19980414–19981203;1221;19991014;
20050206(合冊，platex 移行)–09;
20080218;0517,20;
20160916,18;
20190129;0715;
20220705;
服部哲弥，津田稔朗,（＋　石川洋一，市原洋文，小島康宏，竹田紗苗，松井真也，各１問）

大学院入学試験問題（測度論）解答例
２．可測関数と積分

単関数とその積分.

[1] (H8 筑波大 6).

(2) ⇒ (1): 仮定 (2) より $f=\sum_{i=1}^{N} a_i\chi_{E_i}$, $N\in\mathbb{N}$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,N$, とおける．任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a,\infty))=\bigcup_{i:a_i>a} E_i$. $\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{E}]$ だから $f^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{F}$.

(1) ⇒ (2): 仮定 (1) より任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{F}$ である．もし f がある E_i 上一定でないとすると，$f(x)<f(y)$ となる x, $y\in E_i$ が存在する．$f(x)<c<f(y)$ となる $c\in\mathbb{R}$ をとると，$x\notin f^{-1}((c,\infty))$ かつ $y\in f^{-1}((c,\infty))$. 一方 $\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{E}]$ は E_i たちの (0 個以上の) 和集合からなる集合族だから $f^{-1}((c,\infty))\notin\mathcal{F}$ となり，矛盾．故に f は各 E_i 上一定値をとる．

[2] (H3 立教大 6).

(1) U_n は閉区間だからルベーグ可測集合．その可算和だから U もルベーグ可測．$\mu(U_n)=2^{-n-1}$ だから，測度の劣加法性より $\mu(U)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(U_n)=\frac{1}{2}$. 測度の単調性から $\mu(U)\geqq\mu(U_1)=\mu([a_1-1/8,a_1+1/8])$ だが，$[a_1,a_1+\frac{1}{8}]$ または $[a_1-\frac{1}{8},a_1]$ いずれかは $[0,1]$ に含まれる．いずれもルベーグ測度は $\frac{1}{8}$ だから $\mu(U)\geqq\frac{1}{8}$.

(2) U はルベーグ可測集合だから χ_U はルベーグ可測関数であり，$\int_{[0,1]}\chi_U\,d\mu=\mu(U)$. U は $[0,1]$ の全ての有理数を含むので，U は $[0,1]$ で稠密．よって $U^c:=[0,1]\setminus U$ は内点を持たない集合で，しかも $\mu(U)\leqq\frac{1}{2}$ だから $\mu(U^c)\geqq\frac{1}{2}$. よって任意の $\delta>0$ に対して，$[0,1]$ の幅 $\delta>0$ の区間による分割の中には必ず U と U^c 両方の点を含む区間が $\frac{1}{2\delta}$ 個以上ある．従って χ_U のリーマン和の上限と下限には分割の幅 δ に関係なく $\frac{1}{2}$ 以上の幅がある．即ちリーマン積分不可能である．

[3] (H9 熊本大 1).

(1) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a,\infty))$ は $[n-1,n)$ なる形の区間の 0 個以上の高々可算和だから $f(x)$ はルベーグ可測である．

(2) f がルベーグ可測なので非負値関数 $|f|=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\chi_{[n-1,n)}$ もルベーグ可測．各点で増大する $|f|$ の非負単関数近似列 $\sum_{n=1}^{N}|a_n|\chi_{[n-1,n)}$, $N=1,2,3,\cdots$, を考えれば積分の定義から $\int_{[0,\infty)}|f|\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ だから，f がルベーグ可積分であることと $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束することは同値（即ち，ともに上式が有限ということ）.

(3) $n=1,2,3,\cdots$ と $n-1\leqq x<n$ に対して $f^+(x)=\max\{a_n,0\}$, $f^-(x)=\max\{-a_n,0\}$, とおいて非負可測関数 $f^\pm$ を定義すれば $f=f^+-f^-$. (2) と同様に

$$\int_{[0,\infty)} f^+\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,0\},\quad \text{および}\quad \int_{[0,\infty)} f^-\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\max\{-a_n,0\},$$

であって，しかも (2) より，f が積分可能ならばいずれも有限となる．よって積分の定義より

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\mu=\int_{[0,\infty)} f^+\,d\mu-\int_{[0,\infty)} f^-\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,0\}-\sum_{n=1}^{\infty}\max\{-a_n,0\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$$

最後の変形で恒等式 $\max\{x,0\}-\max\{-x,0\}=x$ $(x\in\mathbb{R})$ を用いた.

[4] (H9 広島大 6).

(1) $E,F\in\mathcal{A}$ より $\theta(E)=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx$ と $\theta(F)=\lim_{k\to\infty}\int_F f_k(x)\,dx$ が存在する．f_k, $k\in\mathbb{N}$, は非負可測で, $E\cap F=\emptyset$ より, $\int_{E\cup F} f_k(x)\,dx=\int_E f_k(x)\,dx+\int_F f_k(x)\,dx$ である．故に $\theta(E\cup F)=\lim_{k\to\infty}\int_{E\cup F} f_k(x)\,dx$ は存在し，従って $E\cup F\in\mathcal{A}$ であって，$\theta(E\cup F)=\theta(E)+\theta(F)$ が成り立つ.

(2) E のルベーグ測度が 0 ならば積分の定義より $\int_E f_k(x)\,dx=0$．よって $E\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(E)=0$.

(3) E が $x=\frac{1}{2}$ を内点にもてば，ある $k_0\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $k\geqq k_0$ に対して $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)\subset E$ となる．このとき f_k は E 上で

$$f_k(x)=\begin{cases} k, & x\in\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

となる．よって，任意の $k\geqq k_0$ に対して $\int_E f_k(x)\,dx=k\frac{1}{k}=1$ となる．これより $E\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(E)=1$.

(4) $I=(a,b]\subset U$ とおく.
$\frac{1}{2}<a$ または $b<\frac{1}{2}$ の場合：ある $k_0\in\mathbb{N}$ が存在して $k\geqq k_0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して f_k は I 上 0 になる．よって任意の $k\geqq k_0$ に対して $\int_I f_k(x)\,dx=0$．よって $\lim_{k\to\infty}\int_I f_k(x)\,dx=0$. 故に $I\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(I)=0$.
$a=\frac{1}{2}$ の場合：f_k は I 上で

$$f_k(x)=\begin{cases} k, & \frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2k},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

よって，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\int_I f_k(x)\,dx=k\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}$. 故に $I\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(I)=\frac{1}{2}$.
$b=\frac{1}{2}$ の場合：$a=\frac{1}{2}$ の場合と同様に考えれば $I\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(I)=\frac{1}{2}$ を得る.
$a<\frac{1}{2}<b$ の場合：(3) より $I\in\mathcal{A}$ かつ $\theta(I)=1$.
以上で全ての場合が尽くされた.

可測関数.

[5] (S61 山形大 9).

