

19980414-1209;19991014;
20050206(合冊, latex 移行)-09;
服部哲弥, 津田稔朗

大学院入学試験問題（測度論）
2. 可測関数と積分

用語の定義. 以下, \mathbb{R} は実数の集合を表す. 一般に集合 A に対して χ_A は A の定義関数 $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$ を表す. 2つの関数 f と g の合成関数を $f \circ g$ と書く. 即ち, $f \circ g(x) = f(g(x))$.

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値関数 f が可測関数であるとは任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}$ であることをいう. 可測関数 f が可積分 (積分可能) であるとは $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ が成り立つことをいう (非負値可測関数の積分は $+\infty$ を許せば常に存在する.)

測度論 (特に確率論) では測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ においてある性質が「ほとんどいたるところ成り立つ」または「ほとんど全ての点で成り立つ」という用語を用い, a.e., あるいは μ -a.e., などの記号を使うが, これはその性質が成り立たないような Ω の要素を全て集めた集合が (可測集合であって) 測度 0 であることをいう. 例えば, 可測関数 f がほとんどいたるところ 0 に等しいとは $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}) = 0$ ということであり, $f = 0$, a.e., あるいは, $f = 0$, μ -a.e., または, $f(x) = 0$, μ -a.e. $x \in \Omega$, などと書く. 同様に, ほとんど全ての $x \in \Omega$ に対して $f(x) \leq 1$ であるとは $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > 1\}) = 0$ となること, $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in \Omega$ とは $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ となること, といった調子である.

編集方針. この第2分冊 (可測関数と積分) では原則として収束定理, すなわち, 無限個の関数に関する比較や積分範囲に関する連続性を要するもの, を除いて問題を集めた. ただし, 収束定理を使うのが自然な問題でも, 基礎事項のみであまり煩雑にならずに解けるものがあれば前倒しで収録しようと考えて無理をしたため, 原則にはかなりの例外が生じ, また, 問題によっては院試の解答としては不自然に長いものもある (実際の院試では「これは を使って解く問題」などと書いてくれないほうが普通なので, 初等的にも進んだ道具を使っても両様で解けるほうがもちろん良い.)

単関数とその積分.

[1] (H8 筑波大 6). $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ を \mathbb{R} の有限分割とする. すなわち

$$E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^N E_i = \mathbb{R}.$$

\mathcal{F} を \mathcal{E} を含む最小の σ 加法族とする. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し次の条件 (1), (2) は互に同値であることを示せ.

- (1) f は \mathcal{F} -可測である.
- (2) f は各 E_i 上一定値をとる.

[2] (H3 立教大 6). 区間 $[0, 1]$ に含まれる全ての有理数を $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ と並べる. $n = 1, 2, \dots$ に対して $U_n = [a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}] \cap [0, 1]$ とし, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ とおく.

- (1) U はルベーク可測集合であり, $\frac{1}{8} \leq \mu(U) \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを証明せよ. 但し $\mu(U)$ は U のルベーク測度である.
- (2) U の定義関数 χ_U はルベーク積分可能であるがリーマン積分可能ではないことを証明せよ.

[3] (H9 熊本大 1). 実数列 $\{a_n\}$ に対して, $[0, \infty)$ 上の関数 f を次のように定義する:

$$f(x) = a_n \quad (n-1 \leq x < n \text{ のとき}).$$

このとき, 次のことを示せ.

- (1) 関数 f はルベーク可測である.
- (2) 次の2つの条件は同値である.
- (a) 関数 f はルベーク積分可能である.
- (b) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.
- (3) 関数 f がルベーク積分可能であるとき

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[4] (H9 広島大 6). $k = 1, 2, \dots$ に対し, $U = (0, 1)$ 上の関数 f_k を

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, \\ 0, & \text{その他の } x \in U, \end{cases}$$

によって定義する. U に含まれるルベーク可測集合 E で, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx$ が存在するものの全体を \mathcal{A} とし, 各 $E \in \mathcal{A}$ に対して

$$\theta(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx$$

と定義する. このとき次を示せ.

