20050208–10;12;
20080827–0916;
20180322;
20191023;25;1229;
20200325;0515;0820
服部哲弥
v20200820;

大学院入学試験問題（測度論）解答例
5．収束定理 (2)．

[1] (H1 東工大 8)．$\Omega=[0,1]$ 上のルベーグ測度が定義する確率空間上の確率変数 $X(w)=w^{-1/3}$ の期待値は $\mathrm{E}[\,X\,]=\displaystyle\int_0^1 w^{-1/3}\,dw=\frac{3}{2}$ で，直積測度に関して，各成分への射影関数は独立だから，大数の法則から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N w_i^{-1/3}=\mathrm{E}[\,X\,]=\frac{3}{2}$, a.e.. すなわち，

$$(\forall\epsilon>0)\ \ \mathrm{P}[\bigcup_{N_0\geqq 1}\bigcap_{N\geqq N_0}\{(w_1,\cdots,w_N)\in\Omega^N\mid\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N w_i^{-1/3}-\frac{3}{2}\right|<\epsilon\}\,]=1.$$

したがって[1]

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}[\,\{(w_1,\cdots,w_N)\in\Omega^N\mid\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N w_i^{-1/3}<\frac{3}{2}+\epsilon\}\,]\\ &\geqq\lim_{N_0\to\infty}\mathrm{P}[\bigcap_{N\geqq N_0}\{(w_1,\cdots,w_N)\in\Omega^N\mid\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N w_i^{-1/3}<\frac{3}{2}+\epsilon\}\,]=1.\end{aligned}$$

$\epsilon=98.5>0$ とおけば主張を得る．

[2] (H9 大阪市大 D3)．任意の $k>0$ と $L>0$ に対して，仮定とチェビシェフの不等式から

$$C\geqq\mathrm{E}[\,|X_n|\,]\geqq\frac{2^{n/k}}{L}\mathrm{P}[\,|X_n|\geqq\frac{2^{n/k}}{L}\,]$$

だから $\mathrm{P}[\,|X_n|\geqq\dfrac{2^{n/k}}{L}\,]\leqq 2^{-n/k}LC$．よって特に，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\mathrm{P}[\,|X_n|\geqq\frac{2^{n/k}}{L}\,]<\infty$ だから，Borel–Cantelli の定理から，$\displaystyle\mathrm{P}[\bigcap_{N_0=1}^\infty\bigcup_{n=N_0}^\infty\{|X_n|\geqq\frac{2^{n/k}}{L}\}\,]=0$. 補集合を考えて，$\displaystyle\mathrm{P}[\bigcup_{N_0=1}^\infty\bigcap_{n=N_0}^\infty\{|X_n|<\frac{2^{n/k}}{L}\}\,]=1$. 任意の L で成り立つから $L\to\infty$ として確率の連続性を使えば,

$$\begin{aligned}1&=\lim_{L\to\infty}\mathrm{P}[\bigcup_{N_0=1}^\infty\bigcap_{n=N_0}^\infty\{|X_n|<\frac{2^{n/k}}{L}\}\,]=\mathrm{P}[\bigcap_{L=1}^\infty\bigcup_{N_0=1}^\infty\bigcap_{n=N_0}^\infty\{2^{-n/k}|X_n|<\frac{1}{L}\}\,]\\ &=\mathrm{P}[\,\lim_{n\to\infty}2^{-n/k}|X_n|=0\,]\end{aligned}$$

が，任意の $k=1,2,\cdots$ に対して成り立つので，主張が言えた．

[3] (H1 名大 3)．言えない．$j=0,1,\cdots,2^k-1$, $k=0,1,2,\cdots$ に対して

$$f_{2^k+j}(x)=\begin{cases}1, & j\cdot 2^{-k}\leqq x<(j+1)\cdot 2^{-k},\\ 0, & \text{それ以外},\end{cases}$$

[1] 次の不等式は，概収束すれば弱収束する，という事実の証明．

で関数列 $\{f_n\}$ を定義すると，これは実変数実数値の可測可積分かつ非負な関数列で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0$ を満たすが，$0<x<1$ のとき数列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ は 0 と 1 両方の値とも無限回とるので収束しない．特に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ は $0<x<1$ で成り立たない．

[4] (H1 大阪市大 D1).

(1) 単調収束定理から

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|^2\Big] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}[\,|X_n|^2\,] < \infty$$

だから，確率 1 で $\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|^2 < \infty$ となるから，特に,（これが成り立っている集合上で，従って）確率 1 で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|X_n| = 0$ となる．

(2) 最初の仮定で $n=k^2$ と置くことで $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{E}[\,X_{k^2}^2\,] \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty$ となって収束するから，前小問と同様に確率 1 で $\displaystyle\lim_{k\to\infty}|X_{k^2}| = 0$（部分列の収束）.

一般の自然数 n に対して $k^2 \leqq n < (k+1)^2$ となる自然数 k を取ると $|X_n| \leqq |X_{k^2}| + |X_{k^2} - X_n|$ において後の仮定から

$$\begin{aligned}|X_{k^2} - X_n| &\leqq \sum_{i=k^2}^{n-1}|X_{i+1}-X_i| \leqq \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i} \leqq \frac{2k+1}{k^2}\\ &\leqq \frac{2}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{(\sqrt{n}-1)^2}\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = 0$, a.e., を得る．

[5] (H2 大阪市大 D2). 仮定から $\displaystyle\sup_{n\geqq 1} n^{1+\epsilon}\mathrm{E}[\,|X_n|\,] = M$ なる実数 $M>0$ が存在するから，$n \geqq 1$ のとき $\mathrm{E}[\,|X_n|\,] \leqq Mn^{-1-\epsilon}$ が成り立つ．単調収束定理と合わせると

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\,\Big] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}[\,|X_n|\,] \leqq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty.$$

よって $\displaystyle\mathrm{P}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}|X_n| < \infty\,\Big] = 1$ だから，特に (*) が従う．

後半は，$\Omega=[0,1]$ の上のルベーグ測度を確率空間として，$j=0,1,\cdots,2^k-1$, $k=0,1,2,\cdots$ に対して

$$X_{2^k+j}(x) = \begin{cases} 1, & j\cdot 2^{-k} \leqq x < (j+1)\cdot 2^{-k},\\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

で関数列 $\{X_n\}$ を定義すると，$\mathrm{E}[\,|X_{2^k+j}|\,] = 2^{-k} \leqq \dfrac{2}{2^k+j}$ なので，$\displaystyle\sup_{n\geqq 1} n\mathrm{E}[\,|X_n|\,] \leqq 2 < \infty$ だが，数列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ は $(0,1)$ の各点で 0 と 1 両方の値とも無限回とるので収束しない．特に，(*) は満たさない．

[6] (H4 学習院大 6). まず，三角不等式と (ii) から $|g(x)|-M \leqq |g_n(x)|-M+|g(x)-g_n(x)| \leqq |g_n(x)-g(x)|$. 左辺が正のとき 2 乗しても不等式が保存されるから，

$$0 \leqq \int_{|g(x)|>M}(|g(x)|-M)^2\,dx \leqq \int_{|g(x)|>M}|g_n(x)-g(x)|^2\,dx \leqq \int_0^1 |g_n(x)-g(x)|^2\,dx.$$

これが任意の n で成り立つから，(iii) から $\displaystyle\int_{|g(x)|>M}|g_n(x)-g(x)|^2\,dx = 0$，したがって，$|g(x)| \leqq M$, a.e..

よって，任意の $m>0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx \\
&\quad = \int_{|f(x)|\leqq m} |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx + \int_{|f(x)|>m} |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx \\
&\quad \leqq m^2 \int_{|f(x)|\leqq m} |(g_n(x)-g(x))|^2\,dx + \int_{|f(x)|>m} 2(|g_n(x)|+|g(x)|)^2\,|f(x)|^2\,dx \\
&\quad \leqq m^2 \int_0^1 |(g_n(x)-g(x))|^2\,dx + 8M^2 \int_{|f(x)|>m} |f(x)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

$n\to\infty$ として (iii) を使えば，任意の $m>0$ に対して，

$$
0 \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^1 |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx \leqq 8M^2 \int_{|f(x)|>m} |f(x)|^2\,dx
$$

だが，(i) と積分の積分範囲に関する連続性から，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_{|f(x)|>m} |f(x)|^2\,dx = 0$ なので，

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |(g_n(x)-g(x))\,f(x)|^2\,dx = 0.
$$

[7] (H4 熊本大 1).

(1) g は 2 乗可積分なので $M=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)^2\,dx$ とおくと，シュワルツの不等式から

$$
\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,g(x)\,dx\right|^2 \leqq \int_{\mathbb{R}} f_n(x)^2\,dx \int_{\mathbb{R}} g(x)^2\,dx = M, \quad n=1,2,3,\cdots,
$$

だから，$a_n := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,g(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, で定義される実数列 $\{a_n\}$ は有界．よって収束する部分列 $\{a_{n_j}\}$ が存在する．すなわち，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_{n_j}(x)\,g(x)\,dx$ が存在する．

(2) g は 2 乗可積分なので，積分範囲に関する積分の連続性 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx = \lim_{K\to\infty}\int_{|x|\leqq K} |g(x)|^2\,dx$ から，任意の $\epsilon>0$ に対して $K=K(\epsilon)\in\mathbb{N}$ が存在して $\displaystyle\int_{K(\epsilon)}^{\infty} |g(x)|^2\,dx < \epsilon$．そこで，$n\in\mathbb{N}$ に対して（$\epsilon=1/n$ として）$f_n=\chi_{[K(1/n),K(1/n)+1]}$ とおくと，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2\,dx = 1$ であって，区間 $[K(1/n),K(1/n)+1]$ におけるシュワルツの不等式から

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,g(x)\,dx\right|^2 = \left|\int_{K(1/n)}^{K(1/n)+1} 1\,g(x)\,dx\right|^2 \leqq \int_{K(1/n)}^{K(1/n)+1} 1\,dx \int_{K(1/n)}^{K(1/n)+1} g(x)^2\,dx \\
&\leqq \int_{K(1/n)}^{\infty} g(x)^2\,dx < \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,g(x)\,dx = 0$.

[8] (H2 熊本大 1). 2 乗可積分関数 g を任意に固定する．
$M=\displaystyle\sup_{n\geqq 1}\int_{\Omega} |f_n|^2\,d\mu < \infty$ とおく．シュワルツの不等式から

$$
\left|\int_{\Omega} f_n\,g\,d\mu\right|^2 \leqq \int_{\Omega} f_n^2\,d\mu \int_{\Omega} g^2\,d\mu \leqq M\int_{\Omega} g^2\,d\mu < \infty
$$

だから，$\{\int_\Omega f_n\, g\, d\mu\}_{n=1}^\infty$ は有界な実数列．よって収束する部分列（添字列を $\nu=\{n_j\}$ とおく）がとれる：

$$(*) \qquad \exists\alpha(\nu)=\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_{n_j}\, g\, d\mu.$$

g を正の部分と負の部分に分けて，$g=g_+-g_-$; $g_\pm \geqq 0$, $g_+ g_- = 0$, とおく．$g_\pm$ の非減少非負値単関数近似列 $g_{\pm,k}=\sum_{i=1}^{n_{\pm,k}} c_{\pm,k,i}\chi_{E_{\pm,k,i}}$, $k=1,2,\cdots$, をとり，各 k に対して $g_k=g_{+,k}-g_{-.k}$ とおく．($\lim_{k\to\infty} g_{\pm,k}(x)=g_\pm(x)$, $x\in\Omega$. 非負非減少列で $g_+ g_-=0$ なので $g_{+,k}\, g_{-,k}=0$ に注意.）g が 2 乗可積分なので，単調収束定理から

$$(**) \qquad \begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k^2\, d\mu &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_{+,k}^2\, d\mu+\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_{-,k}^2\, d\mu=\int_\Omega g_+^2\, d\mu+\int_\Omega g_-^2\, d\mu\\ &=\int_\Omega g^2\, d\mu.\end{aligned}$$

また，$\int_\Omega f_n g_k\, d\mu=\sum_{i=1}^{n_{+,k}} c_{+,k,i}\int_{E_{+,k,i}} f_n\, d\mu-\sum_{i=1}^{n_{-,k}} c_{-,k,i}\int_{E_{-,k,i}} f_n\, d\mu$ において，題意から右辺の各積分は $n\to\infty$ の極限が存在するから，

$$(***) \qquad \exists\beta_k:=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n g_k\, d\mu.$$

(*)(***)，シュワルツの不等式，M の定義，$0\leqq g_{\pm,k}\leqq g_\pm$（複合同順），を順に用いると

$$\begin{aligned}|\alpha(\nu)-\beta_k|^2 &= \left(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_{n_j}(g-g_k)\, d\mu\right)^2\\ &\leqq \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_{n_j}^2\, d\mu\int_\Omega (g-g_k)^2\, d\mu\\ &\leqq M^2\left(\int_\Omega g^2\, d\mu-\int_\Omega g_k^2\, d\mu-2\int_\Omega g_k\,(g-g_k)\, d\mu\right)\\ &= M^2\left(\int_\Omega g^2\, d\mu-\int_\Omega g_k^2\, d\mu-2\int_\Omega g_{+,k}\,(g_+-g_{+,k})\, d\mu-2\int_\Omega g_{-,k}\,(g_--g_{-,k})\, d\mu\right)\\ &\leqq M^2\left(\int_\Omega g^2\, d\mu-\int_\Omega g_k^2\, d\mu\right).\end{aligned}$$

よって (**) から $\lim_{k\to\infty}\beta_k=\alpha(\nu)$. すなわち，(*) の極限 $\alpha(\nu)$ は部分列 $\nu=\{n_j\}$ のとりかたによらない．よって $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, g\, d\mu$ が存在する．

[9] (S62 岡山大 B1). 条件から，自然数の増加列 $\{n_k\}$ で，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，$n,m\geqq n_k$ ならば $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f_m(x)|\, dx\leqq 2^{-k}$ となるものがとれる．特に，$m=n_k$, $n=n_{k+1}$ ととることで，$\int_{\mathbb{R}}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\, dx\leqq 2^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$, が成り立つから，単調収束定理と合わせて $\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^\infty|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\, dx\leqq 1$，したがって，特に，$f(x):=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^\infty(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$ はほとんどいたるところ絶対収束し，したがって，収束する．

今の議論と同様に

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-f_{n_\ell}(x)|\, dx\leqq\sum_{k=\ell}^\infty\int_{\mathbb{R}}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\, dx\leqq 2^{1-\ell}$$

であり，また，$n\geqq n_\ell$ ならば $\int_{\mathbb{R}}|f_{n_\ell}(x)-f_n(x)|\, dx\leqq 2^{-\ell}$ なので，結局，$n\geqq n_\ell$ ならば $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\, dx\leqq 3\cdot 2^{-\ell}$ となる．よって $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\, dx=0$.

[10] (S63 学習院大 7).

(1) $e^{-f(x)} \leqq x^{-\alpha}$ だから $\displaystyle\int_0^1 e^{-f(x)}\,dx \leqq \int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} < \infty$.