(1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数がボレル可測であるとは，$\mathbb{R}$ の任意のボレル集合の逆像がボレル集合である[1]こと．このことは，任意の実数 a に対して開区間 (a,∞) の逆像がボレル集合であるという条件と同値であり，任意の開集合の逆像がボレル集合である条件とも同値である．
実数値関数がルベーグ可測であるとは，$\mathbb{R}$ の任意のボレル集合の逆像がルベーグ可測集合である[2]こと．このことは，任意の実数 a に対して開区間 (a,∞) の逆像がルベーグ可測集合であるという条件と同値であり，任意の開集合の逆像がルベーグ可測集合である条件とも同値である．

(2) 開集合の連続関数による逆像は定義によって開集合であるからボレル集合である．よって，上記定義より連続関数はボレル可測関数．

(3) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ であって，ボレル集合の g による逆像がボレル集合，その f による逆像がルベーグ可測集合となるから，$g\circ f$ はルベーグ可測関数である．

(4) $A\subset\mathbb{R}$ をルベーグ可測だがボレル可測でない集合とし，$f=\chi_A$, $g=\mathrm{id}$ (恒等写像) と選ぶと，f, g はそれぞれルベーグ可測，ボレル可測で，$f\circ g=f$ はルベーグ可測だが $f^{-1}((1/2,\infty))=A$ だからボレル可測ではない．

[6] (S62 新潟大 4)

(1) f が $\mathcal{F}$–可測実数値関数なので，任意の 1 次元ボレル集合 $B\in\mathcal{B}_1$ に対して $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$．よって $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$．特に，$\mathcal{B}$ は空でない．$f^{-1}(E^c)=(f^{-1}(E))^c$ だから $E\in\mathcal{B}$ ならば $f^{-1}(E^c)\in\mathcal{F}$．故に $\mathcal{B}$ は補集合を取る演算について閉じている．同様に $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(E_n)$ より $\mathcal{B}$ は可算和についても閉じている．従って $\mathcal{B}$ は σ 加法族である．

(2) g が $\mathcal{B}_1$–可測だから，任意の $A\in\mathcal{B}_1$ に対して $g^{-1}(A)\in\mathcal{B}_1$．これと f が $\mathcal{F}$–可測なことから，$(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathcal{F}$．故に $g\circ f$ は $\mathcal{F}$–可測．

[7] (H1 山形大 8)

(1) $f^{-1}(\mathbb{R})\in\mathcal{F}$ より $\mathcal{F}$ は空でない．$f^{-1}(E)\in\mathcal{F}$ に対して $(f^{-1}(E))^c=f^{-1}(E^c)\in\mathcal{F}$．故に $\mathcal{F}$ は補集合をとる演算について閉じている．$F_n\in\mathcal{F}$, $n\in\mathbb{N}$, とすると，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $F_n=f^{-1}(E_n)$, $E_n\in\mathcal{B}_1$, なる E_n がある．よって，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(E_n)=f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\in\mathcal{F}$$

となるから，$\mathcal{F}$ は可算和についても閉じている．

(2) ボレル可測関数 $h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して $g=h\circ f$ が成り立つならば，任意の $A\in\mathcal{B}_1$ に対して，$g^{-1}(A)=f^{-1}(h^{-1}(A))$．$h$ がボレル可測だから $h^{-1}(A)\in\mathcal{B}_1$．よって $f^{-1}(h^{-1}(A))\in\mathcal{F}$．故に g は $\mathcal{F}$–可測である．
逆に g が $\mathcal{F}$–可測として，$f(x)=f(y)$ なる $x,y\in\Omega$ を任意にとる．$\mathbb{R}$ の 1 点集合はボレル集合，すなわち $\{g(x)\}\in\mathcal{B}_1$ なので，g が $\mathcal{F}$–可測なことから $g^{-1}(\{g(x)\})\in\mathcal{F}$ である．すなわち $f^{-1}(E)=g^{-1}(\{g(x)\})$ となる $E\in\mathcal{B}_1$ がある．作り方から $x\in f^{-1}(E)$ なので $f(y)=f(x)\in E$，したがって，$y\in f^{-1}(E)=g^{-1}(\{g(x)\})$．よって，$g(y)=g(x)$．$f(x)=f(y)$ ならば $g(x)=g(y)$ が成り立つことが分かったので，特に，関数 $h=g\circ f^{-1}:\ f(\Omega)\to\mathbb{R}$ は（集合関数ではなく点関数として）well-defined である．h は $\mathbb{R}\setminus f(\Omega)$ 上では，可測性をこわさなければどうとっても関係ないのでたとえば $x\in\mathbb{R}\setminus f(\Omega)$ ならば $h(x)=0$ と定義しておく．このとき以上の議論から Ω 上で $h\circ f=g$ となる．このときさらに，$A\in\mathcal{B}_1$ に対して $A\subset f(\Omega)$ ならば

$$h^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}\mid g(f^{-1}(x))\in A\}=f(g^{-1}(A))$$

[1] $\mathbb{R}$ の集合がボレル集合であるとは，ボレル集合族の要素であること．ボレル集合族とは，開集合を全て要素に持つ σ 加法族のうち最小のもののこと．

[2] ルベーグ可測集合とはボレル集合族を完備化した集合族（ルベーグ σ 加法族）の要素．このことは次と同値：差集合がルベーグ測度 0 であって包含関係にあるような 2 つのボレル集合がとれて，問題の集合が小さい方を包含し，大きい方に包含されるようにできること．

だが，g が $\mathcal{F}$–可測だから $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であって，$\mathcal{F}$ の定義から $f(g^{-1}(A)) \in \mathcal{B}_1$ となるので，h はボレル可測関数である．

[8] (H6 大阪市大 D3a)．$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{B}_2 \mid Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とおく．$\mathcal{I} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1\}$ とおくと $B_1 \times B_2 \in \mathcal{I}$ に対して $Z^{-1}(B_1 \times B_2) = X^{-1}(B_1) \cap Y^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$ だから $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$．$A \in \mathcal{B}$ に対して $Z^{-1}(A^c) = (Z^{-1}(A))^c \in \mathcal{F}$, また，$A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$, に対して $Z^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$.

故に $\mathcal{B}$ は $\mathcal{I}$ を含む σ 加法族となり, $\mathcal{B}_2 = \sigma[\mathcal{I}]$ であることが知られているので，$\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$．即ち $A \in \mathcal{B}_2$ ならば $Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}$．故に $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は可測関数.

[9] (H9 山形大 8).

(1) $\Omega' = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1, C \in 2^{\{+\infty,-\infty\}}\}$ とおく．$f:\ \Omega \to \Omega'$ が $\mathcal{F}$–可測であるとは，任意の $A \in \mathcal{F}'$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となること．
同値な定義の例：
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{F}$ となること．
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ となること.
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{F}$ となること.
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{F}$ となること．

(2) 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して $(-f)^{-1}((b, \infty]) = f^{-1}([-\infty, -b)) \in \mathcal{F}$ だから，$-f$ は $\mathcal{F}$–可測．任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して $(f + a)^{-1}((b, \infty]) = f^{-1}((b - a, \infty]) \in \mathcal{F}$ だから $f + a$ は $\mathcal{F}$–可測.

(3) $\{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in \Omega \mid f(x) < r\} \cap \{x \in \Omega \mid r < g(x)\}) \in \mathcal{F}$.

(4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $(f + g)^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \Omega \mid g(x) > -f(x) + a\}$．よって，(2) と (3) より $f + g$ は $\mathcal{F}$–可測.

[10] (S62 お茶大 1)．主張のような α がないとする．すると，$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| \geqq 2^n\}) > 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geqq 2^n\}) > 0$ も $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leqq -2^n\}) > 0$ も n に関して減少する集合だから少なくとも一方の列は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して測度正である．必要なら $-g$ を考えることで $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geqq 2^n\}) > 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つとしてよい.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tilde{E}_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{n+1} > g(x) \geqq 2^n\}$ とおく．$\mu(\tilde{E}_n) = \infty$ のときは測度の連続性から，十分大きい $N > 0$ を取ってきて $E_n = \tilde{E}_n \cap [-N, N]$ とおくと $0 < \mu(E_n) < \infty$ とできる．$\mu(\tilde{E}_n) < \infty$ のときは $E_n = \tilde{E}_n$ とする．前段落の考察から任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(\sum_{n=n_0}^{\infty} E_n) > 0$ となるから，$\mu(E_n) > 0$ となる n が無数にある.

$$f = \sum_{\substack{n \geqq 1; \\ \mu(E_n) > 0}} \frac{1}{2^{n/2} \mu(E_n)} \chi_{E_n}$$

