

19980414-1209;1212;1215;
 20050127(platex 移行)-31;0201-07;
 20080218,19;0703;
 服部哲弥

大学院入学試験問題（測度論）
 3 . 収束定理 (1) と Fubini の定理

非負整数 n に対して関数が C^n 級であるとは, n 階微分可能で n 階導関数が連続ということ, C^∞ 級であるとは, 任意の非負整数 n に対して C^n 級であること, をいう.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が有限測度空間であるとは $\mu(\Omega) < \infty$ を満たす測度空間のこと. 特に $\mu(\Omega) = 1$ のとき確率測度空間と呼ぶ. 確率論関連の用語についてはこの問題集の第2章(可測関数と積分)の確率変数と期待値の節冒頭の用語定義を参照.

実数値関数の積分に関する用語はこの問題集の第2章可測関数と積分の冒頭の用語の定義を参照. 複素数値関数の可測性や積分は実部と虚部に分けて実数値関数の積分の定義を適用したものを定義とする.

単調収束定理と積分の積分範囲に関する連続性.

[1] (H7 熊本大 1). f を $[0, 1]$ 上のルベグ積分可能な関数とする. $[0, 1]$ のルベグ可測集合の列 $\{E_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ を満たせば $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x) = 0$ であることを示せ. 但し μ はルベグ測度である.

[2] (S61 山形大 10). (Ω, \mathcal{F}) を可測空間, μ 及び ν を \mathcal{F} 上の測度とする. いま, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ を Ω 上の非負値可測関数列で, 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\int_A g_n d\mu \leq \nu(A)$ を満たすものとする. また, $f_n = \sup_{1 \leq i \leq n} g_i, f = \sup_{1 \leq i} g_i$, とし, 可測集合 $\{A_{ni}\}_{i=1}^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$A_{n1} = \{x \in \Omega \mid g_1(x) = f_n(x)\},$$

$$A_{ni} = \{x \in \Omega \mid g_1(x) < f_n(x), \dots, g_{i-1}(x) < f_n(x), g_i(x) = f_n(x)\} \quad (2 \leq i \leq n),$$

で定義する. このとき次の間に答えよ.

(1) $f_n = \sum_{i=1}^n \chi_{A_{ni}} g_i$ を示せ.

(2) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\int_A f_n d\mu \leq \nu(A)$ となることを示せ.

(3) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\int_A f d\mu \leq \nu(A)$ となることを示せ.

[3] (S61 名大 4). ルベグ測度 dx について $f_n, n = 1, 2, \dots$, は $[0, 1]$ 上可測で,

$$-\infty < f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots, \quad x \in [0, 1],$$

かつ, ある定数 M があって $\int_0^1 |f_n(x)| dx \leq M < \infty$ を満たすとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が $[0, 1]$ 上ほとんどいたるところ存在して, 任意の可測集合 $E \subset [0, 1]$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ .

[4] (H7 筑波大 7) . f は \mathbb{R} 上で定義された非負値可測関数で \mathbb{R} 上ルベグ積分可能とする . このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^n dx = 0$ であるための必要十分条件は $f(x) < 1, \text{ a.e. } -x \in \mathbb{R}$, であることを示せ .

[5] (H8 大阪市大 D3) . \mathbb{R} 上の関数列 f_n が $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx \leq 2^{-n} (n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たすとき , ほとんど全ての実数 x に対して , 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が収束することを証明せよ .

[6] (S60 都立大 7) .

(1) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ は , 区間 $[0, 1]$ 上のルベグ可測関数列とする . このとき $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx < \infty$ ならば , 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は $[0, 1]$ のほとんど全ての点で絶対収束することを示せ .

(2) $\{r_n\}_{n \geq 1}$ は , $[0, 1]$ に属する全ての有理数からなる数列とし , $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ なる数列とする . このとき , 数列 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ は $[0, 1]$ のほとんど全ての点で絶対収束することを示せ .

