19981108;1202;1212;
20080816–19;22–28;
20161214;
服部哲弥
v20161214;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例
4．不定積分と密度

[**1**] (H7 山形大 IX).

(1) m の定義域が σ 加法族であることと m の非負性と $m(\emptyset)=0$ は自明．σ 加法性を示せばよい．A_n, $n\in\mathbf{N}$, を，互いに共通部分を持たないルベーグ可測集合列とするとき，単調収束定理から，

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f(x)\,d\mu(x)=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(x)\,\chi_{A_n}(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\,\chi_{A_n}(x)\,d\mu(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)\,.$$

(2) $F(x+\epsilon)-F(x)=\displaystyle\int_x^{x+\epsilon}f(t)\,d\mu(t)$ について関数族 $f\,\chi_{[x,x+\epsilon]}$, $0<\epsilon<1$, に対して優収束定理を，上限となる可積分関数として f を選んで適用すれば,

$$\lim_{\epsilon\to0}F(x+\epsilon)-F(x)=\lim_{\epsilon\to0}\int_{[0,\infty)}f\,\chi_{[x,x+\epsilon]}\,d\mu=\int_{[0,\infty)}\lim_{\epsilon\to0}f\,\chi_{[x,x+\epsilon]}\,d\mu=0\,.$$

(3) $\epsilon>0$ を任意に固定する．仮定から f が可積分なので,（積分値の積分範囲に関する連続性から,）$\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}f(t)\,d\mu(t)<\frac{1}{2}\epsilon$ となる x_0 が存在する．

(i) 閉区間 $[0,x_0]$ はコンパクトなので，その上の連続関数は一様連続である．したがって，$\delta>0$ が存在して，$x\le x_0$ と $y\le x_0$ が $|x-y|<\delta$ を満たせば $|F(y)-F(x)|<\frac{1}{2}\epsilon$ を満たす.
特に $x_0-\delta<x\le x_0$ ならば $|F(x_0)-F(x)|<\frac{1}{2}\epsilon$.

(ii) $x_0\le x<y$ のとき，F は非負値関数の積分なので非減少だから，(i) を用いて，$0\le F(y)-F(x)=\displaystyle\int_x^y f(t)\,d\mu(t)\le\int_{x_0}^{\infty}f(t)\,d\mu(t)<\frac{1}{2}\epsilon$.

(iii) $x<x_0<y$ かつ $|y-x|<\delta$ のとき，$x>y-\delta>x_0-\delta$ に注意すると，F が非減少であることと (ii) と (i) から，$0\le F(y)-F(x)=F(y)-F(x_0)+F(x_0)-F(x)<\epsilon$.

(i)(ii)(iii) を合わせると，$[0,\infty)$ 上で F が一様連続である．

[**2**] (H2 山形大 7)．$E\in\mathcal{F}$ に対して $m(E)=\int_E|f(x)|\,\mu(dx)$ とおく[1]．f が可積分だから $m(\Omega)<\infty$ なので m は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の有限測度で，積分の定義から $\mu(E)=0$ ならば $m(E)=0$，すなわち，$m\ll\mu$（絶対連続）.
問の結論を否定して，ある $\epsilon>0$ に対して

$$E_n\in\mathcal{F},\ \mu(E_n)<2^{-n},\ \ m(E_n)\ge\epsilon$$

を満たす $E_n\in\mathcal{F}$, $n\in\mathbf{N}$, が存在するとし，$E_0=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$ とおく．測度の単調性と劣加法性から

$$\mu(E_0)\le\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\le2^{1-n},\ \ n\in\mathbf{N}.$$

[1] 以下，伊藤清三「ルベーグ積分入門」定理 18.2 の証明に従う.

よって，$\mu(E_0)=0$ なので $m(E_0)=0$．測度の連続性と単調性から

$$0=m(E_0)=\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)\geq \limsup_{n\to\infty} m(E_n)\geq 0$$

なので $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=0$．これは背理法の仮定 $m(E_n)\geq\epsilon$ に反する．よって問の主張が成り立つ．

[3] (H3 奈良女大 VIII).

(1) f が可測関数なので，ν は $\mathcal{B}$ 上で定義されている．ν の非負性は μ が測度であること（したがって，非負であること）から当然．逆像の定義から $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ だから $\nu(\emptyset)=0$ も μ が測度であることから直接伝搬する．

A_n, $n\in\mathbf{N}$, を，互いに共通部分を持たないボレル集合列とするとき，

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)\in\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)\in A_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

であって，関数は 1 つの ω ごとに 1 つの値 $f(\omega)$ を対応させるので $n\neq m$ ならば $A_n\cap A_m=\emptyset$ の仮定から，$f^{-1}(A_n)\cap f^{-1}(A_m)=\emptyset$．よって μ が測度であること（したがって，σ 加法性を持つこと）から，

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(f^{-1}(A_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n).$$

よって σ 加法性も成り立つ．

ν の非負性から，$x<y$ ならば $F(y)=\nu((-\infty,x])+\nu((x,y])\geq F(x)$ だから非減少．

任意の 0 に収束する正値減少列 $\epsilon_1>\epsilon_2>\cdots\to 0$ に対して，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}((x,x+\epsilon_n))=\emptyset$ だから測度の連続性から $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f^{-1}((x,x+\epsilon_n)))=0$ となるので，$\epsilon>0$ ならば $F(x)\leq F(x+\epsilon)=F(x)+\mu(f^{-1}((x,x+\epsilon)))$ となることと合わせて $\lim\limits_{n\to\infty} F(x+\epsilon_n)=F(x)$．よって F は右連続である．同様に，測度の連続性から，$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ および $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\nu(\mathbf{R})=\mu(\Omega)=1$ が成り立つ．