とおくと，f は (非負) 実数値ルベーグ可測関数であって $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \leqq \sum_{n \geqq 1} 2^{-n/2} < \infty$ だから積分可能である．他方，E_n 上で $g \geqq 2^n$ であることに注意すると

$$\int_{\mathbb{R}} f \, g \, d\mu \geqq \sum_{\substack{n \geqq 1; \\ \mu(E_n) > 0}} 2^{n - n/2}.$$

よって $\mu(E_n) > 0$ となる任意の $n \geqq 1$ に対して $\int_{\mathbb{R}} f \, g \, d\mu \geqq 2^{n/2}$ であるが，そのような n は無数にあるから $\int_{\mathbb{R}} f \, g \, d\mu = \infty$ となって，$f \, g$ が積分可能という仮定に矛盾する．背理法により結論が成立する．

[11] (H6 千葉大 B8) $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha\}) = 0\}$ だから $g \leqq \lambda$, μ–a.e., 即ち $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \lambda\}) = 0$ ならば $\lambda \in S$ となり，特に $\lambda \geqq \inf S$ でなければならない．

逆に $\lambda \geqq \inf S$ とすると，S の中の減少列 α_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, であって $\alpha := \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leqq \lambda$ となるものがある．$\alpha_n \in S$ だから $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha_n\}) = 0$．これ（と，測度の非負性と劣加法性）から

$$0 \leqq \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha_n\}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha_n\}) = 0,$$

即ち，$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha\}) = 0$ を得る．よって，測度の単調性と $\alpha \leqq \lambda$ から $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \lambda\}) = 0$ を得るので $g \leqq \lambda$, μ–a.e..

[12] (H2 富山大 BVI).

(1) $\emptyset \subset \mathbb{R}$ は高々可算集合だから $\emptyset \in \mathcal{F}$ なので $\mathcal{F}$ は空でない．$A \in \mathcal{F}$ とすると，A または A^c は高々可算であるから A^c または $(A^c)^c$ が高々可算である．故に $\mathcal{F}$ は補集合をとる演算で閉じている．$A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, とする．$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c)^c$ だから，${A_n}^c$ が高々可算であるような n が一つでもあれば $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ が高々可算となって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ である．そのような n が一つもなければ $\mathcal{F}$ の定義より全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が高々可算だから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も高々可算となって $\mathcal{F}$ に属する．故に $\mathcal{F}$ は可算和に関して閉じている．以上より $\mathcal{F}$ は σ 加法族.

(2) まず，$x \to |x|$ の値域の可測空間を通常のボレル集合族と解釈する（つまり，通常の意味で実数値可測関数と理解する）．
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} = (1, \infty) \cup (-\infty, -1)$ とおくと，A も $A^c = [-1, 1]$ も非可算集合で $\mathcal{F}$ に属さないから $x \to |x|$ は $\mathcal{F}$–可測ではない.
これでは出題意図が分からないので，念のため題意を「$x \to |x|$ が $\mathcal{F}/\mathcal{F}$–可測か？」，と解釈した解も挙げておく.
$A \in \mathcal{F}$ に対して $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in A\} = A \cup (-A)$ だが，A が高々可算ならば $A \cup (-A)$ も高々可算，A^c が高々可算ならば $(A \cup (-A))^c = A^c \cap (-A)^c$ も高々可算，よって常に $A \cup (-A) \in \mathcal{F}$ となるから，$\mathcal{F}/\mathcal{F}$–可測である．[3]

[13] (H8 広島大 6B).

(1) $a \geqq 0$ のとき，$\{x \in E \mid g_\varepsilon(x) > a\} = \{x \in F_\varepsilon \mid f(x) > a\}$．$f$ は F_ε 上連続だからこの集合は $\mathbb{R}^N$ の閉集合 F_ε の開集合だからボレル可測集合．$a < 0$ のとき，$\{x \in E \mid g_\varepsilon(x) \leqq a\} = \{x \in F_\varepsilon \mid f(x) > a\} \cup (E \setminus F_\varepsilon)$．上と同様に第 1 項はボレル可測集合，一方第 2 項はルベーグ可測集合．以上より g_ε は E 上のルベーグ可測関数.

(2) 問題の前提から

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \exists \tilde{F}_n \subset E;\ \text{閉集合},\ \mu(E \setminus \tilde{F}_n) < \frac{1}{n},\ \text{かつ}\ f|_{\tilde{F}_n}\ \text{は連続.}$$

そこで $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} \tilde{F}_k, n \in \mathbb{N}$, とおくと，これは E に含まれる $\mathbb{R}^N$ の閉集合増大列で，各 F_n 上で f は連続関数である．さらに，$\mu(E \setminus F_n) \leqq \mu(E \setminus \tilde{F}_n) < \frac{1}{n}$ を満たすので，$\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 0$．故にこの $F_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, が求めるものである.

(3) (2) より，$a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\{x \in E \mid f(x) > a\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in F_n \mid f(x) > a\}\right) \cup \{x \in E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \mid f(x) > a\}$$

[3] これでも $|x|$ を考える自然な理由はないので，結局題意は分からなかった.

において，f は F_n 上連続だから右辺第 1 項はボレル集合，第 2 項はルベーグ測度 0 の集合 $E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ の部分集合だから（ルベーグ測度の完備性より）ルベーグ可測集合，よって右辺はルベーグ可測集合となるから，f は E 上ルベーグ可測関数である．

積分.

[14] (H8 熊本大 1).

(1) $\tilde{f}(x) = \sin^4 x$, $x \in [0, 2\pi]$, とおくと，有理数のルベーグ測度は 0 だから，$f(x) = \tilde{f}(x)$, a.e.–$x \in [0, 2\pi]$. よって

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, d\mu(x) = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\, d\mu(x) = \int_0^{2\pi} \sin^4 x\, dx = \frac{3}{4}\pi\,.$$

最後の積分はリーマン可積分関数はリーマン積分とルベーグ積分が一致することを用いて高校時代のリーマン積分を実行した．

(2) $\{(x, y) \in E \mid xy \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{(x, y) \in E \mid xy = r\}$ において，集合 $\{(x, y) \in E \mid xy = r\}$ は（双曲線の一部であることに注意すれば）任意の $\epsilon > 0$ に対して $1 + \dfrac{2}{\epsilon}$ 以下の個数の一辺 ϵ の正方形で覆える[4]から，２次元ルベーグ測度 0 の集合の部分集合であることが分かり，ルベーグ測度の完備性からルベーグ測度 0 のルベーグ可測集合と分かる．その可算個の和集合だから $\{(x, y) \in E \mid xy \in \mathbb{Q}\}$ もルベーグ測度 0 である．よって (1) と同様に $\displaystyle\int_E f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int_E xy\, d\mu(x, y) = \int_0^1 x\, dx \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{4}$.

[15] (H6 東女大 6)．結論が成り立たないとすると，

$$0 < \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f(x) \geqq \frac{1}{n}\}\right)$$

だから，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \geqq \frac{1}{n}\}) > 0$ である．この n に対して

$$\int_\Omega f\, d\mu \geqq \int_{\{x \in \Omega \mid f(x) \geqq \frac{1}{n}\}} f\, d\mu \geqq \frac{1}{n}\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \geqq \frac{1}{n}\}) > 0$$

となって仮定に矛盾する．

[16] (S60 金沢大 6)．$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geqq \frac{1}{n}\}$ とおく．仮定から $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$, かつ，$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ だから，測度の連続性よりある（$A \in \mathcal{A}$ によらない）$n \in \mathbb{N}$ に対して $|E_n| \geqq 1 - \dfrac{1}{2}\alpha$ となる．この n に対して $A \in \mathcal{A}$ ならば，

$$1 = |[0, 1]| \geqq |A \cup E_n| = |A| + |E_n| - |A \cap E_n| \geqq \alpha + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) - |A \cap E_n|\,.$$

よって $|A \cap E_n| \geqq \dfrac{1}{2}\alpha$ となる．故に，$\displaystyle\int_A f(x)\, dx \geqq \int_{A \cap E_n} f(x)\, dx \geqq \frac{1}{n}|A \cap E_n| \geqq \frac{1}{2n}\alpha > 0$. 最右辺は $A \in \mathcal{A}$ によらないから $\displaystyle\inf_{A \in \mathcal{A}} \int_A f(x)\, dx \geqq \frac{1}{2n}\alpha > 0$.

