqq 1)$, $\mu(I_{a^{(1)},b^{(1)},0,\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}$, $\mu(I_{a^{(n)},b^{(n)},0,\frac{1}{2}})=0$ $(n\geqq 2)$, だから $\mu(A_3)=\frac{1}{4}$.

(4) A_4 と $I-A_4$ をそれぞれ計算しやすいように $\mathcal{I}$ の要素達で覆い，後者に関しては μ の単調性も用いて $\mu(A_4)$ を上下から評価する正攻法（(5) の解答例参照）でも計算できるが，y 軸方向の平行移動不変性 $\mu(A)=\mu(\{(x,y+a)\mid(x,y)\in A\})$ $(a\in\mathbb{R}, A\in\mathcal{B}, \{(x,y+a)\mid(x,y)\in A\}\subset I)$ がルベーグ測度のときと同様に示されるので，それを認めれば議論は短い.
即ち，$A\cap B=\emptyset$ のときに限り $A+B=A\cup B$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}A_4&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqq 1,\ \frac{x}{2}<y\leqq\frac{1}{2}\}+\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqq 1,\ \frac{1}{2}<y\leqq\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq\frac{x}{2}\}+\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqq 1,\ \frac{x}{2}<y\leqq\frac{1}{2}\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq\frac{1}{2}\}=I_{0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}}+I_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{1}{2}}+I_{\frac{2}{3},1,\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

[4](H2 新潟大 3)(3) も参照.

よって $\mu(A_4)=\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $A_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leqq 1,\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq \min\{1,x+\dfrac{1}{2}\}\}$ であるが $A_5'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leqq 1,\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}<y\leqq \min\{1,x+\dfrac{1}{2}\}\}$ とおく．

$m\in\mathbb{N}$ とする．$k=0,1,\cdots,3^m-1$ に対して $I_k^{(m)}=(\dfrac{k}{3^m},\dfrac{k+1}{3^m}]\times(\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{3^m}+\dfrac{1}{2},\min\{1,\dfrac{k+1}{3^m}+\dfrac{1}{2}\}]$, とおくと，$I_k^{(m)}\in\mathcal{I}$ であり，

$$\mu(I_k^{(m)})=\begin{cases} 2^{-m}(\min\{\dfrac{1}{2},\dfrac{k+1}{3^m}\}-\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{3^m}), & \dfrac{k}{3^m}=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\dfrac{a_\ell}{3^\ell}\ \text{かつ}\ a_\ell\in\{0,2\}\ \text{for all}\ \ell=1,\cdots,m,\\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

$A_5'\subset\displaystyle\bigcup_{k=0}^{3^m-1}I_k^{(m)}$ だから

$$\begin{aligned}\mu(A_5')&\leqq\sum_{a_1\in\{0,2\}}\cdots\sum_{a_m\in\{0,2\}}2^{-m}\left(\min\{\frac{1}{2},3^{-m}+\sum_{\ell=1}^{m}a_\ell 3^{-\ell}\}-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m}a_\ell 3^{-\ell}\right)\\&=\sum_{a_2\in\{0,2\}}\cdots\sum_{a_m\in\{0,2\}}2^{-m}\left(3^{-m}+\sum_{\ell=2}^{m}a_\ell 3^{-\ell}-\frac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{m}a_\ell 3^{-\ell}\right)\\&\quad+\sum_{a_2\in\{0,2\}}\cdots\sum_{a_m\in\{0,2\}}2^{-m}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sum_{\ell=2}^{m}a_\ell 3^{-\ell}\right)\\&=\sum_{a_2\in\{0,2\}}\cdots\sum_{a_m\in\{0,2\}}2^{-m}(3^{-m}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{1}{2}(\frac{1}{6}+\frac{1}{3^m}).\end{aligned}$$

任意の m に対してこれが成り立つから $\mu(A_5')\leqq\dfrac{1}{12}$．$I-A_5'$ に対して同様の計算を行えば $\mu(I-A_5')\leqq\dfrac{11}{12}$ を得る．従って，$\mu(A_5')=\mu(I)-\mu(I-A_5')\geqq 1-\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{12}$ となり，結局 $\mu(A_5')=\dfrac{1}{12}$ を得る．
定義から任意の連続関数 $f:[0,1]\to[0,1]$ に対して $\mu(\{(x,y)\in I \mid y=f(x)\})=0$ が成り立つ．従って $\mu(A_5)=\mu(A_5')=\dfrac{1}{12}$.
（最後の部分の議論を使わずに直接 A_5 を A_5' に対して行ったように区間で覆って評価することもできるが $3^{-m}\epsilon>0$ をあちこちに書かねばならず，解答例としては煩雑になるので省略した.）[5]

[25] (S60 学習院大 10).

(1) 集合 $A\subset[0,1]$ のルベーグ測度を $|A|$ と書くことにする．作り方から $|C_1'|=\dfrac{3}{4}$ および $k=1,2,3,\cdots$ に対して $|C_{k+1}'|=\dfrac{3}{4}|C_k'|$ および $C_1'\supset C_2'\supset\cdots$ だから $|C'|=\displaystyle\lim_{k\to\infty}|C_k'|=0$.