(2) まず，$E = \{x \in [0,1] \mid \log(x^\alpha) - f(x) > 0\}$，および，$k \in \mathbb{N}$ に対して $E_k = \{x \in [0,1] \mid \log(x^\alpha) - f(x) > \frac{1}{k}\}$ とおくと，$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ かつ $\displaystyle\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$ であって，問の仮定から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in E_k$ ならば $f_n(x) > \log(x^\alpha) > f(x) + \dfrac{1}{k}$ だから，集合 E_k のルベーグ測度を $|E_k|$ と書くと，

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqq \int_{E_k} |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqq \frac{1}{k}|E_k|$$

が任意の n に対して成り立つので，問の仮定から $|E_k| = 0$, $k \in \mathbb{N}$, を得る．よって測度の連続性から $|E| = \displaystyle\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$，すなわち，ほとんどいたるところ $f(x) \geqq \log(x^\alpha)$ である．

よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = (\frac{1}{4}(1-\alpha)\epsilon)^{1/(1-\alpha)}$ とおくと，

$$\int_0^\delta |e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}|\,dx \leqq \int_0^\delta (e^{-f_n(x)} + e^{-f(x)})\,dx \leqq 2\int_0^\delta x^{-\alpha}\,dx = \frac{2\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon,$$

一方，平均値の定理から $|e^{-y} - e^{-z}| \leqq e^{-z-(y-z)\theta}\,|y-z|$ が成り立つ．ここで $0 < \theta = \theta(y,z) < 1$. $y = f(x)$, $z = f_n(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}|e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}| &\leqq e^{-(1-\theta)f(x) - \theta f_n(x)}\,|f_n(x) - f(x)| \\ &\leqq e^{-(1-\theta+\theta)\log(x^\alpha)}\,|f_n(x) - f(x)| = x^{-\alpha}\,|f_n(x) - f(x)|, \quad 0 < x < 1,\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 |e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}|\,dx &\leqq \int_\delta^1 x^{-\alpha}\,|f_n(x) - f(x)|\,dx \leqq \delta^{-\alpha}\int_\delta^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leqq \delta^{-\alpha}\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

問の仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ だから十分大きな n に対して，右辺を $\epsilon/2$ 未満になる．したがって，$\displaystyle\int_0^1 |e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}|\,dx < \epsilon$ となるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |e^{-f_n(x)} - e^{-f(x)}|\,dx = 0$.

[11] (H5 広島大 6A).

(1) $x \in F$ のとき $d(x,F) = 0$ および $\chi_F(x) = 1$ だから $g_k(x) - \chi_F(x) = 0$，$x \notin F$ のとき $\chi_F(x) = 0$ だから $g_k(x) - \chi_F(x) = g_k(x) > 0$，よって，$0 \leqq |g_k(x) - \chi_F(x)| = g_k(x) - \chi_F(x)$ が各点で成り立つ．しかも F は閉集合なので $x \notin F$ ならば $d(x,F) > 0$ だから，$g_k(x)$ は k について各点で非増加関数で，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \chi_F(x)$ が各点で成り立つ．よって単調収束定理から

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |g_k(x) - \chi_F(x)|\,dx = \int_E (\lim_{k\to\infty} g_k(x) - \chi_F(x))\,dx = 0.$$

(2) E を f が正の部分 $\{x \in E \mid f(x) \geqq 0\}$ と負の部分 $\{x \in E \mid f(x) < 0\}$ に分けて，後者の上では以下の議論を $-f$ に対して適用することにより，最初から f が非負として良い[2].

非負値可測関数の積分の定義から，各点で非減少で f に各点収束する非負値単関数列 $h_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i}\chi_{E_{n,i}}$, $n = 1, 2, \cdots$, が存在して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E |h_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ とできる．ここで，可測集合 E のルベーグ測度を $|E|$ と書いた．各 $c_{n,i}$ と $|E_{n,i}|$ は正として良い．

ルベーグ可測集合はルベーグ測度に関して内側から閉集合，および，外側から開集合で近似できる．すなわち，h_n の定義に出てきた各 $E_{n,i}$ に対して閉集合と開集合 $F_{n,i} \subset E_{n,i} \subset G_{n,i}$ が存在して

[2] 以下，本質的に伊藤清三「ルベーグ積分入門」定理 12.6 の証明に従う．

$|G_{n,i} \setminus F_{n,i}| < \dfrac{1}{2nc_{n,i}N_n}$ とできる．$f_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} \frac{d(x, G_{n,i}^c)}{d(x, G_{n,i}^c) + d(x, F_{n,i})}$, $n = 1, 2, \cdots$, とおくと，f_n は連続関数で，$x \notin G_{n,i} \setminus F_{n,i}$ ならば $\dfrac{d(x, G_{n,i}^c)}{d(x, G_{n,i}^c) + d(x, F_{n,i})} = \chi_{E_{n,i}}(x)$ となることと，$\mathbb{R}$ 上でこの両辺とも 0 以上 1 以下であることに注意すると，

$$\int_E |f_n(x) - h_n(x)|\,dx \leqq \sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} \int_{G_{n,i} \setminus F_{n,i}} \left| \frac{d(x, G_{n,i}^c)}{d(x, G_{n,i}^c) + d(x, F_{n,i})} - \chi_{E_{n,i}} \right| dx$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{N_n} 2c_{n,i} |G_{n,i} \setminus F_{n,i}| = \frac{1}{n}\,.$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqq \lim_{n\to\infty} \int_E (|f_n(x) - h_n(x)| + |h_n(x) - f(x)|)\,dx = 0.$

[12] (H7 熊本大 8).

(1) $\epsilon > 0$ に対して，$n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$ となる自然数 n_0 をとると，$n > n_0$ ならば $\epsilon > \dfrac{1}{n_0} > \dfrac{1}{n}$ なので，

$$0 \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| > \epsilon\,] \leqq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| > \frac{1}{n}\,] = 0$$

となるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| > \epsilon\,] = 0$，すなわち，$X_n$ は X に確率収束する．

(2) 概収束しているので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$1 = \mathrm{P}[\,\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{|X_n - X| < \epsilon\}\,] = \lim_{n_0\to\infty} \mathrm{P}[\,\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{|X_n - X| < \epsilon\}\,] \leqq \lim_{n_0\to\infty} \mathrm{P}[\,\{|X_{n_0} - X| < \epsilon\}\,].$$

（変形には確率の連続性と単調性を用いた.）
よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,\{|X_n - X| < \epsilon\}\,] = 1$，すなわち，確率収束する．

[13] (S60 山形大 9).

(1) $f = g$, a.e., なので $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$．よって

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - g(x)| \geqq \epsilon\}) \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geqq \epsilon\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) \\ &\leqq \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geqq \epsilon\}) + \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 \end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - g(x)| \geqq \epsilon\}) = 0$，すなわち，$f_n \xrightarrow{\mu} g$.

(2) 任意の k と任意の $\epsilon > 0$ に対して十分大きな n をとれば $\mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - g(x)| \geqq \dfrac{1}{2k}\}) < \epsilon$ および $\mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geqq \dfrac{1}{2k}\}) < \epsilon$．これを

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \geqq \frac{1}{k}\} &\subset \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| \geqq \frac{1}{k}\} \\ &\subset \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geqq \frac{1}{2k}\} \cup \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - g(x)| \geqq \frac{1}{2k}\} \end{aligned}$$

に用いると，$\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \geqq \dfrac{1}{k}\}) < 2\epsilon$．これが任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つから，$\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \geqq \dfrac{1}{k}\}) = 0$．これが任意の k に対して成り立つから，

$$\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \geqq \frac{1}{k}\}) = 0.$$

すなわち，$f = g$, a.e..

(3) (Ω,μ) が有限測度空間なので $M:=\mu(\Omega)<\infty$．$f_n \xrightarrow{\mu} f$ と仮定し，$\epsilon>0$ を任意にとって，$E_n=\{x\in\Omega \mid |f_n(x)-f(x)| \geqq \frac{\epsilon}{M}\}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$．一方，$x\in E_n^c$ ならば $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{M}$ なので，$\int_{E_n^c}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)<\frac{\epsilon}{M}M=\epsilon$ だから，

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)\\ &\quad\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n^c}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)+\varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)\\ &\quad\leqq \epsilon+\varlimsup_{n\to\infty}\mu(E_n)=\epsilon\end{aligned}$$

$\epsilon>0$ は任意だったから，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)=0.$$

逆に (*) が成り立つとする．任意の $\epsilon\in(0,1/2)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}d\mu(x) &\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\geqq\epsilon\})\\ &\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)-f(x)|\geqq 2\epsilon\}) \quad\text{（チェビシェフの不等式）}\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)-f(x)|\geqq 2\epsilon\})=0.$$

左辺は ϵ について減少なので，$0<\epsilon<1/2$ で証明できたことから，$\epsilon\geqq 1/2$ でも成り立つので，任意の $\epsilon>0$ に対して成り立つ．よって $f_n\xrightarrow{\mu} f$.

(4) (Ω,μ) が有限測度空間で，$\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\leqq 1$, $x\in\Omega$, だから，$f_n\to f$, a.e., ならば有界収束定理から[3]

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)=0.$$

よって，(3) の結果から $f_n\xrightarrow{\mu} f$.

[14] (H2 お茶大 1)．まず (i) を仮定する[4]．$\epsilon>0$ を任意にとって，$E_n=\{\omega\in\Omega \mid |f_n(\omega)|>\epsilon\}$ とおくと，(i) から，ある n_0 があって $n\geqq n_0$ ならば $\mathrm{P}[\,E_n\,]<\epsilon$．一方，$\omega\in E_n^c$ ならば $|f_n(\omega)|\leqq\epsilon$ なので，$\int_{E_n^c}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dP\leqq\epsilon$ だから，$n\geqq n_0$ ならば

$$\int_\Omega\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dP=\int_{E_n^c}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dP+\int_{E_n}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dP\leqq\epsilon+\epsilon=2\epsilon$$

よって $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dP=0$，すなわち，(ii) が成り立つ．

次に (ii) を仮定する．チェビシェフの不等式から，任意の $\epsilon\in(0,1/2)$ に対して

$$\int_\Omega\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dP\geqq\epsilon\mathrm{P}[\,\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqq\epsilon\,]\geqq\epsilon\mathrm{P}[\,|f_n|>2\epsilon\,]$$

が成り立つことを用いると $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}[\,\{\omega\in\Omega \mid |f_n(\omega)|>2\epsilon\}\,]=0$. 左辺は ϵ について減少なので，$0<\epsilon<1/2$ で証明できたことから，$\epsilon\geqq 1/2$ でも成り立つので，任意の $\epsilon>0$ に対して成り立つから，(i) が成り立つ．

[15] (H3 熊本大 1)[5].

[3] もちろん [12](H7 熊本大 8) と本質的に同じ問題だが，小問の流れに沿った別解にしておく．小問の準備がなければ [12] の解答のほうが短いだろう．

[4] 以下，(i)⇒(ii) も (ii)⇒(i) も [13](S60 山形大 9)(3) の解答例と本質的に同じ．

[5] (1) は [13](S60 山形大 9)(3) の解答例に同じ，(2) は [13](S60 山形大 9)(4) の解答例に同じ．

(1) (Ω,μ) が有限測度空間なので $M := \mu(\Omega) < \infty$．まず (a) を仮定し，$\epsilon > 0$ を任意にとって，$E_n = \{x \in \Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > \frac{\epsilon}{M}\}$ とおくと，(a) から $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$．一方，$x \in E_n^c$ ならば $|f_n(x)-f(x)| \leqq \frac{\epsilon}{M}$ なので，$\displaystyle\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) \leqq \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$ だから，

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)\\
&\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) + \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)\\
&\leqq \epsilon + \varlimsup_{n\to\infty}\mu(E_n) = \epsilon
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) = 0$. すなわち，(b) が成り立つ．
逆に (b) が成り立つとする．任意の $\epsilon \in (0,1/2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}d\mu(x) &\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \geqq \epsilon\})\\
&\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > 2\epsilon\}) \quad \text{（チェビシェフの不等式）}
\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > 2\epsilon\}) = 0$. 左辺は ϵ について減少なので，$0 < \epsilon < 1/2$ で証明できたことから，$\epsilon \geqq 1/2$ でも成り立つので，任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つから，(a) が成り立つ．

(2) (Ω,μ) が有限測度空間で，$\dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \leqq 1$, $x \in \Omega$, だから，$f_n \to f$, a.e., ならば有界収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) = 0.$$

よって，(b) を満たす.

[16] (H7 岡山大 B1)．(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i) を証明する[6].

(i)⇒(ii) の証明．(Ω,μ) が有限測度空間で，$\dfrac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \leqq 1$, $x \in \Omega$, だから，$f_n \to f$, a.e., と有界収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,d\mu(x) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,d\mu(x) = 0.$$

(ii)⇒(iii) の証明．任意の $\epsilon \in (0,1//2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}d\mu(x) &\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geqq \epsilon\})\\
&\geqq \epsilon\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)| > 2\epsilon\}) \quad \text{（チェビシェフの不等式）}
\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega \mid |f_n(x)| > 2\epsilon\}) = 0$. $0 < \epsilon < 1/2$ でこれが証明できたが，左辺は ϵ について減少なので，$\epsilon \geqq 1/2$ でも成り立つ．

(iii)⇒(i) の証明．$\epsilon > 0$ を任意にとる．問題の前提から，$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|$ がほとんどいたるところ存在する．極限存在の定義，測度の単調性と連続性から，

$$\begin{aligned}
\mu(\{x\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| > 2\epsilon\}) &\leqq \mu(\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{x\in\Omega \mid |f_n(x)| > \epsilon\}) = \lim_{N\to\infty}\mu(\bigcap_{n=N}^\infty\{x\in\Omega \mid |f_n(x)| > \epsilon\})\\
&\leqq \lim_{N\to\infty}\mu(\{x\in\Omega \mid |f_N(x)| > \epsilon\}).
\end{aligned}$$

(iii) から右辺は 0 なので，$\mu(\{x\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| > 2\epsilon\}) = 0$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
\mu(\{x\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| > 0\}) &= \mu(\bigcap_{k=1}^\infty\{x\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| > \frac{1}{k}\})\\
&= \lim_{k\to\infty}\mu(\{x\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)| > \frac{1}{k}\}) = 0.
\end{aligned}$$

[6] (i)⇒(ii) は [13](S60 山形大 9)(4) の解答例と本質的に同じ，(ii)⇒(iii) は [13](S60 山形大 9)(3) の解答例と本質的に同じ.

すなわち，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, a.e..

[17] (H7 千葉大 8)[7].

(1) $\dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \leqq 1$, $x \in [0,1]$, だから，$f_n \to f$, a.e., ならば有界収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx = 0.$$

(2) (a)⇒(b). $\epsilon > 0$ を任意にとって，$E_n = \{x \in [0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| > \epsilon\}$ とおくと，(a) から $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. 一方，$x \in E_n^c$ ならば $|f_n(x)-f(x)| \leqq \epsilon$ なので，$\displaystyle\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx \leqq \epsilon$ だから，

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \|f_n - f\| &= \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} \int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx + \varlimsup_{n\to\infty} \int_{E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,dx \\ &\leqq \epsilon + \varlimsup_{n\to\infty} \mu(E_n) = \epsilon\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから，(b) が成り立つ．
(b)⇒(a). 任意の $\epsilon \in (0,1/2)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}dx &\geqq \epsilon\mu(\{x \in [0,1] \mid \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \geqq \epsilon\}) \\ &\geqq \epsilon\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| > 2\epsilon\}) \quad \text{（チェビシェフの不等式）}\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると，(b) から，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| > 2\epsilon\}) = 0.$$

$0 < \epsilon < 1/2$ でこれが成り立つが，左辺は ϵ について減少なので，$\epsilon \geqq 1/2$ でも成り立つ．よって任意の $\epsilon > 0$ に対して (a) が成り立つ．

[18] (H6 広島大 6B)[8].

(1) $M = \mu(\Omega)$ とおく（題意から $M < \infty$）．$\epsilon > 0$ を任意に選び，$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > \epsilon\}) = 0$ とする．$E_n = \{x \in \Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > \dfrac{\epsilon}{M}\}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. 一方，$x \in E_n^c$ ならば $|f_n(x)-f(x)| \leqq \dfrac{\epsilon}{M}$ なので，$\displaystyle\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) \leqq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$ だから，

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \rho(f_n, f) &= \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} \int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) + \varlimsup_{n\to\infty} \int_{E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x) \\ &\leqq \epsilon + \varlimsup_{n\to\infty} \mu(E_n) = \epsilon\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから，$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.
逆に，$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ とする．任意の $\epsilon \in (0,1/2)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}d\mu(x) &\geqq \epsilon\mu(\{x \in \Omega \mid \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} > \epsilon\}) \\ &\geqq \epsilon\mu(\{x \in \Omega \mid |f_n(x)-f(x)| > 2\epsilon\}) \quad \text{（チェビシェフの不等式）}\end{aligned}$$

[7](1) は [15](H3 熊本大 1)(2) に同じ，(2) は [15](H3 熊本大 1)(1) に同じ，したがって，(1) は [13](S60 山形大 9)(4) の解答例に同じ，(2) は [13](S60 山形大 9)(3) の解答例に同じ．

[8](1) は [13](S60 山形大 9)(3) の解答例に同じ，(2) は [13](S60 山形大 9)(4) の解答例に同じ．

が成り立つことを用いると $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega\mid |f_n(x)-f(x)|>2\epsilon\})=0$. $0<\epsilon<1/2$ でこれが成り立つが，左辺は ϵ について減少なので，$\epsilon \geqq 1/2$ でも成り立つ．よって任意の $\epsilon>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega\mid |f_n(x)-f(x)|>\epsilon\})=0$.