[17] (H3 神戸大 3).

(1) (H6 東女大 6) と全く同様の証明が成り立つ．

[4] $(1 - \sqrt{r})\epsilon \leqq q < \epsilon$ なる q を 1 辺とする正方形で，単位正方形 E の中の双曲線の左上端 $(r, 1)$ から各小正方形の左上頂点を通るように隙間なく $x \leqq \sqrt{r}$ の範囲を敷き詰め，$y = x$ に関して対称に双曲線の右側も敷き詰めた小正方形で覆い，$(\sqrt{r}, \sqrt{r})$ を中心とする同じ大きさの正方形を置く．各小正方形の中心を固定して $q = \epsilon$ まで 1 辺を大きくすれば小正方形の内部だけで双曲線を覆える．

(2) 仮定より，任意のルベーグ可測集合 $E \subset [0,1]$ に対して $\displaystyle\int_E (f-g)(x)\,dx = 0$ である．$E_+ = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqq g(x)\}$, $E_- = \{x \in [0,1] \mid f(x) < g(x)\}$, とおくと E_+ 上で $f-g$ は非負値で $\displaystyle\int_{E_+} (f-g)(x)\,dx = 0$ だから (1) と全く同様にして $f(x)-g(x)=0$, a.e.–$x \in E_+$, となり，E_- 上で $g-f$ は非負値で $\displaystyle\int_{E_-} (g-f)(x)\,dx = -\int_{E_-} (f-g)(x)\,dx = 0$ だから，同様に $g(x)-f(x)=0$, a.e.–$x \in E_-$, となる．$[0,1] = E_+ \cup E_-$ だから，以上より $f(x) = g(x)$, a.e.–$x \in [0,1]$.

[18] (H6 熊本大 1).

(1) 恒等的に 0 ではない非負値関数 $f = \chi_{\{(0,0)\}}$ は容易に分かるようにボレル可測関数なのでルベーグ可測関数．1 点集合 $\{(0,0)\}$ のルベーグ測度は 0 だから $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx = 0$ である．

(2) (H6 東女大 6) と全く同様に $f(x) = 0$, a.e.–$x \in \mathbb{R}^2$, が成り立つ．f が非負値連続関数で恒等的に 0 でないとすると，ある開集合上で $f > 0$ となる．開集合には正の半径の開円が含まれるから，特に測度正なので $f = 0$, a.e., に矛盾する．

[19] (S61 熊本大 3)．もし $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば (H3 神戸大 3) によって $f = 0$, a.e., となり，仮定に矛盾する．

[20] (H5 山形大 9).

(1) $A = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geqq \epsilon\}$, $g = \epsilon\chi_A$, とおくと，$|f| \geqq g$ が Ω 上で成り立つので

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \geqq \int_\Omega g\,d\mu \geqq \epsilon\mu(A).$$

(2) (H6 東女大 6) から $|f| = 0$, a.e., となるから $f = 0$, a.e., である．

(3) $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f|(\omega) = +\infty\}) > 0$ とすると，

$$+\infty = \int_\Omega |f|\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu$$

（$f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$）なので，f の正部分と負部分いずれか少なくとも一方の積分が $+\infty$ だから f は積分不可能（積分が発散するか定義できない）である．

[21] (S61 九州大 X)．$n = 0, 1, 2, \cdots$, に対して f は $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$ 上で $2^n \leqq f < 2^{n+1}$ である．また，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に注意すれば B_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は互いに共通部分を持たない．以上より，$\displaystyle g = \sum_{n=0}^\infty 2^n \chi_{B_n}$ とおくと，$2g > f \geqq g$ が $\displaystyle A_0 = \sum_{n=0}^\infty B_n$ で成り立つ．$[0,1] \setminus A_0$ では $(0 \leqq)\ f < 1$, $g = 0$, だから，f がルベーグ可積分であることと g がルベーグ可積分であることは同値である．積分の定義から

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} g\,d\mu &= \sum_{n=0}^\infty 2^n \mu(B_n) = \sum_{n=0}^\infty 2^n(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) \\ &= \sum_{n=0}^\infty 2^n \mu(A_n) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty 2^{n+1}\mu(A_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\mu(A_0) + \sum_{n=0}^\infty 2^n \mu(A_n)\right)\end{aligned}$$

も分かるので，f がルベーグ可積分であることと $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty 2^n \mu(A_n) < \infty$ は同値である．

[22] (S63 広島大 6).

(1) $E_0 = \Omega$ とおく．初めに，非負整数 n に対して，E_n の定義から $x \in E_n \setminus E_{n+1}$ ならば $n \leqq |f(x)| < n+1$ が成り立つことに注意する．

f が可積分とする．

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|\,d\mu &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k\setminus E_{k+1}} |f|\,d\mu + \int_{E_n} |f|\,d\mu \\ &\geqq \sum_{k=0}^{n-1} k(\mu(E_k) - \mu(E_{k+1})) + n\mu(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\end{aligned}$$

が，任意の正整数 n に対して成り立つので，f が可積分だから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) \leqq \int_\Omega |f|\,d\mu < \infty$$

である．

逆に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ とする．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f|\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_k\setminus E_{k+1}} |f|\,d\mu \leqq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\mu(E_n) - \mu(E_{n+1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(k+1)(\mu(E_k) - \mu(E_{k+1})) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) - (n+1)\mu(E_{n+1})\right) \\ &\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.\end{aligned}$$

よって f は可積分である．

(2) f が可積分なので (1) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ だから，

$$\mu\left(\bigcap_{k\geqq 1}\bigcup_{n\geqq k} E_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geqq k} E_n\right) \leqq \lim_{k\to\infty} \sum_{n\geqq k} \mu(E_n) = 0,$$

すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n} = 0$, a.e.–$x$.

$E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ と f が可積分であることより，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\mu(E_n) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E_n} |f|\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}\,|f|\,d\mu$$

となって，右辺は 0 となるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) = 0$.

[23] (S62 金沢大 5).

(1) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n\geqq 1} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ だから，単調な集合列に対する測度の連続性より，

$$\mu\left(\bigcap_{k\geqq 1}\bigcup_{n\geqq k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geqq k} A_n\right) \leqq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n).$$

右辺は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ なので，0 である．

(2) 自然数 n, k に対して，$E_{n,k} = \{x \in \Omega \mid |f_n(x)| > k\}$ とおく．f_n が実数値関数だから $\displaystyle\bigcap_{k\geqq 1} E_{n,k} = \emptyset$.