(2) $A\in\mathcal{F}$ に対して $m(A)=\int_A |f(x)|\,\mu(dx)$ とおく[2]．仮定から $m(\Omega)<\infty$ だから m は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の有限測度で，積分の定義から $\mu(A)=0$ ならば $m(A)=0$，すなわち，$m\ll\mu$（絶対連続）．

問の結論を否定して，ある $\epsilon>0$ に対して

$$A_n\in\mathcal{F},\ \mu(A_n)<2^{-n},\quad |\Phi(A_n)|\geq\epsilon$$

を満たす $A_n\in\mathcal{F}$, $n\in\mathbf{N}$, が存在するとし，$A_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ とおく．測度の単調性と劣加法性から

$$\mu(A_0)\leq\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)\leq 2^{1-n},\quad n\in\mathbf{N}.$$

よって，$\mu(A_0)=0$ なので $m(A_0)=0$．測度の連続性と単調性から

$$0=m(A_0)=\lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)\geq\limsup_{n\to\infty} m(A_n)\geq 0$$

なので $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$．定義から $|\Phi(A)|\leq m(A)$, $A\in\mathcal{F}$，だから $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(A_n)=0$．これは背理法の仮定 $|\Phi(A_n)|\geq\epsilon$ に反する．よって問の主張が成り立つ．

[4] (H1 金沢大 6).

[2] 以下，問 [2] (H2 山形大 7) とほぼ同じ問題なのでほぼ同じ解答．伊藤清三「ルベーグ積分入門」定理 18.2 の証明に従う．

(1) $\delta_x \ll \nu$ とすると，$\delta_x(\{x\}) = 1$ なので $\nu(\{x\}) > 0$ でなければならない．問題で ν は σ–有限と仮定したので，$\nu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$, かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbf{R}$ となる $\mathbf{R}$ のボレル集合の列 $\{X_n\}$ がとれる．各 X_n 内で $\nu(\{x\}) > 0$ となる x は高々可算個[3]なので，$\mathbf{R}$ で $\nu(\{x\}) > 0$ となる x も高々可算個だから，全ての x に対して $\delta_x \ll \nu$ となることはあり得ない．

(2) $\mathbf{R}$ のボレル集合 A が有限集合のとき $\nu(A) = \sharp A$（A の要素の個数），無限集合のとき $\nu(A) = \infty$ とおくと，ν は $\mathbf{R}$ 上のボレル測度である.（σ 加法性も非負値性も明らか.）このとき，$\nu(A) = 0$ となるのは $A = \emptyset$ のときだけで，全ての x に対して $\delta_x(\emptyset) = 0$ となるから，$\delta_x \ll \nu$（というよりも，どんな測度 μ でも $\mu \ll \nu$）．つまり，全ての δ_x が ν に対して絶対連続になる．

[5] (S61 新潟大 2).

(1) $\{x_k\}$ を減少して（i.e., 右側から）x_0 に収束する数列とする．測度の連続性から

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = \lim_{k\to\infty} m([0, x_k]) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} [0, x_k]) = m([0, x_0]) = \mu(x_0).$$

よって右連続である．

後半は，$0 < x_0 < 1$ を任意に決めて，m を $x = x_0$ に集中した単位分布とすると，これは（正の）有限測度で，$\mu = \chi_{[x_0,1]}$ となるから，右連続だが，$x = x_0$ で左連続でない．

(2) 符号付き有限測度は（Jordan 分解によって，非負値の）有限測度の差で書け，連続関数は正の部分と負の部分に分けることによって非負連続関数の差で書けるので，m および μ および f は非負としてよい（ので，以下そう仮定する）．

階段関数 $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{(a_i, b_i]}$ $(a_1 \le b_1 \le a_2 \le \cdots \le b_n)$ について，$a_j < x \le b_j$ に対して

$$G(x) = \int_0^x g(y)\, dm(y) = \sum_{i=1}^{j-1} c_i\, (\mu(b_i) - \mu(a_i)) + c_j\, (\mu(x) - \mu(a_j)),$$

および，$b_j < x \le a_{j+1}$ に対して $G(x)$ は定数

$$G(x) = \int_0^x g(y)\, dm(y) = \sum_{i=1}^{j} c_i\, (\mu(b_i) - \mu(a_i)),$$

だから，μ が連続関数という仮定から，G も連続関数になる．

f が非負値連続関数のとき，$x_0 \in (a, b)$ と $\epsilon > 0$ を任意に固定する．近似非負値階段関数 $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{(a_i, b_i]}$ を，$0 \le g \le f$ およびその積分 $G(x) = \int_0^x g(y)\, dm(y)$ について $0 < F(b) - G(b) < \frac{1}{3}\epsilon$ となるように選ぶ．$f - g \ge 0$ と仮定したので，任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$0 < F(x) - G(x) = F(b) - G(b) - \int_x^b (f(y) - g(y))\, dm(y) < \frac{1}{3}\epsilon.$$

よって $|F(x) - F(x_0)| \le \frac{2}{3}\epsilon + |G(x) - G(x_0)|$ が任意の $x \in [a, b]$ に対して成り立つ．G は連続だから x が十分 x_0 に近ければ $|G(x) - G(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$ とできるので，そのような x に対して $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ となるから，F も連続関数である．

[3] $\nu(X_n) < \infty$ のとき $\nu(\{x\}) > 0$ となる $x \in X_n$ の集合は，測度の大きさで分類することで，$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X_n \mid \nu(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$ に等しいが，$\nu(\{x\}) > \frac{1}{k}$ となる x の個数は $k\nu(X_n)$ 未満しかあり得ないから，特に有限個であり，その可算和は高々可算集合．

[6] (H5 北大 12).