- (1) $E, F \in \mathcal{A}$, $E \cap F = \emptyset$ ならば, $E \cup F \in \mathcal{A}$ で $\theta(E \cup F) = \theta(E) + \theta(F)$ が成り立つ.
- (2) E のルベーク測度が0ならば, $E \in \mathcal{A}$ で $\theta(E) = 0$ である.
- (3) U に含まれる可測集合 E が $x = \frac{1}{2}$ を内点に持てば, $E \in \mathcal{A}$ で $\theta(E) = 1$ である.
- (4) U に含まれる任意の区間 I は \mathcal{A} に属し, $\theta(I)$ の値は0か $\frac{1}{2}$ か1かのいずれかである.

可測関数.

[5] (S61 山形大 9).

- (1) \mathbb{R} 上の実数値関数がボレル可測であるとはどういうことか. また, ルベーク可測であるとはどういうことか.
- (2) 任意の実数値連続関数はボレル可測であることを示せ.
- (3) \mathbb{R} 上の実数値関数 f, g がそれぞれルベーク可測, ボレル可測ならば, $g \circ f$ はルベーク可測であることを示せ.
- (4) 上の問で $f \circ g$ がボレル可測でないような f, g の例を挙げよ.

[6] (S62 新潟大 4) . (Ω, \mathcal{F}) を可測空間, f を Ω 上の \mathcal{F} -可測実数値関数とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\mathcal{B} = \{E \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$ とおくと, \mathcal{B} は 1 次元ボレル集合族 \mathcal{B}_1 を含む σ 加法族であることを示せ.
- (2) g が実数値 1 次元ボレル可測関数ならば $g \circ f$ は \mathcal{F} -可測関数であることを示せ.

[7] (H1 山形大 8) . 以下を示せ.

- (1) 空集合でない集合 Ω 上の実数値関数 f に対して集合族 $\mathcal{F} = \{f^{-1}(E) \subset \Omega \mid E \text{ はボレル集合}\}$ は σ 加法族をなす.
- (2) Ω 上の実数値関数 g が¹ \mathcal{F} に関して可測であるための必要十分条件は, ボレル可測関数 h が存在して $g = h \circ f$ が成り立つことである.

[8] (H6 大阪市大 D3a) . (Ω, \mathcal{F}) を可測空間, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を可測関数とする. $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)), \omega \in \Omega$, で定義された $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ は可測であることを示せ.

[9] (H9 山形大 8) . (Ω, \mathcal{F}) を可測空間とすると, Ω 上で実数または $+\infty, -\infty$ の値をとる関数 f, g について, 次の各問に答えよ.

- (1) 関数 f が, Ω 上の \mathcal{F} -可測関数であることの定義を述べよ. さらに, それと同値な定義をいくつか述べよ.
- (2) 関数 f が, Ω 上の \mathcal{F} -可測関数ならば, $-f, f + a$ (a は実数) も \mathcal{F} -可測関数であることを示せ.
- (3) Ω 上の \mathcal{F} -可測関数 f, g に対して, 集合 $\{f < g\} := \{x \mid f(x) < g(x)\}$ は \mathcal{F} -可測集合となることを示せ.
- (4) 関数 f, g が, ともに Ω 上の \mathcal{F} -可測関数ならば, $f + g$ も \mathcal{F} -可測関数であることを示せ.

[10] (S62 お茶大 1) . μ を \mathbb{R} 上のルベーグ測度とする. g は \mathbb{R} 上で定義された可測な実数値関数で, \mathbb{R} の上でルベーグ積分可能な実数値関数 f をどのようにとっても, 積 fg は \mathbb{R} 上でルベーグ積分可能であるとする. このとき, $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| > \alpha\}) = 0$ となる実数 α が存在することを示せ.

[11] (H6 千葉大 B8) . μ を \mathbb{R} 上のルベーグ測度とする. \mathbb{R} 上の実数値²ルベーグ可測関数 g に対して, $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(g^{-1}((\alpha, +\infty))) = 0\}$ とおく. $S \neq \emptyset$ のとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 「 μ に関して) ほとんど全ての x に対して $g(x) \leq \lambda$ 」なることと 「 $\lambda \geq \inf S$ 」なることは同値であることを証明せよ.

[12] (H2 富山大 BVI) . 集合族 $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ または } A^c \text{ が高々可附番}^3\}$ について次の問に答えよ.