$\mu(\Omega) < \infty$ だから単調集合列に関する測度の連続性より，

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \mu(\emptyset) = 0\,.$$

よってある $c_n > 0$ があって，$\mu(E_{n,c_n}) \leqq 2^{-n}$. このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in \Omega \mid |f_n(x)| > c_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{n,c_n}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 < \infty.$$

(3) $a_n = \dfrac{1}{2^n c_n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, とおく．(1)(2) から

$$\mu\left(\bigcap_{k \geqq 1} \bigcup_{n \geqq k} E_{n,c_n}\right) = 0$$

なので，a.e.–$x \in \Omega$ に対して，$x \in \bigcup_{k \geqq 1} \bigcap_{n \geqq k} E^c_{n,c_n}$ すなわち，

$$\exists k \geqq 1;\ (\forall n \geqq k)|a_n f_n(x)| \leqq 2^{-n}.$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| \leqq \sum_{n=1}^{k-1} |a_n f_n(x)| + 1 < \infty$$

だから $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ は絶対収束，よって収束．これが a.e.–$x \in \Omega$ に対して成り立つから，ほとんど全ての x で収束する．

[24] (H6 山形大 9)．ルベーグ測度の平行移動不変性は認めて解く題意と理解する．

(1) (*) の左辺は $\mu((-\alpha + B) \cap A)$, 右辺は $\mu(B \cap (\alpha + A))$.

$$\begin{aligned}&(-\alpha + B) \cap A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A,\ x + \alpha \in B\} = -\alpha + \{x + \alpha \in \mathbb{R} \mid x \in A,\ x + \alpha \in B\}\\ &= -\alpha + \{y \in \mathbb{R} \mid y \in \alpha + A,\ y \in B\} = -\alpha + (B \cap (\alpha + A))\end{aligned}$$

だから，ルベーグ測度の平行移動不変性より

$$\mu((-\alpha + B) \cap A) = \mu(-\alpha + (B \cap (\alpha + A))) = \mu(B \cap (\alpha + A)).$$

(2) $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{B_i}$ とおくと (*) の左辺は (1) より，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \int_A \chi_{B_i}(x + \alpha)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{A+\alpha} \chi_{B_i}(x)\, d\mu(x)$$

だから (*) の右辺に等しい．

(3) 非負可測関数の積分は，各点で増大してその関数に収束する非負値単関数列の積分の極限で定義されているから (2) より，この場合も (*) が成り立つ．

[25] (S63 新潟大 4)．

(1) 広義リーマン積分の定義と,（本来の）リーマン積分はルベーグ積分に一致することと，単調収束定理より，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} f\, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} f\, \chi_{(0,N)}\, d\mu\\ &= \int_0^{\infty} \lim_{N\to\infty} f\, \chi_{(0,N)}\, d\mu = \int_0^{\infty} f\, d\mu\end{aligned}$$

となる（この段階では無限大を許して等号が成立）が，広義リーマン積分可能という仮定より左辺が有限なので右辺も有限，即ち f はルベーグ積分可能．

(2) $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ とおく．$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $F_n := \{x \in (0, \infty) \mid 2n\pi + \dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq 2n\pi + \dfrac{5\pi}{6}\} \subset (0, \infty)$ とおくと，F_n たちは互いに共通部分が無く，F_n の長さは $\mu(F_n) = \dfrac{2}{3}\pi$ で，F_n 上で $f(x) \geqq \dfrac{1}{2(2n\pi + \frac{5\pi}{6})} \geqq \dfrac{1}{4\pi(n+1)}$．ルベーグ積分の単調性と定数関数に対するルベーグ積分の定義と区間についての σ 加法性（単調収束定理）から，f の正の部分 f^+ の積分について，

$$\int_0^\infty f^+\, d\mu \geqq \sum_{n=0}^\infty \mu(F_n) \times \frac{1}{4\pi(n+1)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{3}\pi \frac{1}{4\pi(n+1)} = \infty.$$

よって，ルベーグ積分可能ではない．

（なお，負の部分の積分も上記正の部分の議論と同様に発散するので，定積分値として $\pm\infty$ を許しても，ルベーグ積分 $\displaystyle\int_0^\infty f d\mu$ は定義されない.）

[26] (S60 筑波大 6)．まず，任意のルベーグ可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |a(x)\, f(x)|\, dx \leqq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ を仮定する． $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |a(x)| > C\}$ と置く．任意の $N > 0$ に対して $f = \chi_{E\cap[-N,N]}$ は可積分関数だから，仮定から $\displaystyle\int_{E\cap[-N,N]} (|a(x)| - C)\, dx \leqq 0$ を得るが，積分範囲で $|a(x)| - C > 0$ なので左辺は非負だから，0 でなければならない．よって (H6 東女大 6) から $|a(x)| = C$, a.e.–$x \in E \cap [-N, N]$, ゆえに $\mu(E \cap [-N, N]) = 0$．よって測度の連続性から $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |a(x)| > C\} = \mu(E) = 0$.

逆に $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |a(x)| > C\}) = 0$ とすると $C \geqq |a|$, a.e., だから任意のルベーグ可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (C - |a(x)|)|f(x)|\, dx \geqq 0$ となって $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |a(x)\, f(x)|\, dx \leqq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ を得る．

[27] (S62 富山大 BV)．

(1)(a) $f = 0$, a.e., $\Longleftrightarrow (\forall\lambda > 0)\mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x)| > \lambda\}) = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_* = 0$.

(b) $\|\cdot\|_*$ の定義より，任意の $\epsilon > 0$ に対して非負実数 λ が存在して， $\lambda\mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x) + g(x)| > \lambda\}) \geqq \|f + g\|_* - \epsilon$ が成り立つ．故に

$$\begin{aligned}
&\|f + g\|_* - \epsilon \leqq \lambda\mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x)| + |g(x)| > \lambda\}) \\
&\leqq \lambda\mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x \in (0, 1) \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\
&\leqq 2\left(\frac{\lambda}{2}\mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) + \frac{\lambda}{2}\mu(\{x \in (0, 1) \mid |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\})\right) \leqq 2(\|f\|_* + \|g\|_*)\,.
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だから $\|f + g\|_* \leqq 2(\|f\|_* + \|g\|_*)$.

(c) (H5 山形大 9) の (1) で $\Omega = (0, 1)$, $\epsilon = \lambda$, とおけば全く同様の証明が成り立つ．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $0 < x < 1$, とおくと $\lambda > 0$ に対して

$$\{x \in (0, 1) \mid |f|(x) > \lambda\} = (0, \min\{1, \frac{1}{\lambda}\})$$

となるから， $\|f\|_* = \displaystyle\sup_{0\leqq\lambda<\infty} \lambda\, \mu(\{x \in (0, 1) \mid |f|(x) > \lambda\}) = 1 < \infty$ であるが，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty$ なので $f \notin L^1$ である．

[28] (H4 広島大 6)．**(i)** $\mu(D) < \infty \;\Rightarrow\; L^2(D, \mu) \subset L^1(D, \mu)$ **:** $f \in L^2(D, \mu)$ とすると，シュワルツの不等式[5]から

$$\int_D |f|\, d\mu = \int_D |f|\, \chi_D\, d\mu \leqq \left(\int_D |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_D {\chi_D}^2 d\mu\right)^{1/2} \leqq \left(\int_D |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} (\mu(D))^{1/2} < \infty$$

[5] f, g を測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 値可測関数とするとき成り立つ不等式 $\displaystyle\int_\Omega |f\, g|\, d\mu \leqq \|f\|_2\, \|g\|_2$ のこと．ここで,

となるので $f \in L^1(D,\mu)$ を得る．

(ii) $\mu(D)=\infty \Rightarrow L^2(D,\mu)\not\subset L^1(D,\mu)$**:** 任意の自然数 N に対して $\mu(D\cap[-N,N]^d) \subset (2N)^d < \infty$ だから増大する自然数列 $1 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots$ がとれて $D_k = D\cap[-n_k,n_k]^d$, $k\in\mathbb{N}$, とおくとき $\mu(D_{k+1}\setminus D_k) \geqq 1$, $k=1,2,3,\cdots$, かつ，$\mu(D_1)\geqq 1$, とできる．$f:\ D\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{k\sqrt{\mu(D_{k+1}\setminus D_k)}}, & x\in D_{k+1}\setminus D_k, \quad k=1,2,3,\cdots, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\mu(D_1)}}, & x\in D_1\,, \end{cases}$$

で定義すると，

$$\int_D |f|\,d\mu \geqq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty, \quad \int_D |f|^2\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+1<\infty,$$