(1) f_n は非負値で，1 点を除いて連続関数なので可測関数だから，単調収束定理から，$+\infty$ を許せば

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

である．さらに f_n は非負値なので,（$+\infty$ を許せば）ルベーグ積分は広義リーマン積分に一致する．すなわち,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= 2^{-n}\int_0^{a_n}(a_n-x)^{-1/2}\,dx + 2^{-n}\int_{a_n}^1 (x-a_n)^{-1/2}\,dx\\ &= 2^{1-n}\Big[-(a_n-x)^{1/2}\Big]_0^{a_n} + 2^{1-n}\Big[(x-a_n)^{1/2}\Big]_{a_n}^1 = 2^{1-n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{1-a_n}).\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{1-a_n}) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-n} = 4$$

だから，積分値は有限であり，すなわち，f はルベーグ積分可能である．

(2) 仮定により a_n たちは互いに異なるから，$\delta>0$ を $(a_k-\delta, a_k+\delta)\cap\{a_1,a_2,\cdots\}=\{a_k\}$ となるようにとることができる．以下 $|x-a_k|<\delta$ とする．

$a_n<a_k$ ならば (1) と同様に,

$$\int_0^x f_n(x)\,dx = 2^{1-n}\Big[-(a_n-x)^{1/2}\Big]_0^{a_n} + 2^{1-n}\Big[(x-a_n)^{1/2}\Big]_{a_n}^x = 2^{1-n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{x-a_n}).$$

$a_n>a_k$ ならば同様の計算で,

$$\int_0^x f_n(x)\,dx = 2^{1-n}\Big[-(a_n-x)^{1/2}\Big]_0^x = 2^{1-n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_n-x}).$$

$n=k$ については，$x\ge a_k$ ならば前者で $n=k$ としたもの，$x\le a_k$ ならば後者で $n=k$ としたもの，がそれぞれ成り立つ．よって，$|x-a_k|<\delta$ のとき,

$$\begin{aligned}F(x)-F(a_k) = &\sum_{n:\ a_n<a_k} 2^{1-n}(\sqrt{x-a_n}-\sqrt{a_k-a_n})\\ &+\sum_{n:\ a_n>a_k} 2^{1-n}(\sqrt{a_n-a_k}-\sqrt{a_n-x}) + \int_0^x f_k(y)\,dy - \int_0^{a_k} f_k(y)\,dy\end{aligned}$$

であって,

$$\int_0^x f_k(y)\,dy - \int_0^{a_k} f_k(y)\,dy = \begin{cases} 2^{1-k}\sqrt{x-a_k}, & a_k+\delta>x>a_k\,,\\ -2^{1-k}\sqrt{a_k-x}, & a_k-\delta<x<a_k\,.\end{cases}$$

$F(x)-F(a_k)$ の右辺の最後の項以外は $x-a_k$ で割って $x\to a_k$ とした極限が存在することは

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a_k}\frac{1}{x-a_k}\sum_{n:\ a_n<a_k} 2^{1-n}(\sqrt{x-a_n}-\sqrt{a_k-a_n})\\ &=\lim_{x\to a_k}\frac{1}{x-a_k}\sum_{n:\ a_n<a_k} 2^{1-n}\frac{x-a_k}{\sqrt{x-a_n}+\sqrt{a_k-a_n}} = \sum_{n:\ a_n<a_k} 2^{-n}\frac{1}{\sqrt{a_k-a_n}} < \delta^{-1}\end{aligned}$$

などによって明らか．他方，最後の項は同様の計算で発散する．よって $F'(a_k)$ は存在しない．

[7] (H4 阪大 8)．先に F が連続であることを示す．実際，$x,y\in[a,b]$ に対して

$$|F_n(y)-F_n(x)| = \left|\int_x^y f_n(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^y |f_n(t)|\,dt\right| \le \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|.$$

$n\to\infty$ として F_n が F に各点収束することを使うと,

$$(*)\qquad |F(y)-F(x)| \le \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|.$$

$y\to x$ とすると，右辺は定積分の積分範囲に関する連続性から 0 に収束するので $\lim_{y\to x}F(y)=F(x)$.

(1) 一様収束しない，すなわち，$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| > 0$ とする．すると，ある $\delta > 0$ と自然数の狭義増加列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ と $[a,b]$ 内の点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ がとれて，

$$(**) \qquad |F_{n_k}(x_k) - F(x_k)| \geq \delta, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

とできる．$[a,b]$ はコンパクト集合なので，$\{x_k\}$ には収束部分列がある．収束部分列を 1 つとって，その極限を $x_0 \in [a,b]$ とする．必要ならば $\{n_k\}$ を取り直すことで，最初から $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ としておく．(**) と F_n の定義から

$$F_{n_k}(x_0) \geq F(x_k) + \delta + \int_{x_k}^{x_0} f_{n_k}(t)\,dt \quad \text{または} \quad F_{n_k}(x_0) \leq F(x_k) - \delta + \int_{x_k}^{x_0} f_{n_k}(t)\,dt.$$

F の連続性の証明と同様に $\left|\int_{x_k}^{x_0} f_{n_k}(t)\,dt\right| \leq \left|\int_{x_k}^{x_0} f(t)\,dt\right|$ から $\lim_{k\to\infty} \int_{x_k}^{x_0} f_{n_k}(t)\,dt = 0$．また F_n が F に各点収束することから $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x_0) = F(x_0)$．さらに F が連続であることと $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ を使うと，

$$F(x_0) \geq F(x_0) + \delta \quad \text{または} \quad F(x_0) \leq F(x_0) - \delta.$$

これは矛盾である．よって F_n は F に一様収束する．

(2) $\epsilon > 0$ と $[a,b]$ 内の点列 $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < \cdots \leq b$ を任意にとる．(*) から，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt \leq \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]} f(t)\,dt.$$