(2) カントール 3 進集合 $C\subset[0,1]$ は C' の構成において $I_0=[0,1/3]$, $I_1=[2/3,1]$, $I_{00}=[0,1/9]$, $I_{01}=[2/9,1/3]$, $I_{10}=[2/3,7/9]$, $I_{11}=[8/9,1]$，および，k について帰納的に，$I_{i_1,\cdots,i_k}$ を 3 等分して中央の開区間を除いて得られた閉区間を左から $I_{i_1,\cdots,i_k,0}$, $I_{i_1,\cdots,i_k,1}$，として，$C_k=\displaystyle\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}I_{i_1,\cdots,i_k}$,

$C=\displaystyle\bigcap_k C_k$，とおいて得られる．

$h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を以下で定義する．まず $x\leqq 0$ または $x\geqq 1$ のときは $h(x)=x$ とおく．次に，$[1/3,2/3]$ を $[1/4,1/2]$ に線形に写し，$[1/9,2/9]$, $[7/9,8/9]$ をそれぞれ $[1/16,1/8]$, $[5/8,3/4]$ に線形に写すとする．以下帰納的に各 k に対して $I_{i_1,\cdots,i_k}'$ から除いた区間を $I_{i_1,\cdots,i_k}$ から除いた区間に線形に写すものと定義する．以上で h は $\mathbb{R}$ の稠密な部分集合 C^c で定義された増加関数になる．この h は $x\in C^c$ の近

[5] Fubini の定理を用いた別解の方針.　Fubini の定理 $\mu(A)=\displaystyle\int_0^1\mu_y(A_x)\,d\mu(x)$ を用いれば，(4) で用いた y 軸方向の平行移動不変性や，$x=1/2$ に関する鏡映不変性を用いて三角形を変形して長方形に（μ 測度を変えずに）変形できるので，計算がエレガントに早くできる．出題の意図が Fubini の定理を既知としていないようなので詳しいことは省略するが，各自証明を工夫されたい.

傍では傾きが正の（0 より大きく有限な）線形写像だから h もその逆象も連続であり，さらに明らかに $h(C^c) = C'^c$ および $h^{-1}(C'^c) = C^c$ が成り立つ．

C' の構成において（C の場合とほぼ同様に）$I'_{i_1,\cdots,i_k}$ の長さは最大 2^{-k} なので $k \to \infty$ で 0 になるから，$x \in C$ に対する $h(x)$ の値は C^c の点列を h で（すでに定義したように）写した点列の極限で一意的に定まる．すなわち，$h(y)$ は $y \in C^c$ に関して増加なので左右の極限 $y \to x \pm 0$ が存在するが，その値は x の含まれる $I_{i_1,\cdots,i_k}$ の両端を写した先の間，すなわち $I'_{i_1,\cdots,i_k}$ に含まれるが，$k \to \infty$ でこの区間幅が一様に 0 に収束するので，左右の極限が一致し，$h(x)$ が一意に決まる．よって h は $\mathbb{R}$ 全体に一意的に拡張できる．極限で定義したので連続関数である．$x \neq y$ ならばその間に C^c の開区間がとれることは容易に分かるが，h は C^c 上で狭義増加なので $\mathbb{R}$ 上で狭義増加であり，従って逆関数 h^{-1} が存在する．$h(C^c) = C'^c$ が $\mathbb{R}$ の中で稠密で極限で h を拡張したので h の値域は $\mathbb{R}$ 全体となり従って h^{-1} は $\mathbb{R}$ 上で定義される．それが連続になることは h の連続性の考察と基本的に同様である．$h(C^c) = C'^c$ と $h^{-1}(C'^c) = C^c$ が既に分かっていたから $h(C) = C'$（および $h^{-1}(C') = C$）も従う．

(3) もし C^1 同相写像があると，閉区間 $[0,1]$ 上に制限したときリプシッツ連続な関数（ある正数 c が存在して，定義域上の任意の x と y に対して $|f(x) - f(y)| \leqq c|x - y|$ となる関数）になる．ハウスドルフ次元はリプシッツ連続な関数で不変なことが（ハウスドルフ次元の定義に戻って調べることで）知られているが，カントールの 3 進集合 C のハウスドルフ次元は $\dfrac{\log 2}{\log 3}$，C' のハウスドルフ次元 s は $4^{-s} + 2^{-s} = 1$ の解，すなわち $x^2 + x = 1$ の正の解 x に対して $s = -\dfrac{\log x}{\log 2}$，なので，両者は等しくないから，$C$ と C' は C^1 同相にはならない[6]．

測度の完備性.

[26] (S60 新潟大 2).