となるので，$f\in L^2(D,\mu)$ だが $f\notin L^1(D,\mu)$ である．

[29] (S63 大阪市大 D2)．ある $a>0$ に対して $\mu(\{x\in A_2 \mid f(x)>a\})>0$ ならば仮定から $\mu(\{x\in A_2 \mid f(x)>a\})=\infty$ だから，$\displaystyle\int_\Omega |f|^q\,d\mu=\infty$ となる．よって $f\in L^q$ ならば

$$\mu(\{x\in A_2 \mid |f(x)|>0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in A_2 \mid f(x)>\frac{1}{n}\}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x\in A_2 \mid f(x)>\frac{1}{n}\}\right)=0\,,$$

即ち，$f(x)=0$, a.e.–$x\in A_2$．特に $\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,d\mu=\int_{A_1}|f|^p\,d\mu$, $\displaystyle\int_\Omega |f|^q\,d\mu=\int_{A_1}|f|^q\,d\mu$, となる．

$\mu(A_1)<\infty$ に注意すれば，ヘルダーの不等式[6]から

$$\int_{A_1}|f|^p\,d\mu=\int_{A_1}|f|^p\chi_{A_1}\,d\mu \leqq \left(\int_{A_1}|f|^q\,d\mu\right)^{p/q}(\mu(A_1))^{1-p/q}$$

となるので，$f\in L^q$ から $f\in L^p$ を得る．

[30] (H8 金沢大 5)．

(1) (H4 広島大 6) の (i) $\mu(D)<\infty$ から $L^2(D,\mu)\subset L^1(D,\mu)$ を導く証明において D を Ω とし，ルベーグ測度 μ を Ω 上の与えられた測度 μ とすれば全く同様の証明が成り立つ．

(2) 仮定より $|\Phi''(x)|\leqq M$, $x\in\mathbb{R}$, なる定数 $M\geqq 0$ があるから，テイラーの定理より

$$|\Phi(x)-\Phi(0)-\Phi'(0)x| \leqq \frac{M}{2}x^2, \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

$\|f\|_2 := \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^2\,d\mu\right)^{1/2}$.

証明は，$\|f\|_2=0$ ならば $f=0$, a.e., を得るので，成立，$\displaystyle\int|f\,g|\,d\mu=\infty$ ならば $\mu(f\neq 0)>0$, $\mu(g\neq 0)>0$, に先ず注意する．$\displaystyle\int(|f|-|g|)^2\,d\mu\geqq 0$ を考えると $\|f\|_2=\infty$ または $\|g\|_2=\infty$ を得るので，成立．残りの場合は $t:=\dfrac{\int|fg|d\mu}{\|f\|_2{}^2}\in\mathbb{R}$ を t についての恒等式 $\displaystyle\int(t\,|f|-|g|)^2\,d\mu\geqq 0$ に代入して分母を払うと成立する．

[6] 測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ において，$p>1$, $1/p+1/q=1$, $f\in L^p$, $g\in L^q$, のとき成り立つ不等式 $\displaystyle\int_\Omega |f\,g|\,d\mu \leqq \|f\|_p\,\|g\|_q$ のこと．ここで，$\|f\|_p := \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$.

証明は，$\|f\|_p=0$ または $\|g\|_q=0$ ならば $f=0$, a.e., または $g=0$, a.e., を得るので成立するから $\|f\|_p\|g\|_q>0$ としてよい．$-\log$ が下に凸なので任意の $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, に対して

$$\log(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q) \geqq \frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)=\log(ab)\,.$$

$c=\|g\|_q{}^{1/p}/\|f\|_p{}^{1/q}$, $a=c\,|f(x)|$, $b=\dfrac{1}{c}\,|g(x)|$, を代入して $x\in\Omega$ について積分すると成立する．

これと三角不等式から，

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\Phi\circ f|\,d\mu \leqq \int_\Omega |\Phi(0)+\Phi'(0)\,f(x)|\,\mu(dx)+\int_\Omega \frac{M}{2}f(x)^2\,d\mu(dx)\\
&\leqq |\Phi(0)|\mu(\Omega)+|\Phi'(0)|\int_\Omega |f(x)|\,\mu(dx)+\frac{M}{2}\int_\Omega |f(x)|^2\,d\mu(dx)
\end{aligned}
$$

となるが，有限測度空間だから右辺第１項は有限，f が２乗可積分だから第３項も有限，(1) よりこのとき f は可積分だから第２項も有限となり，$\Phi\circ f$ は可積分である．

[31] (H6 新潟大 2).

(1) $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\{x\in\Omega \mid |f(x)|>a\}=\{x\in\Omega \mid f(x)>a\}\cup\{x\in\Omega \mid f(x)<-a\}\\
&=\{x\in\Omega \mid f(x)>a\}\cup\{x\in\Omega \mid f(x)\geqq -a\}^c\\
&=\{x\in\Omega \mid f(x)>a\}\cup\bigcup_{n=1}^\infty\{x\in\Omega \mid f(x)>-a-\frac{1}{n}\}^c\in\mathcal{F}\,.
\end{aligned}
$$

よって $|f|$ は $\mathcal{F}$–可測.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\{x\in\Omega \mid \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}>a\}=\{x\in\Omega \mid |f(x)|>a\,(1+|f(x)|)\}\\
&=\begin{cases}\emptyset\in\mathcal{F}, & a\geqq 1,\\ \{x\in\Omega \mid |f(x)|>\dfrac{a}{1-a}\}\in\mathcal{F}, & a<1\,.\end{cases}
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{|f|}{1+|f|}$ は $\mathcal{F}$–可測.

(3) $|f(x)|>1$ ならば $\dfrac{2|f(x)|}{1+|f(x)|}>1$ なので

$$
2\int_\Omega \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu \geqq \int_{\{x\in\Omega||f(x)|>1\}}\frac{2|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu \geqq \mu(\{x\in\Omega \mid |f(x)|>1\})\,.
$$

[32] (H2 大阪市大 C1). $\delta>0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\{x\in\mathbb{R}||f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx\right| \leqq \int_{\mathbb{R}}\chi_{\{x\in\mathbb{R}||f_\alpha(x)|<\delta\}}\left|\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\right|\,dx\\
&\leqq \int_{|x|\geqq\sqrt{\delta}}\frac{\delta}{x^2}\,dx+\int_{|x|<\sqrt{\delta}}\chi_{\{x\in\mathbb{R}||f_\alpha(x)|<\delta\}}\,dx\\
&\leqq 2\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}+2\sqrt{\delta}=4\sqrt{\delta}.
\end{aligned}
$$

右辺は α によらないから，

$$
\sup_\alpha \int_{\{x\in\mathbb{R}||f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx \leqq 4\sqrt{\delta}.
$$

ここで $\delta\downarrow 0$ とすれば

$$
\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_\alpha \int_{\{x\in\mathbb{R}||f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx=0
$$

を得る．

[33] (S61 東工大 9). $\alpha=\operatorname*{ess.sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$ とおく．

$\alpha=\infty$ のとき．任意の正数 M に対して $\mu\{x\in\Omega \mid |f(x)|\geqq M\}>0$．このとき，

$$
\varliminf_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} \geqq M\varliminf_{p\to\infty}\mu\{x\in\Omega \mid |f(x)|\geqq M\}^{1/p}=M.
$$

左辺は M によらないから，左辺は $+\infty$. すなわち，

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}=\infty=\alpha.$$

$\alpha<\infty$ のとき．まず α の定義から，

$$\varlimsup_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}\leqq\alpha\varlimsup_{p\to\infty}\mu(\Omega)^{1/p}=\alpha.$$

次に，$0<\beta<\alpha$ とし，$E_\beta=\{x\in\Omega\mid |f(x)|\geqq\beta\}$ とおくと，$\mu(E_\beta)>0$ であって，

$$\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}\geqq\beta\mu(E_\beta)^{1/p}.$$

β を固定して $p\to\infty$ とすると

$$\varliminf_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}\geqq\beta.$$

$0<\beta<\alpha$ は任意だから

$$\varliminf_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}\geqq\alpha.$$

以上より

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p}=\alpha=\operatorname*{ess.sup}_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

[34] (H2 神戸大 3).