(2) $\mu(\Omega)<\infty$ で，$\dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\leqq 1$, $x\in\Omega$, だから，$f_n\to f$, a.e., ならば有界収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)=\int_\Omega \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu(x)=0.$$

よって，(1) の結果から，任意の $\epsilon>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\Omega\mid |f_n(x)-f(x)|>\epsilon\})=0$.

[19] (H4 九大 6).

(1) 1 変数関数 $\phi(y)=\dfrac{y}{1+y}$ は $\mathbb{R}_+$ 上増加関数なので，$\epsilon>0$ に対して $f(x)>\epsilon$ ならば $\dfrac{f(x)}{1+f(x)}>\dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}$.
よって（チェビシェフの不等式），

$$Tf=\int_0^1\frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx\geqq\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int_{x\in[0,1],\ f(x)>\epsilon}dx=\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(\{x\in[0,1]\mid f(x)>\epsilon\}).$$

(2) 仮定 (b) から，可積分関数 ψ に対して

$$(0\leqq\ )\ \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E(n)}f_n(x)\,dx\leqq\varlimsup_{n\to\infty}\int_{E(n)}\psi(x)\,dx.$$

一方，仮定 (a) と小問 (1) から，任意の $\epsilon>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(E(n))=\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in[0,1]\mid f_n(x)>\epsilon\})=0$ なので，積分の積分範囲に関する連続性から $\lim_{n\to\infty}\int_{E(n)}\psi(x)\,dx=0$ を得て，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E(n)}f_n(x)\,dx=0.$$

(3) $\epsilon>0$ を任意にとる．小問 (2) の $E(n)$ をとると，$x\in E(n)^c$ ならば $0\leqq f_n(x)\leqq\epsilon$ となることにも注意して，

$$\begin{aligned}(0\leqq\ )\ \varlimsup_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx&\leqq\varlimsup_{n\to\infty}\int_{E(n)}f_n(x)\,dx\ \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E(n)^c}f_n(x)\,dx\\&\leqq 0+\epsilon\varlimsup_{n\to\infty}\mu(E(n)^c)\leqq\epsilon\mu([0,1])=\epsilon.\end{aligned}$$

これが任意の $\epsilon>0$ に対して成り立つから，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$.

[20] (H2 山形大 8).

(1) $\phi(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ において第 2 項分母が $x\geqq 0$ で正値増加だから ϕ も増加である．
(2) a と b が同符号の実数ならば，$|a+b|\geqq|a|$（および $|a+b|\geqq|b|$）に注意すると，

$$\phi(|a+b|)=\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqq\frac{|a|}{1+|a+b|}+\frac{|b|}{1+|a+b|}\leqq\phi(|a|)+\phi(|b|).$$

a と b が異符号ならば，$|a+b|\leqq||a|-|b||\leqq\max\{|a|,|b|\}$ と小問 (1) の結果（$\phi(x)$ が $x\geqq 0$ で増加関数であること）に注意して，

$$\phi(|a+b|)\leqq\max\{\phi(|a|),\phi(|b|)\}\leqq\phi(|a|)+\phi(|b|).$$

よって任意の実数 a と b に対して $\phi(|a+b|)\leqq\phi(|a|)+\phi(|b|)$. よって

$$\|f+g\|=\int_0^1\phi(|f(x)+g(x)|)\,d\mu(x)\leqq\int_0^1(\phi(|f(x)|)+\phi(|g(x)|))\,d\mu(x)=\||f\||+\||g\||.$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ と仮定する[9]．任意の $\epsilon \in (0, 1/2)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} d\mu(x) &\geqq \epsilon\mu(\{x\in[0,1] \mid \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} \geqq \epsilon\}) \\ &\geqq \epsilon\mu(\{x\in[0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| \geqq 2\epsilon\}) \quad \text{（チェビシェフの不等式）}\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in[0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| \geqq 2\epsilon\}) = 0$. 左辺は ϵ について減少なので，$0 < \epsilon < 1/2$ で証明できたことから，$\epsilon \geqq 1/2$ でも成り立つので，任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つ．

逆に，任意の ϵ に対して $\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in[0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| \geqq \epsilon\}) = 0$ が成り立つとする．$\epsilon > 0$ を任意にとって，$E_n = \{x \in [0,1] \mid |f_n(x)-f(x)| \geqq \epsilon\}$ とおくと，$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$．一方，$x \in E_n^c$ ならば $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$ なので，$\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} d\mu(x) \leqq \epsilon$ だから，

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\| &= \varlimsup_{n\to\infty}\int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} d\mu(x) \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n^c} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} d\mu(x) + \varlimsup_{n\to\infty}\int_{E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|} d\mu(x) \\ &\leqq \epsilon + \varlimsup_{n\to\infty}\mu(E_n) = \epsilon\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから，$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\| = 0$.

(4) $y \geqq 0$ とする．$0 \leqq a \leqq 1$ のとき小問 (1) の結果（$\phi(y)$ が $y \geqq 0$ で増加関数であること）から $\phi(ay) \leqq \phi(y)$，$a > 1$ のとき $\phi(ay) = \frac{ay}{1+ay} \leqq a\frac{y}{1+y} = a\phi(y)$. まとめると，$y \geqq 0$ と $a \geqq 0$ に対して $\phi(ay) \leqq \max\{a,1\}\,\phi(y)$．これと，小問の仮定 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ から，

$$\begin{aligned}0 \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\|\alpha_n(f_n - f)\| &= \varlimsup_{n\to\infty}\int_0^1 \phi(|\alpha_n||f_n(x)-f(x)|)\,d\mu(x) \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\max\{|\alpha_n|,1\}\,\|f_n - f\| = \max\{|\alpha|,1\}\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0.\end{aligned}$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n(f_n - f)\| = 0$.

次に，小問 (1) の答えの議論から $y \geqq 0$ のとき，$0 \leqq \phi(y) < 1$ で，区間 $[0,1]$ のルベーグ測度は 1（有限）だから，有界収束定理と小問の仮定 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ によって，

$$\lim_{n\to\infty}\|(\alpha_n - \alpha)f\| = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi(|\alpha_n - \alpha||f(x)|)\,d\mu(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\phi(|\alpha_n - \alpha||f(x)|)\,d\mu(x) = 0.$$

以上と小問 (2) の結果（三角不等式）から

$$0 \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\|\alpha_n f_n - \alpha f\| \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\|\alpha_n(f_n - f)\| + \varlimsup_{n\to\infty}\|(\alpha_n - \alpha)f\| = 0.$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n f_n - \alpha f\| = 0$.

[21] (H3 広島大 6).

(1) 前半．$\frac{y}{1+y}$ は $y \geqq 0$ で非負増加関数だから，

$$\int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx = \int_{A_{\alpha,n}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx + \int_{[0,1]\setminus A_{\alpha,n}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx \geqq \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\mu(A_{\alpha,n}) + 0.$$

よって，$\mu(A_{\alpha,n}) \leqq \frac{1+\alpha}{\alpha}\int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx$.

[9] 以下，順序が逆なだけで，[13](S60 山形大 9)(3) の解答例に同じ．

後半．$[0,1]$ のルベーグ測度は 1（有限）で，$y \geqq 0$ のとき $0 \leqq \dfrac{y}{1+y} \leqq 1$ だから，仮定 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, a.e., と有界収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\,dx = 0.$$

前半の結果と合わせると $\lim_{n\to\infty}\mu(A_{\alpha,n}) = 0$.

(2) この小問の仮定において $\epsilon = \alpha$ とおくと，$\delta = \delta(\alpha) > 0$ が存在して，$E \subset [0,1]$ が $\mu(E) < \delta$ を満たせば $\sup_{m\geqq 1}\int_E |f_m(x)|\,dx < \alpha$．一方，小問 (1) の結果から，ある $n_0 = n_0(\alpha)$ が存在して，$n \geqq n_0$ ならば $\mu(A_{\alpha,n}) < \delta(\alpha)$．よって，$n \geqq n_0$ ならば $\int_{A_{\alpha,n}} |f_n(x)|\,dx \leqq \sup_{m\geqq 1}\int_{A_{\alpha,n}} |f_m(x)|\,dx < \alpha$. これが全ての $n \geqq n_0$ で成り立つから $\sup_{n\geqq n_0}\int_{A_{\alpha,n}} |f_n(x)|\,dx \leqq \alpha$.

また，$x \in A^c_{\alpha,n}$ ならば $|f_n(x)| < \alpha$ だから $\int_{A^c_{\alpha,n}} |f_n(x)|\,dx \leqq \alpha\mu(A^c_{\alpha,n}) \leqq \alpha\mu([0,1]) = \alpha$ が全ての $n \geqq 1$ で成り立つので，特に $\sup_{n\geqq n_0}\int_{A_{\alpha,n}{}^c} |f_n(x)|\,dx \leqq \alpha$.

[22] (S61 広島 9).

(1) $\mathrm{E}[\,(X_n-a)^2\,] = \mathrm{E}[\,(X_n-a)^2;\ |X_n-a| \geqq \epsilon\,] + \mathrm{E}[\,(X_n-a)^2;\ |X_n-a| < \epsilon\,] \geqq \mathrm{E}[\,\epsilon^2;\ |X_n-a| \geqq \epsilon\,] = \epsilon^2\mathrm{P}[\,|X_n-a| \geqq \epsilon\,]$.

(2) $\epsilon > 0$ を任意にとる．仮定 $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$ から，n_0 が存在して $n \geqq n_0$ ならば $|\theta_n - \theta| < \epsilon$.

$$\{|X_n-\theta| \geqq \epsilon\} \subset \{|X_n-\theta_n| \geqq \epsilon - |\theta_n-\theta|\}$$

に注意して，小問 (1) の結果を $a = \theta_n$，および，ϵ を $\epsilon - |\theta_n-\theta|$ に置き換えて用いると，$n \geqq n_0$ のとき

$$\mathrm{P}[\,|X_n-\theta| \geqq \epsilon\,] \leqq \mathrm{P}[\,|X_n-\theta_n| \geqq \epsilon - |\theta_n-\theta|\,] \leqq \frac{1}{(\epsilon-|\theta_n-\theta|)^2}\mathrm{E}[\,(X_n-\theta_n)^2\,] = \frac{\sigma_n^2}{(\epsilon-|\theta_n-\theta|)^2}\,.$$

仮定 $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$ と $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$ から右辺は 0 に収束するから X_n は θ に確率収束する．

(3) $\epsilon > 0$ を任意にとる．h が $x = \theta$ で連続なので，$\delta > 0$ が存在して，$|x-\theta| < \delta$ ならば $|h(x) - h(\theta)| < \epsilon$. したがって，小問 (2) の結果から

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathrm{P}[\,|h(X_n)-h(\theta)| \geqq \epsilon\,] \leqq \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}[\,|X_n-\theta| \geqq \delta\,] = 0.$$

よって $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}[\,|h(X_n)-h(\theta)| \geqq \epsilon\,] = 0$．これが任意の $\epsilon > 0$ で成り立つから，$h(X_n)$ は $h(\theta)$ に確率収束する．

[23] (S63 都立大 6).

(1)(a) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\{t\})) > \frac{1}{k}\}$ に注意する．$\mu(\Omega) < \infty$ なので，$\mu(f^{-1}(\{t\})) > \frac{1}{k}$ なる t の個数は $k\mu(\Omega)$ 以下となり，有限個だから，その可算和である A は可算集合である．

(b) 題意により $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が連続関数なので，開区間 (s,t) の逆像 $f^{-1}(s,t)$ は Ω の開集合である．したがって，$s < f(\omega) < t$ なる $\omega \in \Omega$ は $f^{-1}([s,t)) \supset f^{-1}([s,t))$ の内点．よって，境界点集合 $\partial f^{-1}([s,t)) \subset \{f^{-1}(s), f^{-1}(t)\}$ である．題意により $s,t \notin A$ なので，$\mu(\partial f^{-1}([s,t))) \leqq \mu(f^{-1}(s)) + \mu(f^{-1}(t)) = 0$.

(2) $\epsilon > 0$ を任意にとる[10]．f が有界なので $m = \inf_{\omega\in\Omega} f(\omega)$ と $M = \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$ が有限（実数値）である．積分の線形性から，関数 $\dfrac{f-m+0.1}{M-m+0.2}$ を f とした式を証明すれば，元の式も成り立つ．よって最初から，各点で $0 < f < 1$ と仮定してよい（ので，そうする）[11].

[10] 以下，P. Billingsley, ‘Convergence of probability measures’, John Wiley & Sons, Chapter 1, §2., Portmanteau Theorem, の証明から，該当部分を切り貼りして適宜補足した．

[11] $0 < f$ は，最後に $1 - f$ を f として以下の議論を適用するため．

$k \in \mathbb{N}$ をいったん固定して，$i = 0, 1, 2, \cdots, k$ に対して閉集合 $F_i = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqq \frac{i}{k}\}$ を考える．($F_0 = \Omega$, $F_k = \emptyset$.)

$$\int_\Omega f\,d\mu_n \leqq \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\mu_n(\{\omega \in \Omega \mid \frac{i-1}{k} \leqq f(\omega) < \frac{i}{k}\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}(\mu_n(F_{i-1}) - \mu_n(F_i)) = \frac{\mu_n(\Omega)}{k} + \sum_{i=1}^{k} \mu_n(F_i)$$

だから

$$(*1) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n \leqq \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \mu_n(\Omega) + \sum_{i=1}^{k} \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F_i) = \frac{1}{k}\mu(\Omega) + \sum_{i=1}^{k} \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F_i).$$

i を 1 つとる．$\delta > 0$ に対して，閉集合 $F_{i,\delta} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geqq \frac{i}{k} - \delta\} \supset F_i$ を考える．小問 (1) から，$\partial F_{i,\delta} \subset \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \frac{i}{k} - \delta\}$ が μ–測度正になる δ は高々可算個なので，$\mu(\partial F_{i,\delta_\ell}) = 0$, $\ell \in \mathbb{N}$, となるような，0 に収束する減少する正数列 $\{\delta_\ell\}$ がとれる[12]．題意から，$\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_{i,\delta_\ell}) = \mu(F_{i,\delta_\ell})$ が成り立つ．測度の単調性と合わせて，$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F_i) \leqq \lim_{n\to\infty} \mu_n(F_{i,\delta_\ell}) = \mu(F_{i,\delta_\ell})$. $\ell \to \infty$ として，F_{i,δ_ℓ} が減少列で $\bigcap_{\ell=1}^{\infty} F_{i,\delta_\ell} = F_i$ となることに注意すると，

$$(*2) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F_i) \leqq \lim_{\ell\to\infty} \mu(F_{i,\delta_\ell}) = \mu(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} F_{i,\delta_\ell}) = \mu(F_i).$$

最後に，(*1) の導出と同様に，

$$(*3) \quad \sum_{i=1}^{k} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k}(\mu(F_{i-1}) - \mu(F_i)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k}\mu(\{\omega \in \Omega \mid \frac{i-1}{k} \leqq f(\omega) < \frac{i}{k}\}) \leqq \int_\Omega f\,d\mu$$

(*1)(*2)(*3) から，$\varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n \leqq \frac{\mu_n(\Omega)}{k} + \int_\Omega f\,d\mu$. k は任意なので $k \to \infty$ として，

$$(*4) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n \leqq \int_\Omega f\,d\mu.$$

以上の議論を f を $1 - f$ として適用すると，$\varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega (1-f)\,d\mu_n \leqq \int_\Omega (1-f)\,d\mu$. すなわち，$\int_\Omega f\,d\mu \leqq \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n$. (*4) と合わせると，$\varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n = \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n = \int_\Omega f\,d\mu$. すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\,d\mu_n = \int_\Omega f\,d\mu.$$

[24] (H1 阪大 10).