(1) 題意により $\mathcal{B}$ は σ 加法族なので，$\emptyset \in \mathcal{B}$ および $\Omega \in \mathcal{B}$．よって $(*)$ で $N = \emptyset$ と選ぶことで $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}}$ がまずわかり，特に $\Omega \in \bar{\mathcal{B}}$ である．

次に，$E \in \bar{\mathcal{B}}$ とすると $(*)$ から $E \triangle B \subset N$ かつ $\mu(N) = 0$ なる集合 B と N が $\mathcal{B}$ の中に存在する．$\mathcal{B}$ は σ 加法族だから B^c も $\mathcal{B}$ の中にあるが，$E^c \triangle B^c = (E^c \cap B) \cup (B^c \cap E) = E \triangle B \subset N$ なので $E^c \in \bar{\mathcal{B}}$ が従う．

最後に，$E_n \in \bar{\mathcal{B}}, n = 1,2,3,\cdots,$ とすると，$n = 1,2,3,\cdots$ に対して $E_n \triangle B_n \subset N_n$ かつ $\mu(N_n) = 0$ なる集合たち B_n と N_n が $\mathcal{B}$ の中に存在する．このとき

$$(\triangle) \qquad (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \triangle (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \triangle B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

となるが，$\mathcal{B}$ が可算和について閉じているので $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{B}$ および $(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \in \mathcal{B}$ であり，測度の劣加法性から $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0$ なので $(*)$ から $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \in \bar{\mathcal{B}}$ を得る．

以上により $\bar{\mathcal{B}}$ は σ 加法族である．

なお，$(\triangle)$ の左側の包含関係は次のように証明される．$x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \triangle (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ は，$\exists n_0; x \in B_{n_0}$ かつ $(\forall n)\ x \notin E_n$ であるか，または，$\exists n_0; x \in E_{n_0}$ かつ $(\forall n)\ x \notin B_n$ であるか，いずれかであることと同値だが，どちらが成り立つにせよある n_0 に対して $x \in B_{n_0} \triangle E_{n_0}$ となるので，$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \triangle E_n)$．

よって $(\triangle)$ が成り立つ．

(2) $(*)$ を満たす 2 つの組 B_1, N_1 と B_2, N_2 をとると，$(*)$ から $i = 1,2$ に対して $B_i \subset E \cup (N_i \cap E^c)$ および $B_i^c \subset E^c \cup (N_i \cap E)$, $i = 1,2$, なので，ドモルガンの法則を何度も使うことで

$$B_1 \triangle B_2 \subset (N_2 \cap E) \cup (N_1 \cap E^c) \cup (N_1 \cap E) \cup (N_2 \cap E^c) \subset N_1 \cup N_2$$

[6] 2008/02/17 に落合啓之先生が旧版の解答に問題があることを指摘してくださったのを受けて，フラクタルの専門家である服部久美子先生に質問したところ教えていただいた解．

となるから，

$$|\mu(B_1)-\mu(B_2)| \leqq \mu(B_1 \triangle B_2) \leqq \mu(N_1 \cup N_2) = 0,$$

すなわち，$\mu(B_i)$ の値は $(*)$ を満たす B_i の選び方によらないので，$(**)$ は $\bar{\mu}(E)$ の値を一意的に定める．

(3) 非負であることと $B \in \mathcal{B}$ に対して $\bar{\mu}(B) = \mu(B)$ になることは明らかである．σ 加法性を確かめればよい．そこで $E_n \in \bar{\mathcal{B}}, n = 1, 2, 3, \cdots,$ がどの 2 つも共通部分を持たないとする．$\bar{\mathcal{B}}$ の定義により各 n について $B_n \in \mathcal{B}$ と $N_n \in \mathcal{B}$ が存在して $E_n \triangle B_n \subset N_n$ が成り立つ．$B_n \cap E_n^c \subset N_n$ なので $B_n \cap N_n^c \subset E_n$ だから，$B_n \cap N_n^c, n = 1, 2, 3 \cdots,$ は共通部分を持たない．よって（$\mu(N_n) = 0$ にも注意して）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap N_n^c) + \mu(N_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap N_n^c)) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) \leqq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

前小問で得た $(\triangle)$ から，最右辺は $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ に等しい．よって（逆向きの不等式は劣加法性 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ によって常に成り立つので）σ 加法性が成り立つ．すなわち，$\bar{\mu}$ は測度である．

あとは $(\Omega, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ の完備性を示せばよい．$A \subset \bar{N}$ と $\bar{\mu}(\bar{N}) = 0$ を満たす $\bar{N} \in \bar{\mathcal{B}}$ があれば，$\bar{\mathcal{B}}$ の定義から $\bar{N} \triangle B \subset N'$ と $\mu(N') = 0$ を満たす $B, N' \in \mathcal{B}$ があって，$\bar{\mu}$ の定義から $\mu(B) = \bar{\mu}(\bar{N}) = 0$ であることにも注意すると，$N = B \cup N'$ に対して，$A \subset N$ かつ $N \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(N) = 0$ となる．

$A \triangle N \subset N$ なので $A \in \bar{\mathcal{B}}$ かつ $\bar{\mu}(A) = \mu(N) = 0$．すなわち $\bar{\mu}$ は完備である．