[7] (H3 岡山大 B1) . $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は相異なる自然数の列で , $0 \leq x \leq 1$ とする . このとき $S(N, x) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi\sqrt{-1}a_n x}$ について次の (1) (2) を証明せよ .

(1) ルベグ積分 $\int_0^1 \sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2, x)|^2 dx$ は有限である .

(2) ほとんど全ての x に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N^2, x) = 0$.¹

[8] (H2 熊本大 8) . 確率変数列 $\{X_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ がある $p > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|^p] < \infty$ を満たすとき , $X_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ が確率 1 で成り立つことを示せ .

[9] (H6 北大 16) . μ を \mathbb{R} 上のルベグ測度とする . f を \mathbb{R} 上のルベグ積分可能な関数 , $D \subset \mathbb{R}$ を $\mu(D) < \infty$ なる可測集合とすると $g(x) = \int_D f(x+y) \mu(dy)$ は $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$ を満たすことを証明せよ .

¹原文は $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, x) = 0$ となっているが , これは前小問がヒントにならないという院試としての問題の他に , そもそも未解決問題ではないかという疑いを持っている .

(以下 , 岩波数学辞典第 4 版が手元にある場合の説明 .) 数学辞典第 4 版 202E (数の幾何と数論における近似 / 一様分布) の式 (1) 以降を見ると , もし , この小問の原文どおりのことが証明できると , 辞典の記述において各 $h = 1, 2, \dots$ に対して , 小問の $a_n x$ を辞典の ha_n になるようにとることで (たとえば辞典に例の出ている $a_n = (n\theta)$ ならば $x = \theta$, $a_n = hn$ ととる) , 辞典の言葉で「ほとんど全ての θ と任意の速やかに増大する $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して $a_n = (f(n)\theta)$ となる場合」は Weyl の規準を証明できたことになる . 辞典の記述に「指数オーダーの増大度を持つ関数に関しては多くは知られていない」とある状況で , $f(n)\theta$ という特別な場合で , かつ , θ が全ての無理数になるかまでは言えないとはいえず , このような事実が知られていれば辞典に記述があるはずと思われる . よって原文どおりの事実は未解決と考えた次第である .

[10] (H8 阪大 8) . \mathbb{R}^n 上のルベーク可積分関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ がルベーク可積分関数 f に一様収束するものとする . さらに , 任意の自然数 k と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|f(x)| \leq k \implies |f_k(x)| \leq |f(x)|$$

が成り立っているものとする . このとき $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$ を示せ . 但し $d\mu$ は \mathbb{R}^n のルベーク測度である .

[11] (H3 筑波大 7) . $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{R} 上のルベーク積分可能な非負値関数の列である .

$\sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx < \infty$ ならば , ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ について級数 $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が収束することを示せ .

Fatou の補題 .

[12] (H8 山形大 8) . 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における積分 $\int f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$ に関して , 次の各問に答えよ .

- (1) \mathcal{F} -可測関数の列 f_1, f_2, \dots , に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ の定義を述べよ .
- (2) \mathcal{F} -可測関数の列 f_1, f_2, \dots , が , 全ての $x \in \Omega$ に対して $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ を満たすとき , 積分に関する収束定理を述べよ (証明は不要) .
- (3) \mathcal{F} -可測関数の列 f_1, f_2, \dots , が , 全ての $x \in \Omega$ と全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) \geq 0$ を満たすとき $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ が成り立つことを (2) の収束定理を用いて示せ .

[13] (H3 都立大 10) . 空間 Ω の σ 加法族 \mathcal{F} 上の測度を μ とし , μ -可積分実数値関数 g, f_1, f_2, \dots , が $f_n \geq g, \mu$ -a.e, $n \geq 1$, を満たせば , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は可測で ,

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

であることを示せ .

[14] (H1 熊本大 3) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間とするととき , 次のことを示せ .