(1) $t > 0$ を固定し，$\epsilon > 0$ を任意にとる．ϕ が積分可能なので，積分範囲に関する積分の連続性から $\lim_{\delta\downarrow 0}\left(\int_t^{t+\delta} \phi(x)\,dx + \int_{-t-\delta}^{-t} \phi(x)\,dx\right) = 0$ だから，$0 \leqq \int_t^{t+\delta} \phi(x)\,dx + \int_{-t-\delta}^{-t} \phi(x)\,dx \leqq \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を $|x| \leqq t$ のとき $f(x) = 1$, $|x| \geqq t+\delta$ のとき $f(x) = 0$, $t < |x| < t+\delta$ のとき $f(\pm t) = 1$ と $f(\pm(t+\delta)) = 0$ の線形内挿，で定義する．$f \in C_0(\mathbb{R})$ である．単調性から，$\int_{-t}^{t} \phi_n(x)\,dx \leqq \int_\mathbb{R} f(x)\phi_n(x)\,dx$. 題意から右辺は $n \to \infty$ で $\int_\mathbb{R} f(x)\phi(x)\,dx$ に収束するので，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \varlimsup_{n\to\infty} \int_{-t}^{t} \phi_n(x)\,dx \leqq \int_\mathbb{R} f(x)\phi(x)\,dx = \int_{-t-\delta}^{t+\delta} f(x)\phi(x)\,dx.$$

[12] たとえば Ω が可算集合の場合にそういう議論が大丈夫かと思うかもしれないが，その場合はほとんどの正実数 δ に対して $\partial F_{i,\delta} = \emptyset$ になる．

単調性と f と δ の選び方から

$$\int_{-t-\delta}^{t+\delta} f(x)\phi(x)\,dx \leqq \int_{-t-\delta}^{-t} \phi(x)\,dx + \int_{t}^{t+\delta} \phi(x)\,dx + \int_{-t}^{t} \phi(x)\,dx \leqq \epsilon + \int_{-t}^{t} \phi(x)\,dx = \epsilon + \sigma(t).$$

$\epsilon > 0$ は任意なので $\varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n(t) \leqq \sigma(t)$.

次に，$\epsilon > 0$ を任意にとり，$0 \leqq \int_{t-\delta}^{t} \phi(x)\,dx + \int_{-t}^{-t+\delta} \phi(x)\,dx \leqq \epsilon$ となる $\delta > 0$ を選んで，$\tilde{f} \in C_0(\mathbb{R})$ を $|x| \leqq t-\delta$ のとき $\tilde{f}(x) = 1$，$|x| \geqq t$ のとき $\tilde{f}(x) = 0$，$t-\delta < |x| < t$ のとき線形内挿，で定義すると，同様に，

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \varliminf_{n\to\infty} \int_{|x|\leqq t} \phi_n(x)\,dx \geqq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\phi(x)\,dx \geqq -\epsilon + \sigma(t).$$

$\epsilon > 0$ は任意なので $\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n(t) \geqq \sigma(t)$．以上から $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \sigma(t)$.

(2) 小問 (1) の結果と題意（ϕ_n が非負で $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx = 1$）から，

$$\int_{-t}^{t} \phi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-t}^{t} \phi_n(x)\,dx \leqq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx = 1.$$

最右辺は t によらないから，$t \to \infty$ として $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx \leqq 1$.

後半は，$\phi_n = \dfrac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}$ とおくと，非負で積分が 1 で，任意の $f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

となるが，f は台有界だから十分大きな n に対して最右辺は $\dfrac{1}{2n}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$（積分は有限で n によらない）となるので，$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_n(x)\,dx = 0$．よって，$\phi(x)$ は恒等的に 0 として $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx$ が成り立つ．このとき，$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 0 < 1$ である．
（他に，$\phi_n = \chi_{[n,n+1)}$ なども分かりやすい例となる.）

(3) $\epsilon > 0$ を任意にとる．$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \lim_{t\to\infty} \inf_{n\geqq 1} \sigma_n(t) = 1$ ならば，十分大きな（しかし n によらない）t に対して $\sigma_n(t) \geqq 1-\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$．さらに，この ϵ と t に対応する小問 (1) の前半の $\delta > 0$ と $f \in C_0(\mathbb{R})$ をとると，小問 (1) の計算と同様に，

$$\epsilon + \sigma(t) \geqq \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_n(x)\,dx \geqq \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n(t) \geqq 1-\epsilon.$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して十分 t が大きければ $\sigma(t) \geqq 1-2\epsilon$ となるから，$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \sigma(t) \geqq 1$．小問 (2) で逆の不等号は分かっていたから，$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$.

逆に，$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$ とする．もし，$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 1$ が成り立たないとすると，ϕ_n が非負で $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx = 1$ だから $\mu(t) \leqq 1$ が分かっていることと，$\sigma_n(t)$ が t について非減少なことから，$\delta > 0$ が存在して，任意の t に対して $n = n(t)$ が存在して $\sigma_n(t) \leqq 1-\delta$ となる.

特に，部分列 $\{n_k\}$ を $\sigma_{n_k}(k) \leqq 1-\delta$, $k \in \mathbb{N}$, となるようにとることができる．このとき，小問 (1) と $\sigma_n(t)$ が t について非減少なことから

$$\sigma(t) = \lim_{k\to\infty} \sigma_{n_k}(t) \leqq \varliminf_{k\to\infty} \sigma_{n_k}(k) \leqq 1-\delta$$

が任意の $t > 0$ に対して成り立つはずだが，これは $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$ に反する．よって，$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 1$.

[25] (H1 九大 5).

(1) $M = \sup_{n \geqq 1} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu_n(x)$ とおく．$K > \left(\dfrac{M}{\epsilon}\right)^{1/(p-p')}$ とおくと，

$$\epsilon \geqq \frac{\epsilon}{M} \sup_{n\geqq 1} \int_{|x|\geqq K} |x|^p \, d\mu_n(x) \geqq \frac{\epsilon}{M} K^{p-p'} \sup_{n\geqq 1} \int_{|x|\geqq K} |x|^{p'} \, d\mu_n(x) > \sup_{n\geqq 1} \int_{|x|\geqq K} |x|^{p'} \, d\mu_n(x).$$

(2) 小問の仮定により，$|f(x)| \leqq M\,(1+|x|^{p'})$, $x \in \mathbb{R}$, となる $M > 0$ が存在する．
任意の $L > 0$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu_n(x) \geqq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \min\{|x|^p, L^p\} \, d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \min\{|x|^p, L^p\} \, d\mu(x)$$

が成り立つので，Fatou の補題から，

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{L\to\infty} \min\{|x|^p, L^p\} d\mu(x) \leqq \varliminf_{L\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \min\{|x|^p, L^p\} d\mu(x) \leqq \sup_{n\geqq 1} \int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu_n(x) < \infty.$$

よって，小問 (1) と同様の議論により，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\displaystyle\int_{|x|\geqq K} |x|^{p'} \, d\mu(x) < \frac{\epsilon}{M}$ および $\displaystyle\int_{|x|\geqq K} |x|^{p'} \, d\mu_n(x) < \frac{\epsilon}{M}$, $n \in \mathbb{N}$, となる $K > 0$ が存在する．
この K に対して，$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqq K, \\ \dfrac{f(x)}{1+|x|^{p'}}(1+K^{p'}), & |x| > K \end{cases}$ で連続関数 $\tilde{f}$ を定義すると，$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{f}(x)| \leqq M(1+K^{p'})$，すなわち有界．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \, d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \, d\mu(x)$.
さらに，$\tilde{f}$ の具体形から

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, d\mu_n(x) = \int_{|x|>K} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{p'}} (|x|^{p'} - K^{p'}) \, d\mu_n(x) \leqq M \int_{|x|>K} x^{p'} \, d\mu_n(x) \leqq M \, \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

および，同様に，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, d\mu(x) \leqq \epsilon$ を得る．
よって，

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mu(x) \right| \\ &\leqq \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \, d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \, d\mu(x) \right| + \sup_{n\geqq 1} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, d\mu_n(x) + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| \, d\mu(x) \\ &\leqq 2\epsilon. \end{aligned}$$

これが任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mu(x)$.

[26] (H9 東工大 7).

(1) 区間 $[0,1]$ のルベーグ測度は 1（有限）で，F が有界だから有界収束定理が適用できることと，F が連続であることから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(f_n(x)) \, d\mu(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} F(f_n(x)) \, d\mu(x) = \int_0^1 F(f(x)) \, d\mu(x).$$

(2) F は有界なので $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x)| < \infty$．まず，$F$ が一様連続の場合を考える．任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$x, y \in \mathbb{R}$ が $|x-y| < \delta$ ならば $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する．この δ を用いて，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 F(f_n(x))\, d\mu(x) - \int_0^1 F(f(x))\, d\mu(x)\right| \\
&\leqq \int_0^1 |F(f_n(x)) - F(f(x))|\, d\mu(x) \\
&\quad = \int_{|f_n - f| < \delta} |F(f_n(x)) - F(f(x))|\, d\mu(x) + \int_{|f_n - f| \geqq \delta} |F(f_n(x)) - F(f(x))|\, d\mu(x) \\
&\leqq \epsilon \mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f(x)| < \delta\}) + 2M\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f(x)| \geqq \delta\}) \\
&\leqq \epsilon \mu([0,1]) + \frac{2M}{\delta} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

（最後の変形はチェビシェフの不等式.）小問の仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) = 0$ だから，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int_0^1 F(f_n(x))\, d\mu(x) - \int_0^1 F(f(x))\, d\mu(x)\right| \leqq \epsilon.$$

これが任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(f_n(x))\, d\mu(x) = \int_0^1 F(f(x))\, d\mu(x).$

次に，F が一様連続とは限らない有界連続関数の場合を考える[13]．任意の $m > 0$ に対して，

$$G(x) = F(x),\ |x| \leqq m, \quad G(x) = 0,\ |x| > m+1,$$

を満たす台有界連続関数 $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．F が有界なので $c = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| < \infty.$

$$H(x) \quad \begin{cases} = c, & |x| \leqq m-1, \\ \in [0,c], & m-1 < |x| < m, \\ = 0, & |x| \geqq m, \end{cases}$$

なる台有界連続関数 H をとれば $|F(x) - G(x)| \leqq c - H(x),\ x \in \mathbb{R}$. このとき，

$$\int_{[0,1]} |F(f(x)) - G(f(x))|\, d\mu(x) \leqq c\mu(\{x \in [0,1] \mid |f(x)| > m-1\}).$$

また H は台有界連続関数なので一様連続だから，前半の結果が適用できて，

$$\int_{[0,1]} |F(f_n(x)) - G(f_n(x))| d\mu(x) \leqq c - \int_{[0,1]} H(f_n(x)) d\mu(x) \ \longrightarrow\ c - \int_{[0,1]} H(f(x)) d\mu(x), \quad n \to \infty.$$

よって

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{[0,1]} |F(f_n(x)) - G(f_n(x))| d\mu(x) \leqq c\mu(\{x \in [0,1] \mid |f(x)| > m-1\}).$$

G も台有界連続関数なので前半の結果が適用できて，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} G(f_n(x)) d\mu(x) = \int_{[0,1]} G(f(x)) d\mu(x).$$

以上を合わせると

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int_{[0,1]} F(f_n(x)) d\mu(x) - \int_{[0,1]} F(f(x)) d\mu(x)\right| \leqq 2c\mu(\{x \in [0,1] \mid |f(x)| > m-1\}).$$

m は任意で左辺は m によらないから，$m \to \infty$ とすれば確率の連続性から右辺は 0 に収束して

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(f_n(x))\, d\mu(x) = \int_0^1 F(f(x))\, d\mu(x).$$

[13]以下，有界連続関数の場合を台有界連続関数の場合に帰着させる部分は，伊藤清,「確率論 I」，岩波講座基礎数学，定理 2.10 の弱収束の同値条件の証明の当該部分を抜き出した.（こんな回りくどいことはしなくていいのかもしれないが⋯.

[27] (H8 神戸大 5)[14].

(1) f は有界なので $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$．$f$ が一様連続なので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$x, y \in \mathbb{R}$ が $|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する．この δ を用いて，

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{E}[\, f(X_n)\,] - \mathrm{E}[\, f(X)\,]| \\
&\leqq \mathrm{E}[\,|f(X_n) - f(X)\,] = \mathrm{E}[\,|f(X_n) - f(X)|; |X_n - X| < \delta\,] + \mathrm{E}[\,|f(X_n) - f(X)|; |X_n - X| \geqq \delta\,] \\
&\leqq \epsilon \mathrm{P}[\,|X_n - X| < \delta\,] + 2M\mathrm{P}[\,|X_n - X| \geqq \delta\,] \leqq \epsilon + 2M\mathrm{P}[\,|X_n - X| \geqq \delta\,].
\end{aligned}$$

小問の仮定から $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,|X_n - X| \geqq \delta\,] = 0$ だから，$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\mathrm{E}[\, f(X_n)\,] - \mathrm{E}[\, f(X)\,]| \leqq \epsilon$. これが任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つから $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, f(X_n)\,] = \mathrm{E}[\, f(X)\,]$.

(2) 任意の $m > 0$ に対して，

$$g(x) = f(x),\ |x| \leqq m, \quad g(x) = 0,\ |x| > m+1,$$

を満たす台有界連続関数 $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．f が有界なので $c = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| < \infty$.

$$h(x) \quad \begin{cases} = c, & |x| \leqq m-1, \\ \in [0, c], & m-1 < |x| < m, \\ = 0, & |x| \geqq m, \end{cases}$$

なる台有界連続関数 h をとれば $|f(x) - g(x)| \leqq c - h(x)$, $x \in \mathbb{R}$．このとき，

$$\mathrm{E}[\,|f(X) - g(X)|\,] \leqq c\mathrm{P}[\,|X| > m-1\,].$$

また h は台有界連続関数なので一様連続だから，前半の結果が適用できて，

$$\mathrm{E}[\,|f(X_n) - g(X_n)|\,] \leqq c - \mathrm{E}[\,h(X_n)\,] \ \longrightarrow\ c - \mathrm{E}[\,h(X)\,], \quad n \to \infty.$$

よって

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{E}[\,|f(X_n) - g(X_n)|\,] \leqq c\mathrm{P}[\,|X| > m-1\,].$$

g も台有界連続関数なので前半の結果が適用できて，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,g(X_n)\,] = \mathrm{E}[\,g(X)\,].$$

以上を合わせると

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\mathrm{E}[\, f(X_n)\,] - \mathrm{E}[\, f(X)\,]| \leqq 2c\mathrm{P}[\,|X| > m-1\,]).$$

m は任意で左辺は m によらないから，$m \to \infty$ とすれば確率の連続性から右辺は 0 に収束して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, f(X_n)\,] = \mathrm{E}[\, f(X)\,].$$

[28] (H3 新潟大 13)．任意の $b > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq b}\,] \leqq \mathrm{E}[\,|X_n| \left(\frac{|X_n|}{b}\right)^{\alpha-1} \chi_{|X_n|\geqq b}\,] \leqq b^{1-\alpha}\mathrm{E}[\,|X_n|^\alpha\,] \leqq b^{1-\alpha}K.$$

右辺は n によらないので $\sup_{n\geqq 1} \mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq b}\,] \leqq b^{1-\alpha}K$. $\alpha > 1$ なので $\lim_{b\to\infty} \sup_{n\geqq 1} \mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq b}\,] = 0$.

[29] (H9 千葉大 9)[15].

[14] 以下，本質的に [26](H9 東工大 7)(2) と同解答.

[15] 以下，(1) はチェビシェフの不等式，(2) は [28](H3 新潟大 13) と本質的に同じ解答.