- (1) \mathcal{F} は σ 加法族であることを示せ.
- (2) 関数: $x \rightarrow |x|$ は \mathcal{F} -可測か.

¹元の問題では g の値域の可測空間としての構造が明記されていない(単に「 Ω 上の関数 g 」となっていて値域は任意であるかのように出題されている)が, 値域の σ 加法族が 2 点を分離していないと反例がある: $\Omega = \Omega' = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \Omega'\}$, $f(0) = f(1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$, とすると $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ であって g は \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測だが, 明らかに $g = h \circ f$ なる h はありえない.

²元の問題には明示されていないが, 題意から g は実数値関数である. 特に, $\mu(\{g = \infty\}) > 0$ を許すと反例が生じる.

³高々可算集合, という事.

[13] (H8 広島大 6B). f は \mathbb{R}^N のルベーク可測集合 E 上で定義された関数で, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mu(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$ となる閉集合 $F_\varepsilon \subset E$ が存在し, f の F_ε 上への制限が連続になるとする. ここで, μ は \mathbb{R}^N 上のルベーク測度である. このとき, 次を示せ.

(1) 閉集合 $F_\varepsilon \subset E$ に対して,

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_\varepsilon, \\ 0, & x \in E - F_\varepsilon, \end{cases}$$

によって定義される関数 g_ε は E 上でルベーク可測である.

(2) E に含まれる閉集合の単調増加列 $F_n, n = 1, 2, \dots$ で, f の F_n 上への制限が連続であって,

$$\mu\left(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$$

となるものが存在する.

(3) 関数 f は E 上でルベーク可測である.

積分.

[14] (H8 熊本大 1). 次の問いに答えよ.

(1) 区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \text{ が有理数のとき}), \\ \sin^4 x & (x \text{ が無理数のとき}), \end{cases}$$

のルベーク積分 $\int_0^{2\pi} f(x) d\mu(x)$ の値を求めよ.

(2) 集合 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (xy \text{ が有理数のとき}), \\ xy & (xy \text{ が無理数のとき}), \end{cases}$$

のルベーク積分 $\int_E f(x, y) d\mu(x, y)$ の値を求めよ.

ただし, 上の (1) (2) の μ はそれぞれ 1 次元, 2 次元のルベーク測度である.

[15] (H6 東女大 6). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし, f は Ω 上で定義された非負値可測関数とする. このとき, $\int_\Omega f d\mu = 0$ ならば f は Ω 上でほとんどいたるところ 0 に等しいことを示せ.

[16] (S60 金沢大 6). f を $[0, 1]$ 上の可測関数で $f(x) > 0$ ($x \in [0, 1]$) を満たすとする. $0 < \alpha < 1$ なる α を一つ与えて $\mathcal{A} = \{A \subset [0, 1] \mid A \text{ は可測集合, } |A| \geq \alpha\}$ とおくと, $\inf_{A \in \mathcal{A}} \int_A f(x) dx > 0$ を示せ. 但し, $|A|$ は A のルベーク測度とする.

[17] (H3 神戸大 3). 次の (1) (2) を証明せよ.

(1) f は $[0, 1]$ 上の非負値ルベーク可測関数とする. このとき $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ならば $f(x) = 0$, a.e.- $x \in [0, 1]$.

(2) f, g は $[0, 1]$ 上の実数値可積分関数とし, 任意のルベーク可測集合 $E \subset [0, 1]$ に対して, $\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx$ を満たすものとする. このとき, $f(x) = g(x)$, a.e.- $x \in [0, 1]$.

[18] (H6 熊本大 1) . f を \mathbb{R}^2 上のルベーク可測な非負値関数で $\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 0$ を満たすものとする .

- (1) f は恒等的に 0 とは限らないことを例をあげて示せ .
- (2) f が \mathbb{R}^2 上連続ならば f は恒等的に 0 であることを示せ .

[19] (S61 熊本大 3) . f を $[0, 1]$ 上のルベーク積分可能な関数とする . このとき , $f(x) > 0$, a.e., ならば $\int_0^1 f(x) dx > 0$ であることを示せ .

[20] (H5 山形大 9) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間 , f を Ω 上の可測関数とする . 次の命題が成り立つことを示せ .