- (1) Ω 上の有界可測関数 f は積分可能である .
- (2) Ω 上の 2 乗可積分関数 f は積分可能である .
- (3) 各 f_n が Ω 上の積分可能関数で $\sup_{n \geq 1} \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty$ かつ 各点 $x \in \Omega$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ならば , 極限関数 f は積分可能である .

[15] (H3 お茶大 1) . $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間 , $f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ と f は Ω 上で定義された実数値関数で \mathcal{F} -可測とする . 次の (*) が成り立つときに , 以下の (1) (2) (3) に答えよ .

$$(*) \quad \begin{cases} f_n(x) \geq 0, & n = 1, 2, 3, \dots, x \in \Omega, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \alpha > 0. \end{cases}$$

- (1) $0 \leq \int_{\Omega} f d\mu \leq \alpha$ を示せ .

(2) $\int_{\Omega} f d\mu = 0 \neq \alpha$ となる例を示せ .

(3) $0 < \beta < \alpha$ なる任意の α と β に対して , α が (*) を満たし , かつ $\int_{\Omega} f d\mu = \beta$ となるような例が作れることを示せ .

有界収束定理 .

[16] (S62 京大 7) . 閉区間 $[0, 1]$ で定義された非負値可測関数の全体を \mathcal{P} とする .

(1) $f \in \mathcal{P}$ のとき , $+\infty$ を許せば積分 $\int_0^1 f(x) \log f(x) dx$ の値 $I(f)$ が確定することを示せ . 但し , $0 \log 0 = 0$ とする .

(2) \mathcal{P} の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がほとんどいたるところ n について単調に増大してある f に収束するとき , $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = I(f)$ であることを示せ .

[17] (H5 神戸大 3) .

(1) 閉区間 $[0, 1]$ で定義された非減少関数 f の不連続点全体の集合のルベーグ測度は 0 であることを示せ .

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [\cos(m! \pi x)]^{2n} dx$ を求めよ . 但し , m は正の整数とする .

(3) $p > 0$ を実数とする . $f \in L^p(0, 1)$ ならば² $f \in L^q(0, 1)$, $0 \leq q < p$ となることを示せ³ .

[18] (H1 広島大 6) . $[0, 1]$ 上のルベーグ可測関数 f が $1 < p < \infty$ に対して $\int_0^1 |f(x)|^p dx = 1$ を満たすとき , $f^*(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) |f(x)|^{p-1}$ と定義する . 但し , $\operatorname{sgn} \xi = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi < 0. \end{cases}$ このとき

次を示せ .

(1) $\int_0^1 f^*(x) f(x) dx = 1$ で , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q に対して $\int_0^1 |f^*(x)|^q dx = 1$.

(2) f_0, f_1, f_2, \dots は $[0, 1]$ 上のルベーグ可測関数列で , 定数 $M > 0$ と $n = 1, 2, \dots$ に対して $|f_n(x)| \leq M$, a.e. , とする⁴ . $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x)$, a.e. , ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n^*(x) - f_0^*(x)| dx = 0$.

優収束定理 (Lebesgue の収束定理) .

[19] (H6 神戸大 3) . f は \mathbb{R} から $[0, \infty)$ への可測関数とし , \mathbb{R} の部分集合 E_1 および E_2 を次のように定める . $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < f(x) < 1\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq f(x)\}$. また μ は \mathbb{R} 上のルベーグ測度を表すとする .

² $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ を満たす可測関数ということ .

³ 元の問題では $p > 1$, $1 \leq q < p$ となっているが 1 以上とする理由は見あたらない .

⁴ 元の問題では「かつ $\int_0^1 |f_n(x)|^p dx = 1$ 」となっているが , 問題文でその場合しか f^* を定義していないことになっていることを除けば , この条件はいらぬと思う . ただ , この問題はややこしい道具立てをしている割にそれが使われていないように見えるので , 私が問題を誤解しているかもしれない .