なおこの解答は (2) で (1) を用いないが，用いるには，西尾真喜子「確率論」（実教出版 1978 年）四章 §4 一様可積分性の例 2 の証明のようにヘルダーの不等式を経由する方法があり，そのときこの千葉大の出題は同書の同証明の手順をそのまま小問にしたことになる．西尾真喜子の同書は直前の §3 でヘルダーの不等式を含む基礎不等式を証明しているので，ヘルダー不等式の使用は他の不等式の使用と同等の手間だから自然な流れだが，院試問題には準備や背景がないので，ここで用意した初等解答を排除する小問誘導は不自然である．

(1) $x>0$ のとき

$$\mathrm{E}[\,|X|^p\,]=\mathrm{E}[\,|X|^p;\ |X|\geqq x\,]+\mathrm{E}[\,|X|^p;\ |X|<x\,]\geqq \mathrm{E}[\,|X|^p;\ |X|\geqq x\,]\geqq x^p\mathrm{P}[\,|X|\geqq x\,]$$

だから $\mathrm{P}[\,|X|\geqq x\,]\leqq \dfrac{E|X|^p}{x^p}$.

(2) 題意から，任意の $a>0$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq a}\,]\leqq \mathrm{E}\Big[\,|X_n|\left(\frac{|X_n|}{a}\right)^{p-1}\chi_{|X_n|\geqq a}\,\Big]\leqq a^{1-p}\mathrm{E}[\,|X_n|^p\,]\leqq a^{1-p}.$$

右辺は n によらないので $\sup_{n\geqq 1}\mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq a}\,]\leqq a^{1-p}$. $p>1$ なので $\lim_{a\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\mathrm{E}[\,|X_n|\chi_{|X_n|\geqq a}\,]=0$.

(3) 小問 (2) の (*) から特に $a>0$ が存在して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}[\,|X_n|\,]\leqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]+\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|<a\,]\leqq 1+a\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{P}[\,|X_n|<a\,]\leqq 1+a<\infty.$$

[30] (S63 神戸大 5).

(1) $\{Z>a\}\subset\{Z=X>a\}\cup\{Z=Y>a\}$ で，X と Y および $Z=\max\{X,Y\}$ は非負値だから

$$\int_{\{Z>a\}}Z\,dP\leqq\int_{\{Z=X>a\}}Z\,dP+\int_{\{Z=Y>a\}}Z\,dP=\int_{\{Z=X>a\}}X\,dP+\int_{\{Z=Y>a\}}Y\,dP.$$

X,Y が非負値なので，単調性から，右辺は $\int_{\{X>a\}}X\,dP+\int_{\{Y>a\}}Y\,dP$ 以下である.
$Z_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ とおくと，$Z_n=\max\{Z_{n-1},X_n\}$ だから上の結果から，

$$\int_{\{Z_n>a\}}Z_n\,dP\leqq\int_{\{Z_{n-1}>a\}}Z_{n-1}\,dP+\int_{\{X_n>a\}}X_n\,dP.$$

よって帰納法により，

$$\int_{\{\max\{X_1,\cdots,X_n\}>a\}}\max\{X_1,\cdots,X_n\}\,dP\leqq\sum_{i=1}^n\int_{\{X_i>a\}}X_i\,dP.$$

(2) 小問 (1) の後半の結果を用いることにより，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\frac{1}{n}\max_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\,dP\\
&=\int_{\max\limits_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\leqq n\epsilon}\frac{1}{n}\max_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\,dP+\int_{\max\limits_{1\leqq m\leqq n}|X_m|>n\epsilon}\frac{1}{n}\max_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\,dP\\
&\leqq\epsilon\mathrm{P}[\,\max_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\leqq n\epsilon\,]+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n\int_{|X_m|>n\epsilon}|X_m|\,dP\\
&\leqq\epsilon+\sup_{n\geqq m\geqq 1}\int_{|X_m|>n\epsilon}|X_m|\,dP.
\end{aligned}$$

(A) において n を m と書き直した上で $a=n\epsilon$ とおいたものを用いることで，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{n\geqq m\geqq 1}\int_{|X_m|>n\epsilon}|X_m|\,dP\leqq\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqq 1}\int_{|X_m|>n\epsilon}|X_m|\,dP=0.$$

よって，$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{1}{n}\max_{1\leqq m\leqq n}|X_m|\,dP=0$

[31] (H4 奈良女大 V). Fatou の補題から，

$$\int_\Omega|f|\,d\mu=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}|f_n|\,d\mu\leqq\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n|\,d\mu.$$

一方，題意から，任意の $\epsilon>0$ に対して $a>0$ が存在して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega |f_n|\,d\mu \leqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{E_n(a)}|f_n|\,d\mu+\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{E_n(a)^c}|f_n|\,d\mu \leqq \epsilon + a\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(E_n(a)^c) \leqq \epsilon + a\mu(\Omega)<\infty.$$

よって $\displaystyle\int_\Omega |f|\,d\mu<\infty$.

[32] (H7 千葉大 9)[16]．(*)⇒(**)．(*) から特に，$\displaystyle\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]\leqq 1$ となる $a_0>0$ がある．この a_0 に対して，

$$\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|\,] \leqq \sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a_0\,]+\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|<a_0\,] \leqq 1+a\sup_n \mathrm{P}[\,|X_n|<a_0\,]\leqq 1+a_0<\infty.$$

次に，$\epsilon>0$ に対して，(*) から $\displaystyle\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]\leqq\frac{\epsilon}{2}$ となる $a>0$ がある．この a に対して $\delta=\dfrac{\epsilon}{2a}$ とおくと，$\mathrm{P}[\,\Lambda\,]<\delta$ ならば任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\,|X_n|;\ \Lambda\,] &= \mathrm{E}[\,|X_n|;\ \Lambda\cap\{|X_n|\geqq a\}\,]+\mathrm{E}[\,|X_n|;\ \Lambda\cap\{|X_n|<a\}\,]\\ &\leqq \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]+a\mathrm{E}[\,1;\ \Lambda\cap\{|X_n|<a\}\,]\\ &\leqq \frac{\epsilon}{2}+a\mathrm{P}[\,\Lambda\cap\{|X_n|<a\}\,]\leqq\frac{\epsilon}{2}+a\mathrm{P}[\,\Lambda\,]<\frac{\epsilon}{2}+a\delta=\epsilon.\end{aligned}$$

(**)⇒(*)．$K:=\displaystyle\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|\,]$ とおく．$\epsilon>0$ を任意にとり，対応する（(**) によって存在が保証されている）$\delta>0$ を用いて $a=\dfrac{2K}{\delta}$ とおくと，各 $n\in\mathbb{N}$ に対してチェビシェフの不等式から

$$\mathrm{P}[\,|X_n|\geqq a\,]\leqq\frac{1}{a}\mathrm{E}[\,|X_n|\,]\leqq\frac{K}{a}<\delta$$

なので，(**) から $\mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]<\epsilon$．これが任意の n で成り立つ（a が n によらない）ので，任意の $\epsilon>0$ に対して $a>0$ が存在して $\displaystyle\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]<\epsilon$．すなわち $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\sup_n \mathrm{E}[\,|X_n|;\ |X_n|\geqq a\,]=0$.

[33] (S62 阪大 8).

(1) ϕ に対する仮定から，任意の $L>0$ に対して $a_0>0$ が存在して $t\geqq a_0$ ならば $\phi(t)\geqq Lt$．f_n と ϕ は非負値なので，

$$\int_{\{f_n\geqq a_0\}} f_n(x)\,dx \leqq \int_{\{f_n\geqq a_0\}}\frac{\phi(f_n(x))}{L}\,dx\leqq\frac{1}{L}\int_0^1\phi(f_n(x))\,dx.$$

よって $\displaystyle\sup_{n\geqq1}\int_{\{f_n\geqq a_0\}} f_n(x)\,dx\leqq\frac{1}{L}\sup_{n\geqq1}\int_0^1\phi(f_n(x))\,dx$．仮定により，右辺は正（有限）である．左辺は a_0 について減少なので，任意の $L>0$ に対して $a_0>0$ が存在して $a\geqq a_0$ ならば $\displaystyle\sup_{n\geqq1}\int_{\{f_n\geqq a\}} f_n(x)\,dx\leqq \sup_{n\geqq1}\int_0^1\phi(f_n(x))\,dx$ が言えた．すなわち，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\sup_{n\geqq1}\int_{\{f_n>a\}} f_n(x)\,dx=0$.

(2) $\epsilon>0$ に対して[17]，(1) から $\displaystyle\sup_{n\geqq1}\int_{\{f_n>a\}} f_n(x)\,dx\leqq\frac{\epsilon}{4}$ となる $a>0$ がある．この a に対して $\delta=\dfrac{\epsilon}{4a}$ とおくと，可測集合 $\Lambda\subset[0,1]$ が $\displaystyle\int_\Lambda 1\,dx<\delta$ ならば任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Lambda f_n(x)\,dx &= \int_{\Lambda\cap\{f_n\geqq a\}} f_n(x)\,dx+\int_{\Lambda\cap\{f_n<a\}} f_n(x)\,dx\leqq\int_{\{f_n\geqq a\}} f_n(x)\,dx+a\int_\Lambda 1\,dx\\ &\leqq\frac{\epsilon}{4}+a\delta=\frac{\epsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

[16] 以下，たとえば，西尾真喜子,「確率論」，実教出版，四章 §4 の (U1)(U2) および定理 1 の証明に従う．
[17] 以下の証明は本質的に，たとえば，西尾真喜子,「確率論」，実教出版，四章 §4 の (U2) と定理 2(1) → (2) の証明である．

小問 (2) の仮定から $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, a.e., なので，確率収束する[18]から $\lim_{n\to\infty}\int_{\{f_n>\frac{\epsilon}{2}\}} 1\,dx = 0$．よって n_0 が存在して $n \geqq n_0$ ならば $\int_{\{f_n>\frac{\epsilon}{2}\}} 1\,dx < \delta$．$\Lambda = \{f_n > \frac{\epsilon}{2}\}$ とおいて前段落の結果を用いると $\int_{\{f_n>\frac{\epsilon}{2}\}} f_n(x)\,dx < \frac{\epsilon}{2}$．よって $n \geqq n_0$ のとき，

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{\{f_n>\frac{\epsilon}{2}\}} f_n(x)\,dx + \int_{\{f_n\leqq\frac{\epsilon}{2}\}} f_n(x)\,dx \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\int_0^1 1\,dx = \epsilon.$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

[34] (S62 名大 5).

(1) $K = \sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} |f_n|^\alpha\,d\mu < \infty$ ならば，Fatou の補題から

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^\alpha\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |f_n|^\alpha\,d\mu \leqq \varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_n|^\alpha\,d\mu \leqq K.$$

(2) $K = \sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} |f_n|^\alpha\,d\mu < \infty$ とおく．$c > 0$ に対して

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c\}} |f_n|\,d\mu \leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c\}} |f_n|\left(\frac{|f_n|}{c}\right)^{\alpha-1} d\mu \leqq c^{1-\alpha}K.$$

よって $\lim_{c\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c\}} |f_n|\,d\mu = 0$.

(3) まず，

$$(*)\qquad \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n - f|\,d\mu \leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n|\,d\mu + \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f|\,d\mu$$

および

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n|\,d\mu \\
&\leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c,\,|f_n(x)|>c'\}} |f_n|\,d\mu + \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c,\,|f_n(x)|\leqq c'\}} |f_n|\,d\mu \\
&\leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c'\}} |f_n|\,d\mu + c'\mu(\{x\in\mathbb{R}\mid |f_n(x)-f(x)|>c) \\
&\leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c'\}} |f_n|\,d\mu + \frac{c'}{c}\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\,d\mu \\
&\leqq \int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)|>c'\}} |f_n|\,d\mu + \frac{c'}{c}\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,d\mu + \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu\right).
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は小問 (2) から $c' \to \infty$ のとき n について一様に 0 に収束，第 2 項は題意から括弧内が n について有界なので c' を決めるごとに $c \to \infty$ のとき n について一様に 0 に収束．よって

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n|\,d\mu = 0.$$

(*) の右辺第 2 項についても同様に考えれば，

$$(**)\qquad \lim_{c\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,|f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

[18] [12](H7 熊本大 8) 参照.

（以上で，$\{f_n\}$ が一様可積分で f が可積分ならば $\{f_n - f\}$ も一様可積分とわかった.）

次に[19]，(**) から，$\epsilon > 0$ に対して，$\sup_{n \geqq 1} \int_{\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n - f|\, d\mu \leqq \frac{\epsilon}{4}$ となる $c > 0$ がある．この c に対して $\delta = \frac{\epsilon}{4c}$ とおくと，可測集合 $\Lambda \subset \mathbb{R}$ が $\mu(\Lambda) < \delta$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\Lambda\cap\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|\geqq c\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\Lambda\cap\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|>c\}} |f_n - f|\, d\mu \\
&\leqq \int_{\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|\geqq c\}} |f_n - f|\, d\mu + c\mu(\Lambda) \\
&\leqq \frac{\epsilon}{4} + c\delta = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

問題冒頭の仮定から，$M := \mu(\mathbb{R}) < \infty$，および，各点で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$．後者から f_n は f に確率収束する[20]から $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2M}\}) = 0$．よって n_0 が存在して $n \geqq n_0$ ならば $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2M}\}) < \delta$．$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2M}\}$ とおいて前段落の結果を用いると $\int_{\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|>\frac{\epsilon}{2M}\}} |f_n - f|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$．よって $n \geqq n_0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\int_\mathbb{R} |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|>\frac{\epsilon}{2M}\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{x\in\mathbb{R} | |f_n(x)-f(x)|\leqq\frac{\epsilon}{2M}\}} |f_n - f|\, d\mu \\
&\leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2M}\mu(\mathbb{R}) = \epsilon.
\end{aligned}$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} |f_n - f|\, d\mu = 0$.

[35] (H2 東工大 7).

(1) まず[21]，

$$(*1) \qquad \begin{aligned}
&\int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a\}} |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a\}} |f_n(x)|\, dx + \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a\}} |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a\}} |f_n(x)|\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a, |f_n(y)|>a'\}} |f_n(x)|\, dx + \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a, |f_n(y)|\leqq a'\}} |f_n(x)|\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|>a'\}} |f_n(x)|\, dx + a' \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)-f(y)|>a} 1\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|>a'\}} |f_n(x)|\, dx + \frac{a'}{a} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|>a'\}} |f_n(x)|\, dx + \frac{a'}{a} \left(\int_0^1 |f_n(x)|\, dx + \int_0^1 |f(x)|\, dx \right).
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は (**) から $a' \to \infty$ のとき n について一様に 0 に収束，第 2 項括弧内は

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x)|\, dx &\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|>a\}} |f_n(x)|\, dx + a \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|\leqq a\}} 1\, dx \\
&\leqq \int_{\{y\in[0,1] | |f_n(y)|>a\}} |f_n(x)|\, dx + a
\end{aligned}$$

[19]以下，本質的に [33](S62 阪大 8)(2) の解答と同じ.
[20][12](H7 熊本大 8) 参照.
[21]以下，[34](S62 名大 5)(3) の解答と同じ.

に注意すると，(**) から n について有界なので，a' を決めるごとに $a\to\infty$ のとき n について一様に 0 に収束．よって

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>a\}}|f_n(x)|\,dx=0.$$

(*1) の右辺第 2 項についても同様に考えれば,

$$(*2)\qquad \lim_{a\to\infty}\sup_{n\geqq 1}\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>a\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0.$$

（以上で，$\{f_n\}$ が一様可積分で f が可積分ならば $\{f_n-f\}$ も一様可積分とわかった.）

次に，(*2) から，$\epsilon>0$ に対して，$\displaystyle\sup_{n\geqq 1}\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>a\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx\leqq\frac{\epsilon}{4}$ となる $a>0$ がある．この a に対して $\delta=\dfrac{\epsilon}{4a}$ とおくと，可測集合 $\Lambda\subset[0,1]$ が $\displaystyle\int_\Lambda 1\,dx<\delta$ ならば任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_\Lambda|f_n(x)-f(x)|\,dx\\
&=\int_{\Lambda\cap\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>a\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_{\Lambda\cap\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|\leqq a\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx\\
&\leqq\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>a\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx+a\int_\Lambda 1\,dx\\
&\leqq\frac{\epsilon}{4}+a\delta=\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

小問の仮定 $f_n\to f$, a.e., から，f_n は f に確率収束する[22]から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>\frac{\epsilon}{2}\}}1\,dx=0$．よって n_0 が存在して $n\geqq n_0$ ならば $\displaystyle\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>\frac{\epsilon}{2}\}}1\,dx<\delta$．$\Lambda=\{y\in[0,1]\mid|f_n(y)-f(y)|>\frac{\epsilon}{2}\}$ とおいて前段落の結果を用いると $\displaystyle\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>\frac{\epsilon}{2}\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\epsilon}{2}$．よって $n\geqq n_0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\,dx\\
&=\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|>\frac{\epsilon}{2}\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_{\{y\in[0,1]||f_n(y)-f(y)|\leqq\frac{\epsilon}{2}\}}|f_n(x)-f(x)|\,dx\\
&\leqq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\int_0^1 1\,dx=\epsilon.
\end{aligned}$$

すなわち，(*) が成り立つ.