ボレル集合 $A \subset [a,b]$ に対して $m(A) = \int_A f(t)\,dt$ とおくと，積分の定義から m は（ルベーグ測度に関して）絶対連続な測度である．よって[4]，$\delta > 0$ が存在して $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$ ならば $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]) < \epsilon$，したがって，$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$ を得る．すなわち，F は絶対連続関数である．

[8] (H5 東工大 2)．まず，$V_\alpha[\triangle]$ は隣り合う分点間の f の値の差の絶対値の和なので，分点を挿入すると非減少．したがって分割に関する上限 V_α は，分割の幅が 0 になる極限で得られる．

次に，関数 f が単調な区間では分点を増やしても $V_\alpha[\triangle]$ は変わらないから，V_α は $f_\alpha(1)$ および $(0,1)$ 内の隣り合う極大値と極小値の差の和に等しい．実際，$(0,1)$ 内の極値を与える点を $1 > x_1 > x_2 > \cdots > 0$ として，

$$V_\alpha^* := f_\alpha(1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_\alpha(x_n)|$$

とおくと，具体的な関数形から極大値は正で極小値は負と分かることに注意すれば，$\triangle_n:\ 0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < 1$ に対して明らかに $\lim_{n\to\infty} V_\alpha[\triangle_n] = V_\alpha^*$ なので $V_\alpha^* \leq V_\alpha$ であり，他方，最初に注意したように，分割を細分すると変動は非減少なので，V_α は $\triangle_n$ の細分によって極限として得られるが，既に注意したように，$1 > x_1 > x_2 > \cdots > 0$ を細分しても，(x_n, x_{n+1}) で f が単調なので，変動は増えないから，$V_\alpha^* = V_\alpha$ を得る[5]．

(1) $\epsilon > 0$ と $[0,1]$ の分割 $\triangle$ に対して $V_\alpha[\triangle;\epsilon] = \sum_{\nu;\ \nu>\epsilon} |f_\alpha(a_\nu) - f_\alpha(a_{\nu-1})|$ とおく．平均値の定理から $0 = a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n = 1$ なる b_i たちが存在して，

$$V_\alpha[\triangle;\epsilon] = \sum_{\nu:\ \nu>\epsilon}^{n} |f_\alpha'(b_\nu)|(a_\nu - a_{\nu-1}).$$

[4]問 [3] (H2 山形大 7) または 問 [2](2) (H3 奈良女大 VIII) 参照．

[5]原点を除けば積分表示があることは解答のとおり，容易．V_α をボレル集合上の集合関数に拡張して変動を定義し，有限性 $V_\alpha < \infty$ の（題意の）下で変動が σ 加法性を持つこと（加法的集合関数）を既知とすれば，積分範囲についての極限をとることで問題の主張を得ると思うが，ここでは $V_\alpha = V_\alpha^*$ というあらわな表示を用いて直接原点での連続性を証明する．

これは $f'_\alpha(x)$ のリーマン和である．$[\epsilon, 1]$ 上で $|f'_\alpha(x)|$ は非負値連続関数だから，リーマン和は分割幅が 0 に近づく極限でリーマン積分 $\int_\epsilon^1 |f'_\alpha(x)|\,dx$ に収束する．一方,（冒頭の注意のとおり）$V_\alpha[\triangle;\epsilon]$ の上限 $V_\alpha(\epsilon)$ は分割幅が 0 になる極限で得られるので，$V_\alpha(\epsilon) = \int_\epsilon^1 |f'_\alpha(x)|\,dx$.
冒頭の x_n を用いて $\epsilon = x_n$ とおけば，冒頭に注意したことと合わせて

$$V_\alpha = V_\alpha^* = \lim_{n\to\infty} V_\alpha[\triangle_n] = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^1 |f'_\alpha(x)|\,dx = \int_0^1 |f'_\alpha(x)|\,dx.$$

(2) 求める下限を α^* とおく．$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ なので，$\alpha > 1$ のとき，(1) から，

$$V_\alpha = \int_0^1 |f'_\alpha(x)|\,dx \le \int_0^1 (\alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2})\,dx \le 1 + \frac{1}{\alpha-1} < \infty.$$

よって $\alpha^* \le 1$.
$f'_\alpha(x)$ の極値を与える点 x_n たちは $f'_\alpha(x) = 0$ の解，すなわち，$\tan\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\alpha x_n}$ の解．したがって，必要に応じて添字 n をずらせば,

$$\frac{1}{x_n} = (n+\frac{1}{2})\pi - o(1), \quad f_\alpha(x_n) = ((n+\frac{1}{2})\pi - o(1))^{-\alpha}(-1)^n \cos o(1)$$

$0 < \alpha < 1$ のとき，冒頭に書いたことから,

$$V_\alpha = V_\alpha^* \ge 2\sum_n |f_\alpha(x_n)| = 2\sum_n ((n+\frac{1}{2})\pi - o(1))^{-\alpha} \cos o(1) = 2\sum_n \frac{1+o(1)}{(n\pi)^\alpha} = \infty.$$

よって $\alpha^* \ge 1$．以上から $\alpha^* = 1$.

[9] (H3 東工大 8).