(1) E_1 上で $f(x)^{1/n}$ は n について単調増加であることを示して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} f(x)^{1/n} d\mu(x) = \mu(E_1)$ を証明せよ .

(2) f は E_2 上で可積分であるとする . E_2 上で $f(x)^{1/n} \leq f(x)$ が成り立つことを示して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_2} f(x)^{1/n} d\mu(x) = \mu(E_2)$$

を証明せよ .

(3) f が \mathbb{R} 上可積分であるときに $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^{1/n} d\mu(x) = \mu(E_1 \cup E_2)$ が成り立つことを証明せよ .

[20] (S63 奈良女大 IIA) . f を \mathbb{R}^n 上の連続関数で , ルベーク可積分かつ $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \leq M$ とする . また , g を \mathbb{R}^n 上のルベーク可積分な関数とする . $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ とおくととき ,

(1) F が連続関数であることを示せ .

(2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x)$ を求めよ .

(必要ならばルベークの収束定理を証明なしで用いてもよい .)

[21] (H5 大阪市大 C1) . E を実軸上の可測集合 , $f: E \rightarrow (0, \infty)$ を可積分関数 , $\alpha \geq 1$ を定数とする . 以下を示せ .

(1) 任意の自然数 n と任意の $x \in E$ に対して $n \log(1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha) < \alpha f(x)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E n \log(1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha) dx$ は $\alpha = 1$ のとき $\int_E f(x) dx$ であり , $1 < \alpha < \infty$ のときは 0 である .

[22] (H6 広島大 6A) . f は \mathbb{R} 上でルベーク可積分 , $E_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$, $E_- = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$, とする . g は \mathbb{R} 上でルベーク可測 , $|g(x)| \leq 1$, a.e.- $x \in \mathbb{R}$ とする .

(1) 次の (a) (b) が同値であることを示せ .

$$(a) \quad \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu = \int_{\mathbb{R}} f g d\mu, \quad \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu > 0.$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} +1, & \text{a.e.-}x \in E_+, \\ -1, & \text{a.e.-}x \in E_-, \end{cases} \quad \text{および } \mu(E_+ \cup E_-) > 0.^5$$

(2) $\phi_n(\xi) = \begin{cases} 1, & 1/n \leq \xi, \\ n\xi, & -1/n < \xi < 1/n, \\ -1, & \xi \leq -1/n, \end{cases}$ とするとき , 次を示せ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_n(f(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |f|(x) d\mu(x).$$

ここで μ は \mathbb{R} 上のルベーク測度を表す .

⁵元の問題は $\mu(E_+ \cup E_-) > 0$ の代わりに $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| = 1\}) > 0$ となっているが , 問題文で $f = 0$ のところでの g の値が制約されていないため , これだと $f = \chi_0, g = \chi_{\mathbb{R}}$ が , 元の (b) は満たすが (a) は満たさない反例になる .

非負値関数の概収束と L^1 収束 .

[23] (S61 筑波大 7⁶) . f_n ($n \geq 1$) および f を \mathbb{R} 上の非負値ルベーク可積分関数で次の 2 条件を満たすとする .

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (各点収束) .

このとき , 以下を証明せよ .

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_n(x))^+ dx = 0.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| dx = 0.$

但し , 実数 a に対して $a^+ = \max\{a, 0\}$.

[24] (S60 広島大 6) . f, f_n ($n = 1, 2, \dots$) は \mathbb{R} 上の非負可積分関数で次の (a), (b) を満たすとする .

(a) ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

このとき ,

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ を示せ (ヒント : $|\alpha| = 2 \max\{\alpha, 0\} - \alpha$.)

(2) さらに ,

(c) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} x^2 f_n(x) dx < \infty$

ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$ が成り立つことを示せ .

[25] (H8 広島大 6B) . 関数 $f, f_k, k = 1, 2, \dots$, は区間 $[a, b]$ 上でルベーク積分可能で , $k \rightarrow \infty$ のとき f_k は $[a, b]$ 上のほとんど全ての点で f に収束しているとする . このとき以下を示せ .