(2) まず[23]，(*) から $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して $n>n_0$ ならば $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\epsilon}{2}$.

次に，任意の可積分関数 $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ と $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，可測集合 $F\subset[0,1]$ の測度が δ 未満ならば $\displaystyle\int_F|g(x)|\,dx<\epsilon$ となるようにできる．実際，積分の（積分範囲に関する）連続性から $\displaystyle\lim_{K\to\infty}\int_{|g|>K}|g(x)|\,dx=0$ なので，$\displaystyle\int_{|g|>K}|g(x)|\,dx<\frac{\epsilon}{2}$ となる $K>0$ が存在するが，この K に対して $\delta=\dfrac{\epsilon}{2K}$ とおけば,

$$\int_F|g(x)|\,dx=\int_{F\cap\{|g|>K\}}|g(x)|\,dx+\int_{F\cap\{|g|\leqq K\}}|g(x)|\,dx\leqq\frac{\epsilon}{2}+K\int_F dx\leqq\frac{\epsilon}{2}+K\delta=\epsilon$$

となる．この結果から，必要ならば δ を小さく取り直すことで，有限個の積分を小さくすることができる．すなわち，任意の $\epsilon>0$ を以下固定すると，$\delta>0$ が存在して，$F\subset[0,1]$ が $\displaystyle\int_F 1\,dx<\delta$ を満たせば,

$$(*3)\qquad \int_F|f_n(x)|\,dx<\epsilon,\ 1\leqq n\leqq n_0\,,\quad\int_F|f(x)|\,dx<\frac{\epsilon}{2}$$

[22] [12](H7 熊本大 8) 参照.
[23] 以下，D. Williams, ‘Probability with martingales’, Cambridge, §13.7, に従う.

とできる．そこで，

$$\sup_{n\geqq 1}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \leqq \int_0^1 |f(x)|\,dx + \sup_{n\geqq 1}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

に注意すると，(*) から $M := \sup_{n\geqq 1}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx < \infty$ を得るので，(*3) の δ を用いて $a = \dfrac{M}{\delta}$ とおくと，チェビシェフの不等式から $\int_{|f_n|>a} 1\,dx \leqq a^{-1}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \leqq \delta$ となるから，(*3) の F として $\{|f_n| > a\}$ を用いることができる．$n = 1, 2, \cdots, n_0$ として順次適用すると，特に，$\int_{|f_n|>a} |f_n(x)|\,dx < \epsilon,\ 1 \leqq n \leqq n_0$, を得る．
また，(*3) の最後の式で $F = \{|f_n| > a\}$ としたものとこの小問の解答の冒頭で n_0 を決めた議論を合わせると，$n > n_0$ ならば

$$\int_{|f_n|>a} |f_n(x)|\,dx \leqq \int_{|f_n|>a} |f_n(x)-f(x)|\,dx + \int_{|f_n|>a} |f(x)|\,dx \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ n > n_0\,.$$

以上から，$\sup_{n\geqq 1}\int_{|f_n|>a} |f_n(x)|\,dx < \epsilon$. 任意の $\epsilon > 0$ に対してこれが十分大きな a に対して成り立つので (**) を得る．

[36] (H5 東工大 5).

(1) まず，問題の仮定 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ から，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > n_0$ ならば $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|\,dx < \dfrac{\epsilon}{2}$.
次に，任意の可積分関数 $g \in L^1(\mathbb{R})$ と $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，可測集合 $F \subset \mathbb{R}$ が $|F| < \delta$ ならば $\int_F |g(x)|\,dx < \epsilon$ となるようにできる．実際，積分の（積分範囲に関する）連続性から $\lim_{K\to\infty}\int_{|g|>K} |g(x)|\,dx = 0$ なので，$\int_{|g|>K} |g(x)|\,dx < \dfrac{\epsilon}{2}$ となる $K > 0$ が存在するが，この K に対して $\delta = \dfrac{\epsilon}{2K}$ とおけば，

$$\int_F |g(x)|\,dx = \int_{F\cap\{|g|>K\}} |g(x)|\,dx + \int_{F\cap\{|g|\leqq K\}} |g(x)|\,dx \leqq \frac{\epsilon}{2} + K|F| \leqq \frac{\epsilon}{2} + K\delta = \epsilon$$

となる．この結果から，必要ならば δ を小さく取り直すことで，有限個の積分を小さくすることができる．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ を以下固定すると，$\delta > 0$ が存在して，$F \subset \mathbb{R}$ が $|F| < \delta$ を満たせば，

$$(*)\qquad \int_F |f_n(x)|\,dx < \epsilon,\ 1 \leqq n \leqq n_0\,,\quad \int_F |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．そこで，

$$\sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx \leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx + \sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

に注意すると，問題の仮定 $f_n, f \in L^1$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ から，$M := \sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx < \infty$ を得るので，(*) が成り立つ δ を用いて $a = \dfrac{M}{\delta}$ とおくと，チェビシェフの不等式から $|\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > a\}| \leqq a^{-1}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx \leqq \delta$ となるから，(*) の F として $\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > a\}$ を用いることができる[24]．ここまで n は任意だったが，特に $n = n_1 > n_0$ と選んで，$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid |f_{n_1}(x)| \leqq a\}$ とおくと，(*) から

$$\int_{A_\epsilon^c} |f_n(x)|\,dx < \epsilon,\ 1 \leqq n \leqq n_0\,,\quad \int_{A_\epsilon^c} |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

[24] ここまで [35](H2 東工大 7)(2) の解答例の前半部分に同じ．この小問だけならば，あるいは，もっと弱い議論でいいのかもしれないが，どうせ次の小問で使うので用意した．

最後の式とこの小問の解答の冒頭で n_0 を決めた議論を合わせると，$n > n_0$ ならば

$$\int_{A_\epsilon^c} |f_n(x)|\,dx \leqq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{A_\epsilon^c} |f(x)|\,dx \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ n > n_0\,.$$

以上から，$\sup_{n \geqq 1} \int_{A_\epsilon^c} |f_n(x)|\,dx < \epsilon$. すなわち，$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid |f_{n_1}(x)| \leqq a\}$ は題意を満たす例である．

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，小問 (1) の解答冒頭と同様に，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n > n_0$ ならば $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx < \dfrac{\epsilon}{2}$.
この ϵ に対して小問 (1) の (*) が成り立つ $\delta > 0$ をとり，(*) の直後の議論で定義した a を用いて，各 $n = 1, \cdots, n_0$ に対して $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > a\}$ と選ぶと，(*) から特に $\int_{|f_n| > a} |f_n(x)|\,dx < \epsilon$ が（$1 \leqq n \leqq n_0$ に対して）成り立つ．
(*) の最後の式で $F = \{|f_n| > a\}$ としたものとこの小問の解答の冒頭で n_0 を決めた議論を合わせると，$n > n_0$ ならば

$$\int_{|f_n| > a} |f_n(x)|\,dx \leqq \int_{|f_n| > a} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{|f_n| > a} |f(x)|\,dx \leqq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ n > n_0\,.$$

以上から，$\sup_{n \geqq 1} \int_{|f_n| > a} |f_n(x)|\,dx < \epsilon$.
このとき，$|E| < \dfrac{\epsilon}{a}$ なる任意の可測集合 E に対して，

$$\int_E |f_n(x)|\,dx = \int_{E \cap \{|f_n| > a\}} |f_n|\,dx + \int_{E \cap \{|f_n| \leqq a\}} |f_n|\,dx \leqq \epsilon + a|E| \leqq 2\epsilon$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して $a > 0$ が存在して，$|E| \leqq \dfrac{\epsilon}{a}$ ならば $\sup_{n \geqq 1} \int_E |f_n(x)|\,dx \leqq 2\epsilon$ となるから $\lim_{|E| \to 0} \sup_{n \geqq 1} \int_E |f_n(x)|\,dx = 0$.

[37] (S60 九大 VII). $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t+h) - \phi(t)| \leqq \int_{\mathbb{R}} |e^{\sqrt{-1}hx} - 1|\,d\mu(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} |\sin \dfrac{hx}{2}|\,d\mu(x)$ において，被積分関数は有界（で，$\mu(\mathbb{R}) = 1$ なので）有界収束定理から

$$\varlimsup_{h \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t+h) - \phi(t)| \leqq 2 \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \to 0} |\sin \frac{hx}{2}|\,d\mu(x) = 0$$

だから ϕ は一様連続.

[38] (H2 東工大 13). $n\,(\hat{f}(\dfrac{1}{n}) - 1) = \int_{\mathbb{R}} n(\cos \dfrac{x}{n} - 1) f(x)\,dx + \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} n \sin \dfrac{x}{n} f(x)\,dx$ において右辺第 1 項の被積分関数は

$$|n(\cos \frac{x}{n} - 1) f(x)| = |2n \sin^2 \frac{x}{2n}\, f(x)| \leqq |2n \sin \frac{x}{2n}\, f(x)| \leqq |x f(x)|,$$

第 2 項の被積分関数は $|n \sin \dfrac{x}{n} f(x)| \leqq |x f(x)|$ であるが，題意から（$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 0$ と仮定しているので,）$x f(x)$ が可積分であることが前提になっているから，優収束定理によって極限 $n \to \infty$ と積分を交換できて

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} n\,(\hat{f}(\frac{1}{n}) - 1) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} n(\cos \frac{x}{n} - 1)\, f(x)\,dx + \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} n \sin \frac{x}{n}\, f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} \frac{-x^2}{2n} \left(\frac{\sin \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \right)^2 f(x)\,dx + \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} x \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right) f(x)\,dx \\
&= 0 + \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

よって $r_n = \hat{f}(\frac{1}{n}) - 1$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} nr_n = 0$ を意味するから，$\left|\hat{f}\left(\frac{1}{n}\right)^n\right| \leqq (1+|r_n|)^n \leqq e^{n|r_n|} \to 1$, $n\to\infty$, および，n が十分大きいとき，$\left|\hat{f}\left(\frac{1}{n}\right)^n\right| \geqq (1-|r_n|)^n \geqq e^{-2n|r_n|} \to 1$, $n\to\infty$, なので $\lim_{n\to\infty}\hat{f}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1$.

[39] (H5 阪大 8).

(1) $\frac{1}{h}(\hat{f}(t+h)-\hat{f}(t)) = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\, e^{\sqrt{-1}hx/2}\frac{\sin\frac{hx}{2}}{\frac{hx}{2}}\, xf(x)\,dx$ において，右辺の被積分関数の絶対値は $xf(x)$ 以下（h について一様）．題意から（$xf(x)$ が可積分なので）優収束定理から $h\to 0$ 極限と積分が交換できるので $\hat{f}$ の微分 $\hat{f}'$ が存在して

$$\hat{f}'(t) = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\lim_{h\to 0} e^{\sqrt{-1}hx/2}\frac{\sin\frac{hx}{2}}{\frac{hx}{2}}\, xf(x)\,dx = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\, xf(x)\,dx.$$

今の導出で f を $\sqrt{-1}xf$ とおくと，題意から $x^2f(x)$ も可積分なので，$\hat{f}''(t) = -\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\, x^2 f(x)\,dx$ も存在する．
さらに，$\hat{f}''(t+h)-\hat{f}''(t) = -\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}(e^{\sqrt{-1}hx}-1)\,x^2f(x)\,dx$ において，右辺の被積分関数は

$$|e^{\sqrt{-1}tx}(e^{\sqrt{-1}hx}-1)\,x^2f(x)| \leqq |\sin\frac{hx}{2}\,x^2f(x)| \leqq x^2f(x)$$

と，h によらない可積分関数で抑えられるので，再び優収束定理から

$$\lim_{h\to 0}\hat{f}''(t+h)-\hat{f}''(t) = -\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}tx}\lim_{h\to 0}(e^{\sqrt{-1}hx}-1)\,x^2f(x)\,dx = 0,$$

すなわち，$\hat{f}''$ は連続関数だから，$\hat{f}$ は C^2 級である．以上で得られた具体形と題意から，$\hat{f}(0)=1$, $\hat{f}'(0)0$, $\hat{f}''(0) = -1$ だから，$\hat{f}(t) = 1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$，すなわち，$\hat{f}(t) = 1-\frac{1}{2}t^2+t^2\epsilon(t)$ とおくと，ϵ は連続であって，$\epsilon(0)=0$.

(2) 小問 (1) の結果から，$\epsilon(0)=0$ を満たす連続関数 ϵ が存在して，任意の n に対して

$$\hat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1-\frac{t^2}{2n}(1-\epsilon(\frac{t}{\sqrt{n}}))\right)^n,\quad t\in\mathbb{R}.$$

$t\in\mathbb{R}$ を固定する．ϵ についてわかっていることから，任意の $1>\epsilon_0>0$ に対して $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geqq n_0$ ならば $|\epsilon(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leqq \epsilon_0$ とできる．よって，

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}(1+\epsilon_0)t^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}(1+\epsilon_0)\right)^n \leqq \varliminf_{n\to\infty}\hat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\hat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}(1-\epsilon_0)\right)^n = e^{-\frac{1}{2}(1-\epsilon_0)t^2}. \end{aligned}$$

$\epsilon\in(0,1)$ は任意だから $\epsilon_0\downarrow 0$ とすると,（挟み撃ちの原理によって）極限

$$\lim_{n\to\infty}\hat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

が存在することがわかる．

[40] (S60 熊本大 1).