(1) 仮定から $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx<+\infty$（可積分），かつ，仮定 $p>1$ と $|f(x)|\leqq M$, a.e.–x, から

$$|f(x)|^p=|f(x)|\,|f(x)|^{p-1}\leqq M^{p-1}|f(x)|,\ \text{a.e.–}x,$$

なので（積分の単調性と線形性によって），$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,dx\leqq M^{p-1}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx<+\infty$, すなわち $|f|^p$ も可積分である．

(2) $\epsilon>0$ を任意に取り，$E=\{x\in\mathbb{R}\mid |f(x)|\geqq M+\epsilon\}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$．他方，仮定からすべての自然数 n に対して $|f_n(x)|\leqq M$, a.e.–x, だから（三角不等式によって），$|f_n(x)-f(x)|\geqq|f(x)|-|f_n(x)|\geqq\epsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in E$, なので，合わせると，$\mu(E)=0$ を得る．$\epsilon>0$ は任意だったから $|f(x)|\leqq M$, a.e.–x, を得る．

次に，(1) と同様に，仮定 $p>1$ と $|f_n(x)|\leqq M$, a.e.–x, $n\geqq1$, および，上で得た $|f(x)|\leqq M$, a.e.–x から（三角不等式によって），全ての自然数 n に対して

$$|f_n(x)-f(x)|^p\leqq(|f_n(x)|+|f(x)|)^{p-1}|f_n(x)-f(x)|\leqq(2M)^{p-1}|f_n(x)-f(x)|,\ \text{a.e.–}x,$$

なので (1) と同様に $\displaystyle 0\leqq\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx\leqq(2M)^{p-1}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx$. 仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$ なので挟み撃ちの原理によって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx=0$ である．

確率変数と期待値.

[35] (H4 大阪市大 D3). 集合 A の定義関数 χ_A は 0 または 1 の値をとるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^n\chi_{A_k}(\omega)<1$，すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^n\chi_{A_k}(\omega)=0$，となるのは全ての A_k, $k=1,2,\cdots,n$, に対して $\chi_{A_k}(\omega)=0$，すなわち $\omega\notin A_k$ となる場

合であり，従って $\omega \notin \bigcup_{k=1} A_k$ と同値になる．よって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\ \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \geqq 1\ ] = 1 - \mathrm{P}[\ \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} = 0\ ] = \mathrm{P}[\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k\ ] \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqq n} \mathrm{P}[\ A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_m}\ ] \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqq n} p_m = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} p_m \,.
\end{aligned}$$

さらに，これから特に

$$\mathrm{P}[\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\ ] = 1 - \mathrm{P}[\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k\ ] = 1 - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \binom{n}{\ell} p_\ell$$

を得るから，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\ \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} = 1\ ] = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}[\ A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{m-1}^c \cap A_m \cap A_{m+1}^c \cdots \cap A_n^c\ ] \\
&= \sum_{m=1}^{n} (\mathrm{P}[\ \bigcap_{k \neq m} A_k^c\ ] - \mathrm{P}[\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\ ]) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (- \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell-1} \binom{n-1}{\ell} p_\ell + \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \binom{n}{\ell} p_\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell-1} n \left(- \binom{n-1}{\ell} + \binom{n}{\ell} \right) p_\ell \ + (-1)^{n-1} n p_n \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{\ell-1} n \binom{n-1}{\ell-1} p_\ell \ - (-1)^n n p_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m n \binom{n-1}{m} p_{m+1} \,.
\end{aligned}$$

[36] (S63 九大 VIII)．$x \geqq y$ ならば

$$\{X \leqq y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq y\} \subset \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq x\} = \{X \leqq x\}$$

だから $F(x) - F(y) = \mathrm{P}[\ y < X \leqq x\ ] \geqq 0$ となって，単調非減少である．数列 $\{x_n\}$ が $x_n \downarrow x$ を満たすとき，集合列 $A_n = \{X \leqq x_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$, は $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ を満たし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X \leqq x\}$ を満たすことは集合算の定義から分かるので，測度の連続性から

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ X \leqq x_n\ ] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\ A_n\ ] = \mathrm{P}[\ X \leqq x\ ] = F(x),$$

よって F は右連続である．最後に，F の不連続点の集合を $G \subset \mathbb{R}$ とおくとき，それを飛びの幅で分類して

$$G_n = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) - F(x-0) > \frac{1}{n}\}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とおくと，$G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ である．F の値域は確率測度の値域だから $[0, 1]$ なので，$1/n$ より大きい飛びは n 点以下しかない：$\sharp G_n \leqq n$．その可算和だから G は高々可算集合である．

[37] (H2 北大 17)．

(1) 確率変数の定義から $X^{-1}([a, \infty)) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqq a\} \in \mathcal{F}$ なので全ての $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a, \infty) \in \mathcal{B}_X$ である[7]．このことから，あとは $\mathcal{B}_X$ が σ 加法族であることが言えれば，$\mathcal{B}_X$ は区間を全て含む σ 加法族

[7] 確率変数の定義によるが，１つの自然な定義は任意のボレル集合の X による逆像が $\mathcal{F}$ の要素に入っていることとする．その場合，この小問は定義そのものになってしまう．ここではそういう意地悪な解答はしないことにする．

になるので，$\mathbb{R}$ のボレル集合族（区間を全て含む最小の σ 加法族）を含み，証明が終わる．補集合と可算和について閉じていることを言えばいいので，まず，$A \in \mathcal{B}_X$ とすると $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ だが，$\mathcal{F}$ が σ 加法族だからその補集合も $\mathcal{F}$ に入るが，$(X^{-1}(A))^c = X^{-1}(A^c)$ だから $A^c \in \mathcal{B}_X$．次に，$A_n \in \mathcal{B}_X$, $n \in \mathbb{N}$, とすると，再び $\mathcal{F}$ が σ 加法族であることから $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$．一方 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ も（集合算の定義から）直接確かめられるので $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_X$ となる．

(2) 値域が $[0,1]$ に入ることは自明．$\mu_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$ も容易．σ 加法性を証明すればよい．A_n, $n = 1,2,3,\cdots,$ をどの 2 つも共通部分を持たない $\mathcal{B}_X$ の中の列とする．$X^{-1}(A_n)$, $n = 1,2,3,\cdots,$ も共通部分を持たないから P の σ 加法性から

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(A_n).$$

一方左辺は（集合算により）

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)) = P(X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mu_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

となるので，μ_X の σ 加法性が証明された．

(3) まず f が非負値であることを用い，次に，f が偶関数で $[0,\infty)$ で増加関数であることから $|X(\omega)| \geqq \epsilon$ ならば $f(X(\omega)) = f(|X(\omega)|) \geqq f(\epsilon)$ となることを用いることで，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\,f(X)\,] = \int_{\Omega} f(X(\omega))\,P(d\omega) = \int_{\{\omega\in\Omega\,|\,|X(\omega)|\geqq\epsilon\}} f(X(\omega))P(d\omega) + \int_{\{\omega\in\Omega\,|\,|X(\omega)|<\epsilon\}} f(X(\omega))P(d\omega)\\
&\geqq \int_{\{\omega\in\Omega\,|\,|X(\omega)|\geqq\epsilon\}} f(X(\omega))\,P(d\omega)\\
&\geqq \int_{\{\omega\in\Omega\,|\,|X(\omega)|\geqq\epsilon\}} f(\epsilon)\,P(d\omega) = f(\epsilon)P(\{\omega\in\Omega \mid |X(\omega)| \geqq \epsilon\}) = f(\epsilon)\mathrm{P}[\,|X| \geqq \epsilon\,].
\end{aligned}$$

[38] (H1 熊本大 9).