(1) 同値関係であることの証明は，$A\triangle A = 0$ と $A\triangle B = B\triangle A$ から反射律 $A\sim A$ と対称律 $A\sim B \Rightarrow B\sim A$ が得られるから，推移律を証明すればよい．$x\in A\triangle C$ ならば $x\in A$ かつ $x\notin C$ か，さもなければ，$x\in C$ かつ $x\notin A$．いま，前者だとして，さらに $x\notin B$ ならば $x\in A\triangle B$ だし，$x\in B$ ならば $x\in B\triangle C$ だから $A - C\subset (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$．$C - A$ も同様だから,

$$(*) \qquad A\triangle C \subset (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$$

を得る．特に $\mu(A\triangle B) = \mu(B\triangle C) = 0$ ならば，$\mu(A\triangle C) \le \mu(A\triangle B) + \mu(B\triangle C) = 0$．よって $A\sim C$ となり推移律が証明された.
d が距離になるとは，その値が代表元によらないこと，非負値，対称で，0 になるのは同一点に限ること，および三角不等式の成立をいうのであった．非負値対称なことは明らか．$\mu(A\triangle B) = 0$ ならば $A\sim B$ だから $d([A],[B]) = 0$ ならば $[A] = [B]$ も当然．代表点によらないことを言うには（対称性が先に分かるので）$B\sim B'$ のとき $\mu(A\triangle B) = \mu(A\triangle B')$ であることを言えばよいが，推移律の証明でみたように $A\triangle B' \subset (A\triangle B)\cup(B\triangle B')$ および，B と B' を入れ替えた式が成り立つので,

$$\mu(A\triangle B') \le \mu(A\triangle B) + \mu(B\triangle B') = \mu(A\triangle B) \quad \text{および } B \text{ と } B' \text{ を入れ替えた} \quad \mu(A\triangle B) \le \mu(A\triangle B'$$

が成り立つことから，言える．最後に三角不等式は，推移律の証明でみたように，$\mu(A\triangle C) \le \mu(A\triangle B) + \mu(B\triangle C)$ から $d([A],[C]) \le d([A],[B]) + d([B],[C])$ が任意の A, B, C に対して成り立つ.

(2) まず，同値類 $[A]$ は和集合 $\cup$ や共通部分 $\cap$ と整合していることに注意する．実際 $A'\in[A]$，$B'\in[B]$ とすると,

$$(A\cap B)\setminus(A'\cap B') = (A\cap B\cap A'^c)\cup(A\cap B\cap B'^c) \subset (A\setminus A')\cup(B\setminus B') \subset (A\triangle A')\cup(B\triangle B'),$$
$$(A\cup B)\setminus(A'\cup B') = (A\cap A'^c\cap B'^c)\cup(B\cap A'^c\cap B'^c) \subset (A\triangle A')\cup(B\triangle B'),$$

から，

$$\mu((A\cap B)\triangle(A'\cap B'))\le\mu(A\triangle A')+\mu(B\triangle B')=0,$$
$$\mu((A\cup B)\triangle(A'\cup B'))\le\mu(A\triangle A')+\mu(B\triangle B')=0,$$

を得て， $A\cap B\sim A'\cap B'$, $A\cup B\sim A'\cup B'$, すなわち，$[A\cap B]$, $[A\cup B]$ は（代表元の取り方によらず）$[A]$, $[B]$ で決まる．(以上の議論は，表示の見やすさのために 2 個の集合で示したが，和や共通部分をとる集合の個数によらない.）

$A_n\in\mathcal{B}$, $n=1,2,3,\cdots$, が $d([A_n],[A_m])\to 0$, $n,m\to\infty$ を満たすとする．$d([A_{n_k}],[A_{n_{k+1}}])\le 2^{-k}$, $k\in\mathbf{N}$, となるように部分列 $\{n_k\}$ をとる．すなわち，$\mu(A_{n_k}\triangle A_{n_{k+1}})\le 2^{-k}$, $k\in\mathbf{N}$. $B_k=\displaystyle\bigcup_{i=k}^{\infty}(A_{n_i}\triangle A_{n_{i+1}})$ とおけば $\mu(B_k)<2^{1-k}$ であって，(*) から，$i>j\ge k$ に対して

$$A_{n_j}\triangle A_{n_i}\subset\bigcup_{\ell=j}^{i-1}A_{n_\ell}\triangle A_{n_{\ell+1}}\subset B_j\subset B_k\,.$$

$A=\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcap_{k=\ell}^{\infty}A_{n_k}$ とおくと，$i\in\mathbf{N}$ に対して

$$A_{n_i}\setminus A=A_{n_i}\cap\bigcap_{\ell=1}^{\infty}\bigcup_{k=\ell}^{\infty}A_{n_k}^c\subset A_{n_i}\cap\bigcup_{k=i+1}^{\infty}A_{n_k}^c\subset\bigcup_{k=i+1}^{\infty}(A_{n_i}\triangle A_{n_k})\subset B_i$$

および

$$A\setminus A_{n_i}=\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=\ell}^{\infty}A_{n_k}\cap A_{n_i}^c\right)=\bigcup_{\ell=i+1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=\ell}^{\infty}A_{n_k}\cap A_{n_i}^c\right)\subset\bigcup_{\ell=i+1}^{\infty}(A_{n_\ell}\triangle A_{n_i})\subset B_i$$

だから，$d([A_{n_i}],[A])=\mu(A_{n_i}\triangle A)\le\mu(B_i)\le 2^{1-i}$. $\{[A_n]\}$ が d に関してコーシー列をなすとしたから，任意の $\epsilon>0$ に対して n_0 が存在して，$n,m>n_0$ ならば $d([A_n],[A_m])<\epsilon/2$ とできる．i を十分大きくとれば $m=n_i>n_0$ となるから，

$$d([A_n],[A])\le d([A_n],[A_{n_i}])+d([A_{n_i}],[A])<\frac{1}{2}\epsilon+2^{1-i},\quad n>n_0\,,$$

となるが，i は任意に大きくとれるので $2^{1-i}<\epsilon/2$ となるように選べば $d([A_n],[A])<\epsilon$, $n>n_0$, を得る．すなわち，$[A_n]$ は d に関して $[A]$ に収束する．

(3) $[0,1]$ のボレル集合は d に関して開集合列で近似でき，$[0,1]$ の開集合は可算個の開区間の和集合で表せ，開区間は有理数を端点とする開区間列で近似できるので，$[0,1]$ の開区間で有理数を端点とするもの（可算個）の有限和集合を全て集めた集合族（可算集合族）は $[0,1]$ の任意のボレル集合と d に関して距離 0 である．すなわち， $(\mathcal{B},d)$ は可分である．

[10] (H1 都立大 6).