- (1) $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |f| d\mu$ ($\epsilon > 0$).
- (2) $\int_{\Omega} |f| d\mu = 0$ ならば $f = 0$, μ -a.e.
- (3) f が積分可能ならば $|f| < +\infty$, μ -a.e.

[21] (S61 九州大 X) . f は区間 $[0, 1]$ で定義された非負ルベーク可測関数とし , $A_n = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq 2^n\}$ とする . このとき , f がルベーク可積分であるための必要十分条件は $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(A_n) < \infty$ であることを示せ . 但し , μ は $[0, 1]$ 上のルベーク測度である .

[22] (S63 広島大 6) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は有限測度空間 , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は可測関数とする . 正整数 n に対して $E_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq n\}$ とおくとき , 次を示せ .

- (1) f が Ω 上で可積分であるための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ である .
- (2) f が Ω 上で可積分ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(E_n) = 0$.

[23] (S62 金沢大 5) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間 , $\{A_n\}$ を \mathcal{F} -可測な集合列 , $\{f_n\}$ を Ω で定義された実数値 \mathcal{F} -可測関数の列とする . 次のことを示せ .

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ならば $\mu\left(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} A_n\right) = 0$.
- (2) 正数列 $\{c_n\}$ があって $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in \Omega \mid |f_n(x)| > c_n\} < \infty$.
- (3) 正数列 $\{a_n\}$ があって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ はほとんど全ての x で収束する .

[24] (H6 山形大 9) . $f \geq 0$ を実数上のルベーク積分可能な関数 , A をルベーク可測集合 , α を実数 , μ はルベーク測度とする . このとき , (*) が成り立つことを以下の問に答えることによって示せ .

$$(*) \quad \int_A f(x + \alpha) d\mu(x) = \int_{A+\alpha} f(x) d\mu(x) .$$

- (1) f がルベーク可測集合 B の定義関数 $f(x) = \chi_B(x)$ のとき , (*) が成り立つことを示せ .
- (2) $f \geq 0$ がルベーク可測単関数のとき (*) が成り立つことを示せ .

(3) $f \geq 0$ がルベーグ積分可能な関数のとき (*) が成り立つことを示せ .

[25] (S63 新潟大 4) . μ を \mathbb{R} 上のルベーグ測度とするととき , 次の問に答えよ .

(1) $(0, \infty)$ 上の非負実数値関数 f が広義リーマン積分可能ならばルベーグ積分可能で , $\int_0^\infty f d\mu = \int_0^\infty f(x) dx$ であることを示せ . 但し , 右辺は f の広義リーマン積分とする .

(2) $(0, \infty)$ 上の関数 $\frac{\sin x}{x}$ は広義リーマン積分可能であるがルベーグ積分可能でないことを示せ .

[26] (S60 筑波大 6) . a を \mathbb{R} 上で定義されたルベーグ可測関数 , C を正の定数とする . \mathbb{R} 上の任意のルベーグ可積分関数 f に対して $\int_{\mathbb{R}} |a(x) f(x)| dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ が成り立つための必要十分条件は $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |a(x)| > C\}) = 0$ であることを示せ . 但し , μ は \mathbb{R} 上のルベーグ測度である .

[27] (S62 富山大 BV) . 区間 $(0, 1)$ 上の可測関数 f に対して $\|f\|_* = \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda \mu(\{x \in (0, 1) \mid |f(x)| > \lambda\})$ とおく . 但し , μ はルベーグ測度とする .

(1) 次の 3 つの主張を証明せよ .

(a) $f = 0$, a.e., と $\|f\|_* = 0$ は同値である .

(b) 区間 $(0, 1)$ 上の任意の可測関数 f, g に対して $\|f + g\|_* \leq 2(\|f\|_* + \|g\|_*)$.

(c) $f \in L^1$ ならば $\|f\|_* < \infty$.

(2) $\|f\|_* < \infty$ であるが $f \notin L^1$ となる例を挙げよ .

[28] (H4 広島大 6) . D を \mathbb{R}^d の可測集合とするととき $L^2(D, \mu) \subset L^1(D, \mu)$ と $\mu(D) < \infty$ とは同値であることを示せ . 但し , μ は \mathbb{R}^d のルベーグ測度 , $L^p(D, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, は $\int_D |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ を満たす D 上可測な関数 f たち全てを要素とする集合とする .