(1) 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．指数関数が正値であることと，（a が正値なので）$X(\omega) \geqq b$ ならば $e^{a\,X(\omega)} \geqq e^{a\,b}$ であることを順に用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,e^{a\,X}\,] &= \int_{\{\omega\in\Omega|X(\omega)\geqq b\}} e^{a\,X(\omega)}\mathrm{P}[\,d\omega\,] + \int_{\{\omega\in\Omega|X(\omega)<b\}} e^{a\,X(\omega)}\mathrm{P}[\,d\omega\,]\\
&\geqq \int_{\{\omega\in\Omega|X(\omega)\geqq b\}} e^{a\,X(\omega)}\mathrm{P}[\,d\omega\,]\\
&\geqq \int_{\{\omega\in\Omega|X(\omega)\geqq b\}} e^{a\,b}\mathrm{P}[\,d\omega\,] = e^{a\,b}\mathrm{P}[\,X \geqq b\,].
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\mathrm{E}[\,e^{a\,X}\,] = \int_{\mathbb{R}} e^{a\,x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = e^{\frac{1}{2}a^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{1}{2}a^2} < \infty$．よって仮定が成り立つ．

[39] (H6 九州大 9).

(1) $\displaystyle\mathrm{E}[\,|X|\,] = \int_{|x|<1} |x|\,f(x)\,dx + \int_{|x|\geqq 1} |x|\,f(x)\,dx \leqq \int_{|x|<1} f(x)\,dx + \int_{|x|\geqq 1} |x|^2\,f(x)\,dx$

$\displaystyle\leqq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} |x|^2\,f(x)\,dx = 1 + \mathrm{E}[\,X^2\,] < \infty$ だから X の期待値は存在する．

(2) $\displaystyle\sigma^2 = \mathrm{E}[\,(X-m)^2\,] = \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-m|\geqq\epsilon\}} (x-m)^2\,f(x)\,dx + \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-m|<\epsilon\}} (x-m)^2\,f(x)\,dx$

$\displaystyle\geqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-m|\geqq\epsilon\}} (x-m)^2\,f(x)\,dx \geqq \epsilon^2 \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-m|\geqq\epsilon\}} f(x)\,dx = \epsilon^2\mathrm{P}[\,|X-m| \geqq \epsilon\,].$

(3) $\mathrm{E}[\,|X|\,] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\log(1+x^2)\Big|_0^\infty = \infty$．よって期待値は存在しない．

[40] (S61 大阪市大 D2).

(1) $\mathrm{E}[\,|X|^3\,] < \infty$ のとき $0 \leqq p < 3$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\,|X|^p\,] &= \int_{|X(\omega)|\leqq 1} |X(\omega)|^p\,\mathrm{P}[\,d\omega\,] + \int_{|X(\omega)|>1} |X(\omega)|^p\,\mathrm{P}[\,d\omega\,] \\ &\leqq \int_{|X(\omega)|\leqq 1} 1\,\mathrm{P}[\,d\omega\,] + \int_{|X(\omega)|>1} |X(\omega)|^3\,\mathrm{P}[\,d\omega\,] \leqq 1 + \mathrm{E}[\,|X|^3\,] < \infty,\end{aligned}$$

特に，$\mathrm{E}[\,X\,]$ と $\mathrm{E}[\,X^2\,]$ が存在することに注意．
f に関する仮定から

$$f(x) - (f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)\,x^2) = \frac{1}{6}f'''(\theta(x)\,x)\,|x|^3,\quad x \in \mathbb{R},$$

となる $\theta\colon\ \mathbb{R} \to (0,1)$ が存在し，$|f'''(y)| \leqq M$, $y \in \mathbb{R}$, が成り立つ．$x = X(\omega)$ を代入して ω について確率測度で積分すると積分（期待値）の線形性から

$$\mathrm{E}[\,f(X)\,] - (f(0) + f'(0)\,\mathrm{E}[\,X\,] + \frac{1}{2}f''(0)\,\mathrm{E}[\,X^2\,]) = \frac{1}{6}\mathrm{E}[\,f'''(\theta(X)\,X)\,|X|^3\,].$$

よって

$$\left|\mathrm{E}[\,f(X)\,] - (f(0) + f'(0)\mathrm{E}[\,X\,] + \frac{1}{2}f''(0)\mathrm{E}[\,X^2\,])\right| \leqq \frac{1}{6}\mathrm{E}[\,|f'''(\theta(X)\,X)|\,|X|^3\,] \leqq \frac{M}{6}\mathrm{E}[\,|X|^3\,].$$

(2) 前小問の X に $\alpha t + \sqrt{\beta t}X$ を代入する．問の条件からこの式が前小問の条件を満たす確率変数であることは明らかなので

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{E}[\,f(\alpha t + \sqrt{\beta t}X)\,] - (f(0) + f'(0)\mathrm{E}[\,\alpha t + \sqrt{\beta t}X\,] + \frac{1}{2}f''(0)\mathrm{E}[\,(\alpha t + \sqrt{\beta t}X)^2\,])\right| \\ &\leqq \frac{M}{6}\mathrm{E}[\,|\alpha t + \sqrt{\beta t}X|^3\,].\end{aligned}$$

展開して $\mathrm{E}[\,X\,] = 0$ と $\mathrm{E}[\,X^2\,] = 1$ を代入すると

$$\left|\frac{1}{t}(\mathrm{E}[\,f(\alpha t + \sqrt{\beta t}X)\,] - f(0)) - (f'(0)\alpha + \frac{1}{2}f''(0)\alpha^2 t + \frac{\beta}{2}f''(0))\right| \leqq \frac{M}{6}\,\sqrt{|t|}\mathrm{E}[\,|\alpha\sqrt{t} + \sqrt{\beta}X|^3\,].$$

$t \to +0$ をとると（$\mathrm{E}[\,|X|^3\,] < \infty$ の仮定も用いて）

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}(\mathrm{E}[\,f(\alpha t + \sqrt{\beta t}X)\,] - f(0)) = f'(0)\alpha + \frac{\beta}{2}f''(0).$$

[41] (S63 新潟大 12).

(1) $\epsilon > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mathrm{P}[\,|X_n| \geqq \epsilon\,] < \infty$ ならば,

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}[\,\bigcup_{n\geqq k}\{|X_n| \geqq \epsilon\}\,] \leqq \lim_{k\to\infty}\sum_{n\geqq k}\mathrm{P}[\,|X_n| \geqq \epsilon\,] = 0\,.$$

よって，単調な集合列に関する確率の連続性から

$$\mathrm{P}[\,\bigcap_{k\geqq 1}\bigcup_{n\geqq k}\{|X_n| \geqq \epsilon\}\,] = 0\,.$$

すなわち

$$\mathrm{P}[\,\bigcup_{k\geqq 1}\bigcap_{n\geqq k}\{|X_n| < \epsilon\}\,] = 1\,.$$

これは $X_n \to 0$, $n \to \infty$, a.s. (概収束), を意味する．

(2) $0 < \epsilon < 1$ なる任意の ϵ に対して,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,|X-3| > \epsilon\,] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,|X-3| = n\,] + \sum_{n<\epsilon^{-1}} \mathrm{P}[\,|X-3| = n^{-1}\,] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + \sum_{n<\epsilon^{-1}} (1-n^{-2}) < \infty.
\end{aligned}
$$

よって, (1) から $X_n \to 3$, $n \to \infty$, a.s.[8]

[8]一般には確率収束しても概収束しないが, 確率収束のスピードが速ければ概収束する, という問題.