(1) 関数列 $g_k := ||f_k| - |f_k - f| - |f||$ は $[a, b]$ 上ほとんど全ての点で 0 に収束する .

(2) 区間 $[a, b]$ 上ほとんど全ての点で $g_k \leq 2|f|, k = 1, 2, \dots$.

(3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f_k(x)| dx - \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \right) = \int_a^b |f(x)| dx$.

[26] (H5 熊本大 1) . \mathbb{R} 上のルベーク積分可能な関数の列 $\{f_n\}$ がルベーク積分可能な関数 f に各点収束するとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |f|(x) dx$$

⁶ 次の (S60 広島大 6) の問題の丸写し , という珍しい出題 . 私がまだ大学院を終えただけの時期の出題なので経緯は知らないが , 出題した教官が移籍したのだろうか . そのことは別にすると , いつ概収束から L^1 収束が言えるか , というのは重要な基礎知識の一つで , 演習を繰り返すに値する .

ならば, $a < b$ を満たす任意の実数の組 a, b に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

であることを示せ.

積分とパラメータに関する微分の順序交換.

[27] (H5 学習院大 6). f は区間 $(0, \infty)$ でルベグ可測で $\int_0^\infty x|f(x)| dx < \infty$ であるとする. このとき

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (\sin tx - tx) f(x) dx = 0$$

であることを証明せよ.

[28] (H5 富山大 BVI). 可測関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が, ある $\delta > 0$ に対して $\int_0^1 |f(x)|^\delta dx < \infty$ を満たすならば,

$$\lim_{p \downarrow 0} \frac{1}{p} \int_0^1 (|f(x)|^p - 1) dx = \int_0^1 \log |f(x)| dx$$

が成り立つことを示せ.

[29] (H4 新潟大 3). f を区間 $(0, \infty)$ でルベグ積分可能な関数とする. $0 \leq t < \infty$ なる t に対して $g(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx$ とおく. このとき次を示せ.

- (1) g は区間 $(0, \infty)$ で連続である.
- (2) g' は区間 $(0, \infty)$ で存在して連続である.

[30] (H10 都立大 11). 関数 $f(x, t)$ は x の関数としては $[0, 1]$ 上でルベグ積分可能であって, t の関数としては (a, b) 上で微分可能とする. $[0, 1]$ 上のルベグ積分可能な関数 ϕ が存在して $[0, 1] \times (a, b)$ 上で $\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq \phi(x)$ を満たすとする. このとき次を示せ.

- (1) $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ は x の関数として可測である.
- (2) ルベグ測度を μ と表すとき,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(x, t) d\mu(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) d\mu(x).$$

[31] (H4 名大 8). 区間 $[0, 1]$ 上の有界な実数値ルベグ可測関数 f に対して

$$g(y) = \log \left(\int_0^1 e^{yf(x)} dx \right), \quad y \in \mathbb{R},$$

とおく.

- (1) g は無限回可微分であることを示せ.
- (2) 全ての $y \in \mathbb{R}$ に対して $g''(y) \geq 0$ であることを示せ.

[32] (H4 富山大 BV) . W を $[0, \infty)$ 上の測度とし, 各 $\lambda > 0$ に対して $\int_0^\infty e^{-\lambda t} W(dt) < \infty$ を仮定する. このとき, 関数 $f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} W(dt)$ ($\lambda > 0$) は $(0, \infty)$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

[33] (H4 上智大 3) . f は $I = [0, \infty)$ 上のルベーク可測関数で $|f|^2$ が I 上ルベーク可積分な関数とする.

(1) $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx$ は $\{t \in \mathbb{C} \mid \Re t > 0\}$ で定義され, そこで正則であることを示せ.

(2) $F(t)$ を $F(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k (t-1)^k$ と表すと

$$|a_k| \leq \frac{((2k)!)^{1/2}}{2^{k+1/2} k!} \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

が成り立つことを示せ.