(1) Jordan 分解によって，$\mu\in\mathcal{M}$ に対して，有限測度 μ_+ と μ_- が存在して $\mu=\mu_+-\mu_-$ となる．
σ 加法性は，積分範囲に関する σ 加法性から明らか．全変動の有限性は，$\mu,\nu\in\mathcal{M}$ に対して $\mu=\mu_+-\mu_-$ と $\nu=\nu_+-\nu_-$ を Jordan 分解とすると，$E\in\mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}&(\mu*\nu)(E)\\&=\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+y\in E\}}d\mu_+(x)\,d\nu_+(y)+\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+y\in E\}}d\mu_-(x)\,d\nu_-(y)\\&\quad-\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+y\in E\}}d\mu_+(x)\,d\nu_-(y)-\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+y\in E\}}d\mu_-(x)\,d\nu_+(y)\end{aligned}$$

だから，

$$\|\mu*\nu\|=\mu_+(\mathbf{R})\nu_+(\mathbf{R})+\mu_-(\mathbf{R})\nu_-(\mathbf{R})+\mu_+(\mathbf{R})\nu_-(\mathbf{R})+\mu_-(\mathbf{R})\nu_+(\mathbf{R})=\|\mu\|\|\nu\|<\infty.$$

よって $\mu*\nu\in\mathcal{M}$.

(2) （$\|\cdot\|$ が距離を定義することは,

$$0 = \|\mu-\nu\| = (\mu-\nu)_+(\mathbf{R}) + (\mu-\nu)_-(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \mu(E)-\nu(E)=0,\ E\in\mathcal{B},$$
$$\|\mu-\nu\| = (\mu-\nu)_+(\mathbf{R}) + (\mu-\nu)_-(\mathbf{R}) = (\nu-\mu)_-(\mathbf{R}) + (\nu-\mu)_+(\mathbf{R}) = \|\nu-\mu\|,$$
$$\sum_i |\mu(E_i)-\nu(E_i)| \le \sum_i |\mu(E_i)-\lambda(E_i)| + \sum_i |\lambda(E_i)-\nu(E_i)| \quad \therefore\ \|\mu-\nu\| \le \|\mu-\lambda\| + \|\lambda-\nu\|,$$

から分かる.）

(i) 全変動の定義から特に任意のボレル集合 E に対して

$$|\mu_n(E)-\mu_m(E)| \le |\mu_n(E)-\mu_m(E)| + |\mu_n(E^c)-\mu_m(E^c)| \le \|\mu_n-\mu_m\|$$

なので，題意から $\{\mu_n(E)\}$ は $\mathbf{R}$ のコーシー列になり，極限が存在する．極限が定義する集合関数を $\mu:\ \mathcal{B}\to\mathbf{R}$ とおく：

$$(*) \qquad \mu(E) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(E), \quad E\in\mathcal{B}.$$

(ii) 有限加法性は μ_n の加法性からすぐ分かる．すなわち，$E_1, E_2\in\mathcal{M}$; $E_1\cap E_2=\emptyset$ に対して

$$\mu(E_1\cup E_2) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(E_1\cup E_2) = \lim_{n\to\infty}(\mu_n(E_1)+\mu_n(E_2)) = \mu(E_1)+\mu(E_2).$$

(iii) 題意と三角不等式 $|\|\mu\|-\|\nu\|| \le \|\mu-\nu\|$ から，$\{\|\mu_n\|\}$ は $\mathbf{R}$ のコーシー列となり，極限 $M := \lim_{n\to\infty}\|\mu_n\|$ が存在する．したがって，$\mathbf{R}$ のボレル集合列による分割 $\bigcup_{i=1}^N E_i = \mathbf{R}$; $E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\ne j$, に対して,

$$\sum_{i=1}^N |\mu(E_i)| = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^N |\mu_n(E_i)| \le \lim_{n\to\infty}\|\mu_n\| = M.$$

よって極限集合関数 μ の全変動は有限.

(iv) 次に，$\lim_{n\to\infty}\|\mu-\mu_n\|=0$ を言う．実際，$\{\mu_n\}$ が全変動の定義する距離に関してコーシー列をなすから，任意の $\epsilon>0$ に対して n_0 が存在して，$m,n\ge n_0$ ならば $\|\mu_n-\mu_m\|\le\epsilon$．(*) から，$n\ge n_0$ ならば，$\mathbf{R}$ の分割 $\{E_i\}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^N |\mu(E_i)-\mu_n(E_i)| = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^N |\mu_m(E_i)-\mu_n(E_i)| \le \lim_{m\to\infty}\|\mu_m-\mu_n\| \le \epsilon.$$

分割に関する上限をとって $\|\mu-\mu_n\|\le\epsilon$ となるから，$\lim_{n\to\infty}\|\mu-\mu_n\|=0$ を得る.