(1) $y\in\mathbb{R}$ を固定する．h をパラメータとする関数（族）$g_h(x) := \frac{1}{h}(f(x,y+h)-f(x,y))$ は，y に関して微分可能なので平均値の定理から $g_h(x) = f_y(x,y+\theta(x,h)h)$ となる $0<\theta(x,h)<1$ が存在するが，

小問の仮定から $|g_h(x)| = |f_y(x, y+\theta(x,h)h)| \leqq \phi(x)$ となり，パラメータ h に無関係な可積分関数 ϕ で抑えられるので，優収束定理から h に関する極限と x に関する積分が交換できて，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y+h)\,dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right) = \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0} g_h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_y(x,y)\,dx.$$

すなわち $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$ は y に関して微分可能（で，微分係数は $\int_{\mathbb{R}} f_y(x,y)\,dx$）である．

(2) $|x| < 1$ ならば $1+|x|^{n-1} \leqq 2$，$|x| \geqq 1$ ならば $1+|x|^{n-1} \leqq 1+|x|^n$，なので全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $1+|x|^{n-1} \leqq 2(1+|x|^n)$ だから，ある n で $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^n)\,|g(x)|\,dx < \infty$ ならば $m < n$ なる任意の自然数 m に対して $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^m)\,|g(x)|\,dx < \infty$ となることにまず注意する．これをふまえて，n について帰納的に証明する．

まず $n = 1$ のとき，小問 (1) において $f(x,y) = e^{\sqrt{-1}xy}g(x)$ および $\phi(x) = (1+|x|)\,|g(x)|$ とおけば，$h(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}g(x)\,dx$ は微分可能で微分係数は $h'(y) = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}xg(x)\,dx$ である．さらに，$h'(y+h)-h'(y) = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}(e^{\sqrt{-1}xh}-1)xg(x)\,dx$ において $|e^{\sqrt{-1}xy}(e^{\sqrt{-1}xh}-1)xg(x)| \leqq 2|xg(x)|$ は仮定から可積分だから，優収束定理から $\lim_{h\to 0} h'(y+h) = h'(y)$ を得るので，導関数 h' は連続である．

次に，ある自然数 n について $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^{n+1})|g(x)|\,dx < \infty$ が成り立っているとする．このとき，以上の 2 段落から $h'(y) = \sqrt{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}xg(x)\,dx$ が存在して連続である．さらに n 階導関数 $h^{(n)}(y) = (\sqrt{-1})^n\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}x^n g(x)\,dx$ まで存在して連続であることが証明できているとすると，小問 (1) において，$f(x,y) = (\sqrt{-1})^n e^{\sqrt{-1}xy}x^n g(x)$ および $\phi(x) = (1+|x|^{n+1})\,|g(x)|$ とおけば，$h^{(n)}(y) = (\sqrt{-1})^n\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}x^n g(x)\,dx$ は微分可能で微分係数は $h^{(n+1)}(y) = (\sqrt{-1})^{n+1}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}xy}x^{n+1}g(x)\,dx$ である．さらに，$n = 1$ のときと全く同様に優収束定理から h^{n+1} は連続である．

よって帰納法により小問 (2) の主張が言えた．

[41] (S61 神戸大 3)．可測集合 $A \subset [0,1]$ のルベーグ測度を $|A|$ と書くことにする．

(1) f が非負値なので，測度の連続性から，

$$|\{x\in[0,1] \mid f(x)\neq 0\}| = \left|\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in[0,1] \mid f(x) > \frac{1}{k}\}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\{x\in[0,1] \mid f(x) > \frac{1}{k}\}\right|.$$

さらにチェビシェフの不等式と小問 (1) の仮定から全ての k について

$$\left|\{x\in[0,1] \mid f(x) > \frac{1}{k}\}\right| \leqq \int_{\{x\in[0,1]\mid f(x)>\frac{1}{k}\}} kf(x)\,dx \leqq k\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

よって，$|\{x\in[0,1] \mid f(x)\neq 0\}| = 0$，すなわち，ほとんどいたるところ $f = 0$．

(2) $L^2([0,1])$ の正規直交基底として

$$\sqrt{2}\sin 2\pi nx,\ \sqrt{2}\cos 2\pi nx,\ n\in\mathbb{N},\quad 1,$$

をとることができることを既知として解答する[25]．$f \in L^2$ なので，$\sum_{i=1}^{\infty}(c_i^2+d_i^2) < \infty$ なる実数列 $\{c_i\}, \{d_i\}$（すなわち，$\{c_i\}, \{d_i\} \in \ell^2$），および実数 e が存在して，$f(x) = e + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\sin 2\pi nx + d_n\cos 2\pi nx)$ と書ける．(右辺の関数項級数は $L^2([0,1])$ のノルムに関する収束.)

[25] Riemann–Lebesgue の定理（たとえば，伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，定理 29.2）に従えば，問題の主張は $f \in L^1([0,1])$ で成り立つ．実際，区間の外に 0 で拡張することで $f \in L^1 = L^1(\mathbb{R})$ とみなした後 Riemann–Lebesgue の定理の証明の骨子をたどると，滑らかな急減少関数の空間 $\mathcal{S}$ が L^1 の中で稠密であること，F とその近似 F^ϵ について $|F(\lambda) - F^\epsilon(\lambda)| \leqq \|f^\epsilon - f\|_1$ であること，$f^\epsilon \in \mathcal{S}$ ならば（あらわに微分することでわかることだが）$F^\epsilon \in \mathcal{S}$ であること（したがって特に，急減少なので $F^\epsilon(\lambda) \to 0$ であること），によって本小問の主張を得る．有界区間では $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ なので，この解法では L^2 という小問の仮定が無用の制限になることから，解答例では L^2 であることを用いた解答を工夫してみた．

どちらの解法も関数空間の知識を前提としている点が院試問題の解法としては気になるが，どちらの解法も，直感的には，f に対して 1

$\epsilon > 0$ を任意にとる．$\{c_i\}, \{d_i\} \in \ell^2$ なので，$n_0 = n_0(\epsilon)$ が存在して $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2) \leqq \epsilon^2$ とできる．この n_0 を用いて，$f^\epsilon(x) = e + \sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0-1}(c_n \sin 2\pi nx + d_n \cos 2\pi nx)$ とおき（右辺は有限項の和であることに注意），$F^\epsilon(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 f^\epsilon(x)\sin\lambda x\,dx$ とおく．
$\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$ のとき，定義とシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F^\epsilon(\lambda)|^2 &= 2\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n \int_0^1 \sin 2\pi nx \sin\lambda x\,dx + \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n \int_0^1 \cos 2\pi nx \sin\lambda x\,dx\right|^2 \\
&\leqq 2\sum_{n=n_0}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2)\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\left(\int_0^1 \sin 2\pi nx \sin\lambda x\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \cos 2\pi nx \sin\lambda x\,dx\right)^2\right) \\
&= 2\sum_{n=n_0}^{\infty}(c_n^2 + d_n^2)\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\left(\frac{2n\pi\sin\lambda}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

$\lambda = 2m\pi \geqq 2n_0\pi$ のときは，後ろの n に関する和の $n = m$ のところの寄与が，積分を計算しなおせばすぐ分かるように，1/4 になる．
後ろの n に関する和を調べる．各項は，任意の $\lambda > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\frac{2n\pi\sin\lambda}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2 \leqq \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda - 2n\pi}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\lambda}{\lambda - 2n\pi}\right)^2 \leqq \frac{5}{(\lambda - 2n\pi)^2}$$

および，三角関数の周期性に注意すると $|\sin\lambda| = |\sin(\lambda - 2n\pi)| \leqq |\lambda - 2n\pi|$ などから，

$$\left(\frac{2n\pi\sin\lambda}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda^2 - (2n\pi)^2}\right)^2 \leqq \left(\frac{2n\pi}{\lambda + 2n\pi}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2n\pi}\right)^2 \leqq 1$$

階微分可能で導関数が可積分な近似関数族 f^ϵ, $\epsilon > 0$, があれば，$\left|\int f(x)\sin\lambda x\,dx - \int f^\epsilon(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqq \int |f(x) - f^\epsilon(x)|\,dx \to 0$, $\epsilon \to 0$, および，$\displaystyle\int_0^1 f^\epsilon(x)\sin\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}\left(-[f^\epsilon(x)\cos\lambda x]_0^1 + \int_0^1 f^{\epsilon\prime}(x)\,\cos\lambda x\,dx\right) \to 0$, $\lambda \to \infty$, によって主張が証明できる，という着想が背後にあるので，本小問にも，関数空間の知識を用いない，より初等的・具体的な解答例があるかもしれない．

（20200820 追記．以上の脚注について，福島竜輝先生から以下の指摘を頂いた．元の問題（特に元の問題がなぜ L^2 空間に言及しているかという謎）に対する位置づけは私にはわかっていないが，第 3 分冊「収束定理（1）と Fubini の定理の問題」[42]](H7 都立大 8)(1) への参照を含むなど，それ自体が有益な内容と思うので，以下に記録しておく.）

脚注で微分可能な関数による近似の議論に言及されていますが，連続関数による近似で十分です．これも関数空間の知識と言えますが,「収束定理（1）と Fubini の定理 [42](1)」でも使っているので，院試で問う知識として許容範囲かと思います．以下では「収束定理（1）と Fubini の定理 [42](1)」の結果を使った別証明を書いておきます（Riemann–Lebesgue の補題の証明としては標準的な議論で，私のアイデアではありません）．最後におまけで L^2 をあえて使って部分点を取りに行く方法も書いておきます．三角関数系の正規直交性は使いますが，完全性は使わないという意味で易しいです．

別証明． $f \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ と $|\sin(\lambda x)| \leqq 1$ に注意すると，問題の積分は有限確定値である．変数変換により

$$\int_0^1 f(x)\sin(\lambda x)dx = \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{1+\frac{\pi}{\lambda}} f(x - \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda(x - \frac{\pi}{\lambda}))dx = -\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{1+\frac{\pi}{\lambda}} f(x - \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda x)dx$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_0^1 f(x)\sin(\lambda x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^1 (f(x) - f(x - \frac{\pi}{\lambda}))\sin(\lambda x)dx\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)dx\right| + \left|\int_1^{1+\frac{\pi}{\lambda}} f(x - \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda x)dx\right| \\
&\leqq \int_{\mathbb{R}} |f(x)1_{[0,1]}(x) - f(x - \frac{\pi}{\lambda})1_{[0,1]}(x - \frac{\pi}{\lambda})|dx + \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)|dx + \int_{1-\frac{\pi}{\lambda}}^1 |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

ここで $|\lambda| \to \infty$ において，右辺第一項は平行移動の $L^1(\mathbb{R})$ での連続性（第 3 分冊「収束定理（1）と Fubini の定理の問題」[42]](H7 都立大 8)(1) 参照）により 0 に収束し，第二，三項は Lebesgues の収束定理により 0 に収束する．

$\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$ **に限って「部分点を取る」なら．** $s_n(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi nx)$ とおくと，$\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2([0,1])$ の正規直交系であることは，直接計算で確かめられる．従って

$$\|f\|_{L^2}^2 - \sum_{|k|\leqq n}(f, s_n)_{L^2}^2 = \left\|f - \sum_{|k|\leqq n}(f, s_n)_{L^2}s_n\right\|_{L^2}^2 \geqq 0.$$

従って $\|f\|_{L^2}^2 \geqq \sum_{|k|\leqq n}(f, s_n)_{L^2}^2$ であり（これはもちろん Bessel の不等式であり，知っていればここまでの議論は省略可能），とくに右辺の級数が $n \to \infty$ で収束するから，$(f, s_n)_{L^2} = \int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx \to 0$, $n \to \infty$, である．

である.（$\lambda = 2n\pi$ のときは上に書いたように 1/4 に等しい.）よって,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left((\frac{2n\pi\sin\lambda}{\lambda^2-(2n\pi)^2})^2+(\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda^2-(2n\pi)^2})^2\right) \leqq 3+\sum_{n<\frac{\lambda}{2\pi}-1}\frac{5}{(\lambda-2n\pi)^2}+\sum_{n>\frac{\lambda}{2\pi}+1}\frac{5}{(2n\pi-\lambda)^2}$$
$$\leqq 3+\sum_{m\geqq 1}\frac{5}{4\pi^2m^2}+\sum_{m\geqq 1}\frac{5}{4\pi^2m^2} =: C < \infty.$$

$\lambda < 0$ のときも明らかに同じ評価が成り立つよって

$$|F(\lambda)-F^{\epsilon}(\lambda)| \leqq \sqrt{2C\sum_{n=n_0}^{\infty}(c_n^2+d_n^2)} \leqq \sqrt{2C}\epsilon.$$

同様に，あらわな積分計算で,

$$F^{\epsilon}(\lambda) = e\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{n_0-1}c_n\frac{2n\pi\sin\lambda}{\lambda^2-(2n\pi)^2}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{n_0-1}d_n\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\lambda^2-(2n\pi)^2}$$

となるが，右辺は有限項の和で，各項は $|\lambda|\to\infty$ で 0 に収束するから $\lim_{|\lambda|\to\infty}F^{\epsilon}(\lambda)=0$.

以上から,

$$\varlimsup_{|\lambda|\to\infty}|F(\lambda)| \leqq \lim_{|\lambda|\to\infty}|F^{\epsilon}(\lambda)|+\varlimsup_{|\lambda|\to\infty}|F(\lambda)-F^{\epsilon}(\lambda)| \leqq \sqrt{2C}\epsilon.$$

$\epsilon > 0$ は任意だから $\lim_{|\lambda|\to\infty}F(\lambda)=0$.

[42] (S63 名大 7). X, z が実数なので $\Re(e^{\sqrt{-1}zX}) \leqq 1$ であり，$\Re(e^{\sqrt{-1}zX}) = 1$ となるのは $e^{\sqrt{-1}zX}=1$ となるときそのときに限る，すなわち，$zX \in 2\pi\mathbb{Z}$ となるときそのときに限ることに，まず注意しておく.

(ii)⇒(iii) は自明なので，(iii)⇒(ii)，(ii)⇒(i)，(i)⇒(ii)，の順に証明する．ϕ の複素共役を $\bar{\phi}$ と書く.

(iii)⇒(ii)．(iii) から $\mathrm{E}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X}\,] = \phi(2\pi) = 1$ なので，解答最初の注意において $z = 2\pi$ とすると，$\mathrm{P}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X} = 1\,] = 1$．したがって，$\bar{\phi}(z) = \mathrm{E}[\, e^{-\sqrt{-1}zX}\,] = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}(2\pi-z)X}\,]$ となるが，$\pi < z < 2\pi$ のとき $0 < 2\pi - z < \pi$ だから，(iii) から $\bar{\phi}(z) \neq 1$．よって $\phi(z) \neq 1$.

(ii)⇒(i)．(ii) から $\mathrm{E}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X}\,] = \phi(2\pi) = 1$ なので，解答最初の注意において $z = 2\pi$ とすると，$\mathrm{P}[\, X \in \mathbb{Z}\,] = \mathrm{P}[\, 2\pi X \in 2\pi\mathbb{Z}\,] = 1$．$a$ を 2 以上の自然数とすると，(ii) から $1 > \phi(\frac{2\pi}{a}) = \mathrm{E}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X/a}\,]$．解答最初の注意から，$1 > \mathrm{P}[\, 2\pi X/a \in 2\pi\mathbb{Z}\,] = \mathrm{P}[\, X \in a\mathbb{Z}\,]$.

(i)⇒(ii)．前半は，$\mathrm{P}[\, X \in \mathbb{Z}\,] = 1$ だから $\mathrm{P}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X} = 1\,] = 1$ なので，$\phi(2\pi) = \mathrm{E}[\, e^{2\pi\sqrt{-1}X}\,] = 1$.

後半は，$\phi(z) = 1$ とすると，解答最初の注意から $\mathrm{P}[\, zX \in 2\pi\mathbb{Z}\,] = 1$．$\mathrm{P}[\, X \in \mathbb{Z}\,] = 1$ だから，$\frac{z}{2\pi}$ が無理数ならばこれは起きないので $\phi(z) \neq 1$．$\frac{z}{2\pi}$ が有理数 $\frac{b}{a}$（$a, b \in \mathbb{Z}$）ならば，$0 < z < 2\pi$ のとき $0 < |b| < |a|$ なので，bX が a の倍数であるためには X が a の倍数でなければいけないので，(i) から,

$$\mathrm{P}[\, zX \in 2\pi\mathbb{Z}\,] = \mathrm{P}[\, bX \in a\mathbb{Z}\,] \leqq \mathrm{P}[\, X \in a\mathbb{Z}\,] < 1.$$

よって $\phi(z) \neq 1$.

[43] (H5 筑波大 7).