[34] (S62 阪大 9) . 区間 $[0, L]$ 上で定義された有界な実数値ルベーク可測関数 f と, $0 < \alpha < 1$ を満たす実数 α が与えられている. 次のことを示せ.

(1) $0 < \delta < L$ を満たす任意の実数 δ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_\delta^L \frac{x^\alpha - (x-h)^\alpha}{h} f(x) dx = \int_\delta^L \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} f(x) dx$$

が成り立つ.

(2) 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_0^L \frac{x^\alpha - |x-h|^\alpha}{h} f(x) dx = \int_0^L \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} f(x) dx.$$

Fubini の定理 .

[35] (S61 大阪市大 C1) . ルベーク可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ と閉区間 $(x, x+1)$ との共通部分の測度を $f(x)$ とするとき, 積分 $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$ の値を求めよ. 但し, μ はルベーク測度である.

[36] (H2 広島大 6) .

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間, $f \geq 0$ は Ω 上の \mathcal{F} -可測関数とする. $t > 0$ に対して $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}$ とおくと, 等式 $\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu(\Omega_t) dt$ が成り立つことを, 次の2段階に分けて示せ.

(a) f が単関数のとき.

(b) f が一般のとき.

(2) 区間 $(0, \infty)$ に含まれるルベーク可測集合 E と $0 < \theta < 1$ に対して

$$\int_E s^{-\theta} ds \leq \frac{1}{1-\theta} |E|^{1-\theta}$$

を示せ. ここで $|E|$ は E のルベーク測度を表す.

[37] (S62 山形大 8) . $(X, \mathcal{E}, \mu), (Y, \mathcal{F}, \nu)$ を 2 つの有限測度空間とする . 直積 $X \times Y$ における筒集合⁷を全て要素に持つ集合族が生成する σ 加法族を $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ とする . $x \in X$ と $A \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ に対して $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ とし ,

$$B = \{A \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} \mid (\forall x \in X) A_x \in \mathcal{F} \text{ かつ } \nu(A_x) \text{ は } x \text{ の関数として } \mathcal{E}\text{-可測}\}$$

とする . 次の各問に答えよ .

- (1) 筒集合およびその互いに素な有限和は B の要素である .
- (2) 単調クラス定理⁸を用いて $B = \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ を示せ .
- (3) $A \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ に対して $\tau(A) = \int_X \nu(A_x) \mu(dx)$ とおくと , τ は $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ 上の測度である .
- (4) $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ -可測な $X \times Y$ 上の非負実数値関数 f に対して $\int_{X \times Y} f d\tau = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx)$ となることを示せ (f が定義関数 , 非負単関数 , 非負可測関数について順に示す .)

[38] (S63 岡山大 B1) . \mathbb{R} 上の実数値関数 f に対して $g(x, y) = f(x + y)$ で \mathbb{R}^2 上の実数値関数 g を定義する . このとき次を示せ .

- (1) f がボレル可測関数ならば , g は \mathbb{R}^2 上のボレル可測関数となる .
- (2) f がルベーグ可測関数ならば , g は \mathbb{R}^2 上のルベーグ可測関数となる .

[39] (H7 広島大 6A) . f は区間 $[0, \infty)$ で定義されたルベーグ可積分関数 , g は区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数であり , 有限な極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a$ が存在すると仮定する . $h(x) = \int_0^\infty g(x + y) f(y) dy$ とおくと , 以下に答えよ .

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a \int_0^\infty f(y) dy$ を示せ .
- (2) h は区間 $[0, \infty)$ で一様連続であることを示せ .
- (3) g がルベーグ可積分ならば h もルベーグ可積分であることを示せ .

[40] (H8 富山大 B5) . 区間 $[0, 1]$ 上のルベーグ可積分関数 f, g が , ほとんどすべての x に対して $0 \leq f(x), 0 \leq g(x), 1 \leq f(x)g(x)$ であるとき , 不等式

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

が成り立つことを示せ .