(v) 最後に μ の σ–加法性が言えれば $\mu\in\mathcal{M}$ の証明が終了し，問題の主張の証明が終わる．$E=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$; $E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\ne j$, とする．μ の加法性 (ii)，三角不等式,

$$\begin{aligned}|\mu(E)-\sum_{j=1}^N\mu(E_j)| &= |\mu(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j)| \le |\mu_n(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j)| + |\mu(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j) - \mu_n(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j)| \\ &\le |\mu_n(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j)| + \|\mu-\mu_n\|.\end{aligned}$$

さらに，μ_n の σ–加法性から $\lim_{N\to\infty}\mu_n(\bigcup_{j=N+1}^\infty E_j) = \mu_n(E) - \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N\mu_n(E_j) = 0$ なので

$$\limsup_{N\to\infty}|\mu(E)-\sum_{j=1}^N\mu(E_j)| \le \|\mu-\mu_n\|.$$

左辺は n によらないので (iv) から 0 である：$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N\mu(E_j)=\mu(E)$，すなわち，$\sigma$–加法性が成り立つ.

(3) $\mu = \mu_+ - \mu_-$ を μ の Jordan 分解とすると,

$$|f(x)| \le \int |e^{\sqrt{-1}\xi x}|\, d\mu_+(\xi) + \int |e^{\sqrt{-1}\xi x}|\, d\mu_-(\xi) = \mu_+(\mathbf{R}) + \mu_-(\mathbf{R}) = \|\mu\| < \infty$$

だから f は有界. さらに,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le 2\int |\sin\frac{(x-y)\xi}{2}|\, d\mu_+(\xi) + 2\int |\sin\frac{(x-y)\xi}{2}|\, d\mu_-(\xi)\\ &\le 2\int \min\{|\frac{1}{2}(x-y)\xi|, 1\}\, d\mu_+(\xi) + 2\int \min\{|\frac{1}{2}(x-y)\xi|, 1\}\, d\mu_-(\xi)\end{aligned}$$

において, $\mu_\pm$ は題意によって有限測度だから, 任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して $K > 0$ が存在して,

$$\mu_\pm([-K, K]^c) < \frac{1}{8}\epsilon.$$

よって, $|x - y| < \dfrac{\epsilon}{4K\max\{\mu_+([-K,K]), \mu_-([-K,K])\}}$ ならば,

$$\begin{aligned}&|f(x) - f(y)|\\ &\le 2\int_{-K}^{K} |\frac{1}{2}(x-y)\xi|\, d\mu_+(\xi) + 2\mu_+([-K,K]^c) + 2\int_{-K}^{K} |\frac{1}{2}(x-y)\xi|\, d\mu_-(\xi) + 2\mu_-([-K,K]^c)\\ &\le |x-y|K\mu_+([-K,K]) + 2\mu_+([-K,K]^c) * |x-y|K\mu_-([-K,K]) + 2\mu_-([-K,K]^c) \le \epsilon\end{aligned}$$

となるので, 一様連続.

[11] (H5 岡山大 B1). 問題文の主張の式の左辺が存在するとき, その値を α とし, $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ とおく:

$$(*) \qquad \alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dx = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

部分積分により,

$$(**) \qquad \begin{aligned} x\int_x^L \frac{f(t)}{t^2}\, dt &= x\int_x^L \frac{(tF(t))'}{t^2}\, dt = x\left[tF(t)\frac{1}{t^2}\right]_x^L + x\int_x^L 2tF(t)\frac{1}{t^3}\, dt\\ &= \frac{x}{L}F(L) - F(x) + 2x\int_x^L F(t)\frac{1}{t^2}\, dt.\end{aligned}$$

f が非負なので F も非負だから, $\displaystyle\int_x^L \frac{F(t)}{t^2}\, dt$ は L について非減少. 他方, (*) から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して x_0 が存在して $t \ge x_0$ ならば $|F(t) - \alpha| \le \epsilon$ とできるので, $L \ge x_0$ のとき

$$0 \le \int_{x_0}^L \frac{F(t)}{t^2}\, dt \le (\alpha + \epsilon)\int_{x_0}^L \frac{dt}{t^2} = (\alpha+\epsilon)\,(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{L}) \le \frac{\alpha+\epsilon}{x_0}$$

だから $\displaystyle\int_x^L \frac{F(t)}{t^2}\, dt$ は L について有界. よって, $\displaystyle\int_x^\infty \frac{F(t)}{t^2}\, dt = \lim_{L\to\infty}\int_x^L \frac{F(t)}{t^2}\, dt$ が存在する. よって, (**) について $L \to \infty$ 極限が存在して,

$$(***) \qquad x\int_x^\infty \frac{f(t)}{t^2}\, dt = \lim_{L\to\infty} x\int_x^L \frac{f(t)}{t^2}\, dt = -F(x) + 2x\int_x^\infty F(t)\frac{1}{t^2}\, dt.$$

さらに, (*) から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して x_0 が存在して $t \ge x_0$ ならば $|F(t) - \alpha| \le \epsilon$ とできるので, $x \ge x_0$ ならば

$$\left|x\int_x^\infty F(t)\frac{1}{t^2}\, dt - \alpha\right| = \left|x\int_x^\infty F(t)\frac{1}{t^2}\, dt - \alpha x\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}\right| \le x\int_x^\infty |F(t) - \alpha|\frac{1}{t^2}\, dt \le \epsilon x\frac{1}{x} = \epsilon.$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty F(t)\frac{1}{t^2}\, dt = \alpha$. これと (***) から, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{f(t)}{t^2}\, dt = -\alpha + 2\alpha = \alpha$. すなわち, 問題の主張が成り立つ.