[29] (S63 大阪市大 D2) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし , $L^p = \{f \mid \int |f|^p d\mu < \infty\}$ と定義する . $\Omega = A_1 \cup A_2$, $\mu(A_1) < \infty$, $\mu(A_2) = \infty$, で

$$B \in \mathcal{F}, B \subset A_2 \implies \mu(B) = 0 \text{ または } \infty,$$

が成り立つとする . このとき , 全ての $0 < p < q$ に対して $L^p \supset L^q$ であることを証明せよ .

[30] (H8 金沢大 5) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間 , 関数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は 2 乗可積分 , すなわち $\int_\Omega |f(x)|^2 \mu(dx) < \infty$ とする⁵ . このとき , 次を示せ .

(1) f は可積分である .

(2) 有界な Φ'' をもつ C^2 級の関数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\Phi \circ f$ は可積分である .

[31] (H6 新潟大 2) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする . $f(x)$ を Ω 上の実数値 \mathcal{F} -可測関数とする . このとき , 次の各問いに答えよ .

⁴ $\int_0^1 |f(x)| d\mu(x) < \infty$ のこと .

⁵ μ -可測関数である (従って積分が定義される) ことも暗黙に条件に含まれている .

- (1) $|f|$ は \mathcal{F} -可測であることを示せ .
- (2) $\frac{|f|}{1+|f|}$ は \mathcal{F} -可測であることを示せ .
- (3) $\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > 1\}) \leq 2 \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu$ を示せ .

[32] (H2 大阪市大 C1) . $\{f_{\alpha}(x)\}$ は $|f_{\alpha}(x)| \leq x^2$ を満たす \mathbb{R} 上の可測関数の族とする .

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\alpha} \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid |f_{\alpha}(x)| < \delta\}} \frac{f_{\alpha}(x)}{x^2} dx = 0$$

であることを示せ .

[33] (S61 東工大 9) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間で $\mu(\Omega) < \infty$ とする . このとき

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} = \operatorname{ess. sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

を示せ⁶ .

[34] (H2 神戸大 3) . f, f_1, f_2, \dots は全て \mathbb{R} から \mathbb{R} への可測関数とするとき次の2つを証明せよ .

- (1) f が可積分 , かつ , ある $M > 0$ に対して $|f(x)| \leq M, \text{ a.e. } -x$, を満たすならば , 任意の $p > 1$ に対して $|f|^p$ も可積分である .
- (2) $f_n, n \geq 1$, が全て可積分で , かつ , ある $M > 0$ があって $|f_n(x)| \leq M, \text{ a.e. } -x, \forall n \geq 1$, が成り立っているものとする . いま , f が可積分で $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ が成り立っているとすると , 上の M に対して $|f(x)| \leq M, \text{ a.e. } -x$ が成り立ち , さらに , 任意の $p > 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$ が成り立つことを証明せよ .

確率変数と期待値 .

用語の定義 . (Ω, \mathcal{F}, P) が確率空間であるとは , 測度空間であって $P(\Omega) = 1$ を満たすことを言い , このとき P が確率測度であると言い , 可測集合 (\mathcal{F} の要素) を事象と呼ぶ . さらに , X がその上の確率変数であるとは , $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が可測関数であること , 即ち , 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$ を満たすことを言う . 事象 $A \in \mathcal{F}$ の確率とは A の測度 $P[A] = P(A)$ のこと , また , 確率変数 X の期待値 (通常 $E[X]$ と書かれる) とは測度 P に関する可測関数 X の積分 $E[X] = \int_{\Omega} X dP$ のことである . $V[X] = E[(X - E[X])^2]$ を分散と呼ぶ .

確率論ではしばしば確率空間を指定せずにいきなり「 X を確率変数とする」などと書くが , これは「適当な確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) があって X はその上の確率変数である」という文章の省略形である . さらに確率変数 X を用いて決まる Ω の部分集合 (可測集合) を表すのに $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega)\}$ と書かずに $\{A\}$ あるいは A と省略することも多い . 例えば $P[X > a] = P[\{X > a\}] = P[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}] (= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}))$ である .