[41] (S62 広島大 6) . f を $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 上の有界なボレル可測関数とする . X に含まれるボレル可測集合 E があって , E のルベーグ測度は 1 , かつ , 全ての $(a, b) \in E$ に対して $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$ が成り立つ (従って , ほとんど全ての点で f は連続) とする . このとき次を示せ .

⁷ $X \times Y$ の部分集合のうちで $E \in \mathcal{E}$ と $F \in \mathcal{F}$ の直積 $E \times F$ になっている集合のこと .

⁸有限加法族 \mathcal{I} が生成する単調族と σ 加法族 (\mathcal{I} を含む最小の単調族と σ 加法族) をそれぞれ $m[\mathcal{I}], \sigma[\mathcal{I}]$ と書くとき $m[\mathcal{I}] = \sigma[\mathcal{I}]$ であるという定理 . 集合族 \mathcal{M} が単調族であるとは , \mathcal{M} の単調増加集合列の極限は全て \mathcal{M} に入り , \mathcal{M} の単調減少集合列の極限は全て \mathcal{M} に入ることをいう .

なお , 上記の代わりに以下の Dynkin の補題を用いる流儀もある . \mathcal{I} が共通部分をとる操作で閉じている集合のとき , \mathcal{I} が生成する d 族 $d[\mathcal{I}]$ は $\sigma[\mathcal{I}]$ に等しい . ここで \mathcal{D} が d 族とは , 全体集合 Ω を含み , $A, B \in \mathcal{D}$ かつ $A \subset B$ ならば $B \setminus A \in \mathcal{D}$, および , \mathcal{D} の単調増加列の極限が \mathcal{D} に入るものを言う .

(1) 各 $x \in [0, 1]$ に対して $E_x = \{y \in [0, 1] \mid (x, y) \in E\}$ とおき, $A = \{x \in [0, 1] \mid \mu(E_x) = 1\}$ とおくと, $\mu(A) = 1$. 但し, μ は区間 $[0, 1]$ 上のルベーク測度である.

(2) 任意の $a \in A$ に対して $\lim_{x \rightarrow a} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 f(a, y) dy$

[42] (H7 都立大 8). \mathbb{R} 上のルベーク測度を μ とするとき, 次の (1) (2) (3) を証明せよ⁹.

(1) f が積分可能関数ならば $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)| d\mu(x) = 0$.

(2) f が有界可測関数, g が積分可能関数であれば $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) d\mu(y)$ は \mathbb{R} 上一様連続である.

(3) μ -可測集合 $A, \mu(A) > 0$, に対して, 集合 $\{x-y \mid x, y \in A\}$ は 0 を内点に持つ.

[43] (S61 広島大 7). 次を示せ.

(1) f, g を \mathbb{R} 上の (ルベーク) 可積分関数とするとき,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

はほとんどいたるところ有限であり, さらに可積分である.

(2) 特に f が有界閉区間 $[a, b]$ の定義関数であれば, $f * g$ は連続関数である.

[44] (H4 京大 6). 次の問 (1) (2) に答えよ.

(1) A, B を \mathbb{R} のルベーク可測集合 (ただし A のルベーク測度は有限), χ_A, χ_B をそれぞれの定義関数とする.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x-y) \chi_B(y) dy$$

がほとんどいたるところ 0 ならば, A または B のルベーク測度は 0 であることを証明せよ.

(2) M を \mathbb{R} のルベーク可測集合で, 0 でない有限なルベーク測度を持つとする. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を \mathbb{R} で稠密な可算集合とする. このとき $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k + M)$ とおくと, 差集合 $\mathbb{R} \setminus Z$ の測度は 0 であることを示せ. 但し, $x_k + M = \{x_k + t \mid t \in M\}$ である.

⁹ルベーク測度の対称性のような項目を作ってそこに置くべきだったか.