次に，問題文の主張の右辺を $G(x)=x\int_x^{\infty}\frac{f(t)}{t^2}\,dt$ とおく．$f(x)=-x^2(\frac{1}{x}G(x))'=G(x)-xG'(x)$ だから，部分積分により，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt&=\frac{1}{x}\int_1^x G(t)\,dt-\frac{1}{x}\int_1^x tG'(t)\,dt\\&=\frac{1}{x}\int_1^x G(t)\,dt-\frac{1}{x}\left([tG'(t)]_1^x-\int_1^x G(t)\,dt\right)=\frac{2}{x}\int_1^x G(t)\,dt-G(x)+\frac{1}{x}G(1)\end{aligned}$$

$\lim_{x\to\infty}G(x)$ が存在するならば，右辺の $x\to\infty$ 極限が存在して，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}G(x)$ すなわち，問題の主張が成り立つ．

[12] (H7 東北大 9).

(1) m_F の非負値性と恒等的に無限大ではないことは μ が測度であることから明らか．σ 加法性を証明すればよいが，

$$m_F(\sum_{n=1}^{\infty}A_k)=\mu(\sum_{n=1}^{\infty}F^{-1}(A_k))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F^{-1}(A_k))=\sum_{n=1}^{\infty}m_F(A_k)\,,$$

によって証明できる．

(2) f が（いったん連続関数という条件をはずして）区間 $(0,a]$ の定義関数 $f=\chi_{(0,a]}$ のときを考える．積分の定義と F の具体形から

$$\int\chi_{(0,a]}(t)\,dm_F(t)=m_F((0,a])=\mu(F^{-1}((0,a]))=\begin{cases}\mu((0,a^2])=a^2, & 0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\\ \mu((0,\frac{1}{2}])=\frac{1}{2}\,, & \frac{1}{\sqrt{2}}\le a<1,\\ \mu((0,1])=1, & a=1.\end{cases}$$

よって,（f が定義関数，階段関数，非負可測関数，と順次拡張して，連続関数の場合までいたるいつもの道筋で,）連続関数 f に対して

$$\begin{aligned}\int f(t)\,dm_F(t)&=\int_0^{1/2}f(F(x))d\mu(x)+\mu((\frac{1}{2},1])\,f(1)=\int_0^{1/2}f(\sqrt{x})dx+\frac{1}{2}\,f(1)\\&=2\int_0^{1/\sqrt{2}}f(t)t\,dt+\frac{1}{2}\,f(1).\end{aligned}$$

最後の変形は $x=t^2$ として通常のリーマン積分の変数変換の公式を用いた．

[13] (H4 大阪市大 D1). f が $G\in\mathcal{G}$ の定義関数 $f=\chi_G$ のとき，

$$\int_{\Omega'}f(y)\,d\nu(y)=\nu(G)=\mu(t^{-1}(G))=\int_{\Omega}\chi_G(t(x))\,d\mu(x)=\int_{\Omega}f(t(x))\,d\mu(x)$$

となって，成り立つ．あとは，積分の定義のいつもの手順で，線形結合をとることで階段関数の場合も成り立ち，極限をとることで非負可測関数の場合も成り立つ．

[14] (H4 東工大 1). $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$ が $\mathcal{A}$ 上の σ–有限測度とすると，積分の定義から $\mu(A)=0$ ならば $\nu(A)=0$ なので，Radon–Nikodým の定理から $\nu(A)=\int_A g\,d\mu,\ A\in\mathcal{A},$ を満たす非負値 $\mathcal{A}$–可測関数 $g:\ \Omega\to\mathbf{R}_+$ が存在するので，$\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu,\ A\in\mathcal{A},$ が成り立つ．

逆に，$\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu,\ A\in\mathcal{A},$ を満たす非負値 $\mathcal{A}$–可測関数 $g:\ \Omega\to\mathbf{R}_+$ があるとすると，

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu=\int_A g\,d\mu,\quad A\in\mathcal{A},$$

が成り立つ．f が非負値なので ν が非負集合関数であることはわかり，積分の積分範囲に関する σ 加法性から ν の σ 加法性が分かるので，ν は測度である．$k \in \mathbf{N}$ に対して $A_k = \{\omega \in \Omega \mid 0 \le g(\omega) \le k\}$ とおくと，$A_k \in \mathcal{A}$ かつ $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$ であって，

$$\nu(A_k) = \int_{A_k} g\,d\mu \le k\mu(A_k)$$

であり，μ が有限測度なので $\nu(A_k) < \infty$ だから，ν は σ–有限である．

[15] (H4 東女大 7)．題意から $\mathcal{B}$ は

$$\mathcal{A} := \{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \mid B_i \in \{A_i, A_i^c\},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

なる（空集合があるかもしれないので最大 2^n 個の要素からなる）集合族を根元事象とする σ 加法族である．すなわち，$\mathcal{A}$ の要素は互いに排反で，$\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \Omega$ であり，$\mathcal{B}$ は $A \in \mathcal{A}$ たちのあらゆる和集合全体からなる集合族である．

条件付き期待値 $Y = \mathrm{E}[\,X \mid \mathcal{B}\,]$ とは $\mathcal{B}$–可測関数であって，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $\displaystyle\int_B X\,dP = \int_B Y\,dP$ を満たすものを言う．$\mathcal{B}$–可測関数なので，特に各 $A \in \mathcal{A}$ 上への制限 $Y|_A:\ A \to \mathbf{R}$ は定数だから，$A \in \mathcal{A}$ が $P(A) \ne 0$ を満たせば，

$$(*) \qquad Y(\omega) = \frac{1}{P(A)} \int_A X\,dP, \quad \omega \in A.$$

ここで，A_i たちは確率正なので $A \in \mathcal{A}$ は空集合でなければ確率正であることに注意．また，題意から X は平均値有限，すなわち積分可能としたので，(*) は実数値である．$\mathcal{A}$ の要素は互いに排反で $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \Omega$ なので，(*) は $Y = \mathrm{E}[\,X \mid \mathcal{B}\,]$ を一意的に定める．すなわち，(*) で定まる確率変数 Y が求める条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,X \mid \mathcal{B}\,]$ である．