[35] (H4 大阪市大 D3) . (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし , $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ とする . $m = 1, 2, \dots, n$ に対して p_m が存在し , 全ての $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ に対して

$$P[A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_m}] = p_m$$

⁶右辺は , $|f(x)| \leq M, \text{ a.e. } -x$, なる M (本質的上界) の下限を表す

となるものとする．このとき， $P\left[\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} \geq 1\right]$ および $P\left[\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} = 1\right]$ を求めよ．

[36] (S63 九大 VIII) . X を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数として，その分布関数を $F(x) = P[X \leq x]$ で定義する． F が単調非減少な右連続関数であることを示せ．また F の不連続点は高々可算個であることを示せ．

[37] (H2 北大 17) . (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間， X をその上の確率変数とする．

- (1) \mathbb{R} の部分集合の族 \mathcal{B}_X を $\mathcal{B}_X = \{A \subset \mathbb{R} \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ によって定義する．このとき， \mathcal{B}_X は \mathbb{R} 上のボレル集合を全て含む σ 加法族をなすことを示せ．
- (2) $A \in \mathcal{B}_X$ に対して $\mu_X(A) = P(X^{-1}(A))$ とおく．このとき， μ_X は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_X)$ 上の確率測度であることを示せ．
- (3) f を \mathbb{R} 上のボレル可測な偶関数で，区間 $[0, \infty)$ で単調増加かつ非負値とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$P[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{E[f(X)]}{f(\epsilon)}.$$

[38] (H1 熊本大 9) .

- (1) 確率変数 X とある正の実数 a に対して $E[e^{aX}]$ が存在すれば，任意の実数 b に対して $P[X \geq b] \leq e^{-ab} E[e^{aX}]$ が成り立つことを示せ．
- (2) X が標準正規分布に従う⁷とき上記の仮定が満たされることを示せ．

[39] (H6 九州大 9) . X は密度関数 f を持つ \mathbb{R} 上の確率変数である⁸ . ボレル関数 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して期待値を

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx$$

で定義する．次の (1), (2), (3) を示せ．

- (1) X^2 の期待値が存在するとき X の期待値は存在する．
- (2) m を X の期待値とする． $(X - m)^2$ の期待値を X の分散という． X の分散 σ^2 が存在するとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$P[|X - m| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

- (3) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ のとき X の期待値は存在しない．

[40] (S61 大阪市大 D2) . \mathbb{R} 上の実数値関数 f は絶対値が一様に M 以下となる 3 次導関数を持つものとする．このとき，

⁷ X の密度が $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ であること，即ち，任意のボレル集合 B に対して $P[X \in B] = \int_B \rho(x) dx$ が成り立つことをいう．

⁸ f が確率変数 X の密度であるとは $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって，任意のボレル集合 B に対して $P[X \in B] = \int_B f(x) dx$ が成り立つことを言う（ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が確率変数 X による像測度のルベーグ測度に関する Radon-Nikodým 微分である，というのと同じ意味．）

(1) $E[|X|^3] < \infty$ となる確率変数 X に対して

$$\left| E[f(X)] - \left\{ f(0) + f'(0)E[X] + \frac{1}{2}f''(0)E[X^2] \right\} \right| \leq \frac{M}{6}E[|X|^3]$$

となることを証明せよ.

(2) $E[X] = 0, E[X^2] = 1$, かつ $E[|X|^3] < \infty$ となる確率変数 X と実数 α および正の実数 β に対して

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (E[f(\alpha t + \sqrt{\beta t}X)] - f(0)) = \alpha f'(0) + \frac{\beta}{2} f''(0)$$

となることを証明せよ.

[41] (S63 新潟大 12). $\{X_n\}_{n \geq 1}$ を確率変数列とするととき, 次の問に答えよ.

(1) 各 $\epsilon > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq \epsilon] < \infty$ を満たすとき $X_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, a.s. (概収束), が成り立つことを示せ.

(2) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P[X_n = 3 + n] = \frac{1}{n^2} = 1 - P[X_n = 3 - \frac{1}{n}]$ を満たすとき, (1) の結果を用いるとどのような結論が得られるか.