(1) $n \geqq 2\pi$ として，$n = 2\pi m + r$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqq r < 2\pi$, とおく.

$$\left|\int_{2\pi m}^{2\pi m+r}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqq \frac{r}{2\pi m} < \frac{1}{m} \to 0,\quad n\to\infty,$$

だから，$n = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, の場合だけ調べればよい.

$$\int_0^{2\pi m}\frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(2\pi k+t)}{2\pi k+t}+\frac{\sin(2\pi k+\pi+t)}{2\pi k+\pi+t}\right)dt = \sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{(2\pi k+t)(2\pi k+\pi+t)}\,dt$$

の右辺は各項正で，$0 \leqq \sin t \leqq 1$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ および分母を小さくして評価すれば，

$$\int_0^{2\pi m} \frac{\sin t}{t}\,dt \leqq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\pi^2}{(2\pi k)^2} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2} < \infty$$

となって，m についての数列として上に有界だから，$m \to \infty$ で収束する．よって $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin t}{t}\,dt$ が存在する．

(2)(a) 積分変数変換 $y = x + \frac{t}{n}$ と $s = -t$ によって

$$\int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy = \int_{-nx}^{n(1-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{-n(1-x)}^{nx} \frac{\sin s}{s}\,ds.$$

よって，$x = 0$ または $x = 1$ のときは小問 (1) からただちに $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy = \alpha$．$x > 1$ のときは，小問 (1) から $\lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{\sin s}{s}\,ds = \alpha$ が存在するので

$$\int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy = \int_{n(x-1)}^{nx} \frac{\sin s}{s}\,ds. = \int_0^{nx} \frac{\sin s}{s}\,ds - \int_0^{n(x-1)} \frac{\sin s}{s}\,ds \to \alpha - \alpha = 0 \quad (n \to \infty).$$

$x < 0$ のときも全く同様である．最後に $0 < x < 1$ のときも同様に，$n \to \infty$ で

$$\int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy = \int_{-nx}^{0} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^{n(1-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{nx} \frac{\sin s}{s}\,ds + \int_0^{n(1-x)} \frac{\sin t}{t}\,dt \to 2\alpha.$$

(b) $g_n(x) = \int_0^1 \frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dy$ とおく．明らかに $g_n(x)$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して実数値であり，x の各点で小問 (a) の極限 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ を持つ．小問 (b) の主張の左辺の中の被積分関数は $\mathbb{R} \times [0,1]$ 上の可積分関数（細かく言えば，2 次元ルベーグ測度 0 の集合 $\{(x,x) \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ を除いて定義された可測関数で，絶対値が $n|f(x)|$ で抑えられていることから積分が有限）なので，フビニの定理から，

$$\int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dx \right\} dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g_n(x)\,dx.$$

さらに小問 (1) の解答例を見直すと，$n \geqq 2\pi$ のとき $\left| \int_0^n \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leqq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2}$ なる n について一様な評価が証明済みなので，小問 (a) でこの結果の使い方を追いかけると，$|g_n(x)| \leqq 2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2} =: c$ と，n, x について一様に抑えられるから，$|f(x)g_n(x)| \leqq c|f(x)|$ となって，可積分な関数による n について一様な評価があることがわかるので，優収束定理から n に関する極限と積分を交換できて，小問 (a) の結果を使えば，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\frac{\sin n\,(y-x)}{y-x}\,dx \right\} dy &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g_n(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = 2\alpha \int_0^1 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

[44] (H8 大阪市大 D1)．積分変数変換 $y = nx$ によって，$\int_{\mathbb{R}} n\,h(nx)\,f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,f(\frac{x}{n})\,dx$．$f$ が有界なので $|f(x)| \leqq M$, $x \in \mathbb{R}$, となる定数 $M > 0$ があるから，右辺の被積分関数の大きさは可積分関数 Mh で n に関して一様に抑えられる．よって優収束定理から積分と極限が交換できて，f が連続という仮定にも注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\,h(nx)\,f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\,f(\frac{x}{n})\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{n})\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,f(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n})\,dx = f(0).$$

[45] (H4 金沢大 6)．積分変数変換 $z = ny$ によって，$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x - \frac{z}{n})\,f(z)\,dz$ と書ける．

(1) g が有界，すなわち，$|g(x)| \leqq M,\ x \in \mathbb{R},$ なる $M > 0$ が存在するから，$|g_n(x)| \leqq M \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\,dz,$ $x \in \mathbb{R}$．題意から f は可積分だから，g_n も $\mathbb{R}$ 上有界．さらに g が一様連続，すなわち，$h > 0$ だけで決まる $\epsilon(h) > 0$ が存在して $\lim_{h\downarrow 0} \epsilon(h) = 0$，および，$|g(y+h) - g(y)| \leqq \epsilon(h),\ y \in \mathbb{R},\ h > 0,$ が成り立つので，

$$|g_n(x+h) - g_n(x)| \leqq \int_{\mathbb{R}} |g(x - \frac{z}{n} + h) - g(x - \frac{z}{n})|\,|f(z)|\,dz \leqq \epsilon(h) \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\,dz$$

が y に無関係に（一様に）成り立つ．すなわち，g も一様連続．

(2) 問題の仮定から $g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,f(z)\,dz$ である．よって，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (g(x - \frac{z}{n}) - g(x))\,f(z)\,dz \right| \leqq \int_{\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - g(x - \frac{z}{n})|\,|f(z)|\,dz \\ &\leqq \int_{\mathbb{R}} \epsilon(\frac{z}{n})\,|f(z)|\,dx.\end{aligned}$$

g が有界なので，小問 (1) の定義から ϵ も有界（$2\sup_x |g(x)|$ 以下）にとれる．よって優収束定理から n についての極限と積分が交換できて

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \leqq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \epsilon(\frac{z}{n})\,|f(z)|\,dx = 0.$$

よって，g_n は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上一様に g に収束する．

[46] (H6 阪大 8)．F は有界なので $|F(x)| \leqq M,\ x \in \mathbb{R},$ となる $M > 0$ が存在する．また，F が（原点で）連続なので，任意の $\epsilon > 0$ に対して $a > 0$ が存在して，$|\delta| \leqq a$ ならば $|F(\delta) - F(0)| < \epsilon$．この a を用いて（$\delta = g_n(x)$ とおくことで），$h \geqq 0$ と $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 1$ も使うと，

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}} F(g_n(x))\,h(x)\,dx - F(0) \right| \\ &\leqq \int_{\mathbb{R}} |F(g_n(x)) - F(0)|\,h(x)\,dx \\ &= \int_{\{x||g_n(x)|>a\}} |F(g_n(x)) - F(0)|\,h(x)\,dx + \int_{\{x||g_n(x)|\leqq a\}} |F(g_n(x)) - F(0)|\,h(x)\,dx \\ &\leqq 2M \int_{\{x||g_n(x)|>a\}} h(x)\,dx + \epsilon \int_{\{x||g_n(x)|\leqq a\}} h(x)\,dx \\ &\leqq 2M \int_{\{x||g_n(x)|>a\}} h(x)\,dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 2M \int_{\{x||g_n(x)|>a\}} h(x)\,dx + \epsilon.\end{aligned}$$

よって問題にあるもう一つの仮定から，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{\mathbb{R}} F(g_n(x))\,h(x)\,dx - F(0) \right| \leqq \epsilon.$$

$\epsilon > 0$ は任意だから，$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F(g_n(x))\,h(x)\,dx = F(0)$.

[47] (H1 東大 10)．条件から任意の $\xi \in \mathbb{R}$（任意の $\xi \in \mathbb{C}$ でも可だが）に対して，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Omega} (\sqrt{-1}\xi u(x))^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Omega} (\sqrt{-1}\xi v(x))^k\,dx$$

だが，Ω が有界で u, v が有界なので，有界収束定理から k についての和と積分が交換できて，$\int_{\Omega} e^{\sqrt{-1}\xi u(x)}\,dx = \int_{\Omega} e^{\sqrt{-1}\xi u(x)}\,dx,\ \xi \in \mathbb{R}$．これは，$\mathrm{P}[\ \cdot\ ] := \dfrac{\mu(\cdot)}{\mu(\Omega)}$ を確率測度とする確率空間 (Ω, P) 上の可積分関数（確率変数）$u:\ \Omega \to \mathbb{R}$ と $v:\ \Omega \to \mathbb{R}$ の特性関数 $\mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}\xi u}\ ]$ と $\mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}\xi u}\ ]$ が等しいことを意味するので，(Levi の反転公式を思い出せば) u と v の分布が等しいことがわかり，それらの分布関数が等しいことがわかる．すなわち，$\mu(\{x \in \Omega \mid u(x) > c\}) = \mu(\{x \in \Omega \mid v(x) > c\})$ を得る．

[48] (H9 山形大 9).

(1) フビニの定理とルベーグ測度の平行移動不変性と仮定から，

$$\int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|\,dm(x) \leqq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dm(x) \right) |g(y)|\,dm(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dm(x) \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dm(y) < \infty.$$

よって $f*g \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) 積分変数変換 $y = x - y'$ とルベーグ測度の平行移動・対称移動不変性から，

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y')g(x-y')\,dm(y') = g*f(x).$$

また，フビニの定理と積分変数変換 $z = y' - y$ とルベーグ測度の平行移動不変性 から

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-y)h(y)\,dm(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y-z)g(z)h(y)\,dm(y)\,dm(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y')g(y'-y)h(y)\,dm(y)\,dm(y') = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y')(g*h)(y')\,dm(y') \\ &= f*(g*h)(x).\end{aligned}$$

(3) $p=1$ については，(1) で $\|f*g\|_1 \leqq \|f\|_1 \|g\|_1$ を証明済みなので，以下 $1<p<\infty$ とし，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$ で $1<p^*<\infty$ を定義する．Hölder の不等式 $\|h_1h_2\|_1 \leqq \|h_1\|_p \|h_2\|_{p^*}$ と Fubini の定理とルベーグ測度の平行移動不変性から

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p^p = \|g*f\|_p^p &\leqq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (|g(x-y)|\,|f(y)|^{1/p})\,|f(y)|^{1/p^*}\,dm(y) \right)^p dm(x) \\ &\leqq \int_{\mathbb{R}^2} |g(x-y)|^p |f(y)|\,dm(x)\,dm(y) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dm(y) \right)^{p/p^*} \\ &\leqq \|g\|_p^p \|f\|_1 \|f\|_1^{p/p^*} = (\|f\|_1 \|g\|_p)^p.\end{aligned}$$

よって，$\|f*g\|_p \leqq \|f\|_1 \|g\|_p$.

[49] (S60 富山大 BV)．まず (1) を仮定すると，$\epsilon > 0$ が存在して

$$\inf_{n \geqq 1} \int_0^1 |f_n|\,d\mu \geqq \inf_{n \geqq 1} \int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu \geqq \epsilon \inf_{n \geqq 1} \mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n|(x) > \epsilon\}) > 0.$$

よって (2) が成り立つ．

次に (2) を仮定して，$\epsilon = \dfrac{1}{2} \inf\limits_{n \geqq 1} \displaystyle\int_0^1 |f_n|\,d\mu > 0$ とおくと，

$$\begin{aligned}\epsilon + \int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu &\geqq \epsilon\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n|(x) \leqq \epsilon) + \int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu \\ &\geqq \int_{|f_n|\leqq\epsilon} |f_n|\,d\mu + \int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu = \int_0^1 |f_n|\,d\mu \geqq 2\epsilon.\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu \geqq \epsilon$．シュワルツの不等式と問題の仮定 $\displaystyle\int_0^1 f_n^2\,d\mu \leqq 1$ から，

$$\int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|\,d\mu \leqq \sqrt{\int_{|f_n|>\epsilon} |f_n|^2\,d\mu \int_{|f_n|>\epsilon} 1\,d\mu} \leqq \sqrt{\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n|(x) > \epsilon\})}$$

よって，$\mu(\{x \in [0,1] \mid |f_n|(x) > \epsilon\}) \geqq \epsilon^2$．右辺は n によらないから (1) が成り立つ．

[50] (H1 奈良女大 I)．$\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ を満たす連続関数 Φ の全体が $L^2(0,1)$ で稠密である（任意の 2 乗可積分関数を近似すること）を使えば，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\|\Phi_\epsilon - f\|_2 < \epsilon$ となる連続関数 Φ_ϵ が取

れるから，仮定と合わせると $\|\Phi_\epsilon\|_2^2 + \|f\|_2^2 < \epsilon$ となる．よって $\|f\|_2 = 0$ を得て， $|f|^2 = 0$, a.e., すなわち，f はほとんどいたるところ 0 に等しい[26].

[51] (H3 北大 13). $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{n}((n+1)x^n - 1)$ で $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を定義すると $f_n \in \mathcal{X}$ と $\Phi_n(f_n) = \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$ と

$$0 \leqq \int_0^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx = 2 - 2\frac{\sqrt{2n+1}}{n}(n+1)\int x^n f(x)dx,\ f \in \mathcal{X},$$

が，具体的な計算からわかる．最後の不等式から $f \in \mathcal{X}$ に対して $\displaystyle\int x^n f(x)dx \leqq \frac{n}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$ なので，

(1) $M_n = \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2n+1}}$,
(2) $f_{max} = f_n$,

である[27].

[26] ボレル可測集合は内側から閉集合，外側から開集合で近似できることを使えば，もう少し「教科書の最初のほうの知識」で証明できると思う．実際，$A_k = \{x \in (0,1) \mid f(x) \geqq 1/k\}$ を近似する $F_k \subset A_k \subset G_k$ をとって，F_k 上で 1，$G_k^c \cup \{0,1\}$ 上で 0 となる連続関数 $d_k : [0,1] \to [0,1]$ をとることで，A_k の測度が 0 であることが言える．$k > 0$ が任意だから，$f \leqq 0$, a.s.. 同様に $f \geqq 0$, a.s. も言える．

[27] f_n の具体形は，未定乗数法と汎関数微分によって λ と μ を定数として $F(f) = \displaystyle\int_0^1 (x^n f(x) + \lambda f(x)^2 + \mu f(x))dx$ に対して $(\delta F)(x) = x^n + 2\lambda f(x) + \mu = 0$ と f への条件たちを連立させて解けば得られる．解答は (1)(2) を同時に解いているので出題者の想定する解答では無いと思うが，出題意図はわからなかった．今のところ役には立たないが，フーリエ展開を用いた (1) の初期の解答を以下に残しておく．

$L^2([0,1])$ の正規直交基底として $\sqrt{2}\sin 2\pi kx$，$\sqrt{2}\cos 2\pi kx$，$k \in \mathbb{N}$， 1, をとることができることを既知として解答する．題意から， (*) $\mathcal{X} = \{e + \sum_{k\geqq 1} c_k\sqrt{2}\sin 2\pi kx + \sum_{k\geqq 1} d_k\sqrt{2}\cos 2\pi kx \mid e = 0,\ \sum_{k\geqq 1}(c_k^2 + d_k^2) = 1,\ \{c_k, d_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}\}$ である．$I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin 2\pi kx\, dx$， $J_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 x^n \cos 2\pi kx\, dx$， $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, とおくと，$f_n(x) = \sum_{k\geqq 1} c_{n,k}\sqrt{2}\sin 2\pi kx + \sum_{k\geqq 1} d_{n,k}\sqrt{2}\cos 2\pi kx \in \mathcal{X}$ に対して $\Phi_n(f) = \sqrt{2}\sum_{k\geqq 1}(c_{n,k}I_{n,k} + d_{n,k}J_{n,k})$ となるから，シュワルツの不等式と (*) にある規格化条件から，$|\Phi_n(f_n)|^2 \leqq 2\sum_{k\geqq 1}(c_{n,k}^2 + d_{n,k}^2)\sum_{k\geqq 1}(I_{n,k}^2 + J_{n,k}^2) = 2\sum_{k\geqq 1}(I_{n,k}^2 + J_{n,k}^2)$ となり，等号は $c_{n,k} = A_n I_{n,k}$, $d_{n,k} = A_n J_{n,k}$ となる実定数 A_n が存在するとき，そのときに限る．(*) から $A_n = \dfrac{-1}{\sqrt{\sum_{k\geqq 1}(I_{n,k}^2 + J_{n,k}^2)}}$ である．（具体的に計算すると分かるように，各 n ごとに $I_{n,k} = O(\frac{1}{k})$ および $J_{n,k} = O(\frac{1}{k})$ なので，$\sum_{k\geqq 1}(I_{n,k}^2 + J_{n,k}^2) < \infty$ であることに注意.）特に，$M_n = \sup_{f\in\mathcal{X}} \Phi_n(f) = \Phi_n(f_n) = \sqrt{2}\sqrt{\sum_{k\geqq 1}(I_{n,k}^2 + J_{n,k}^2)}$ を得る．たとえば，$I_{1,k} = \dfrac{-1}{2\pi k}$, $J_{1,k} = 0$, $I_{2,k} = \dfrac{-1}{2\pi k}$, $J_{2,k} = \dfrac{2}{(2\pi k)^2}$, などから，$M_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\sum_{k\geqq 1}\dfrac{1}{k^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{6}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = 0.288675\cdots$， $M_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\sum_{k\geqq 1}\dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum_{k\geqq 1}\dfrac{1}{k^4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\pi^4}{90}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} = 0.298\cdots$.