# 測度論

kaiseki1.lec(tex)
服部哲弥

19951228–19960131;0204–14;16–26;0329;
0410;0506;22;0603-05;08;20;0707;09;11-22;24-28;30;0807;12-24;27;28;
19970104($\sigma$ 加法性,$F=\mu$);0212(動機，微分と積分の関係);
0429($\sigma$-加法族定義可算和 $A_n$ 抜け);
1221(可測関数定義値域無限大付加補題証明 $\subset \to \in$);
20000529;30($L^p$ 整理);
20050323(既約分数の subsubsection $phi \to \emptyset$); 24(§可測集合の位相的性質　誤植); 0926(§部分積分　概容
→概要，$Omega \to \Omega$，);

章目次



かんどころ

- 可測集合の定義 $\Longleftrightarrow$ 内測度＝外測度 ((5), 命題 11)
- 可測関数の定義 $\Longleftrightarrow$ 値域が順序集合の時の単関数近似の仕方 (§5.2) （cf. ベクトル値積分 (§16.3)）
- 積分の定義 $\Longleftrightarrow$ 面積（直積測度）としての積分 (定理 100)
- $\sigma$ 有限性 $\Longrightarrow$ Hopf の拡張定理 (§4.2)，完備化 (§4.3)，Fubini の定理 (§8)，Radon–Nikodým の定理 (§12)
- Lebesgue 積分不可能な Riemann 広義積分 (§16.2.4) $\Longleftrightarrow$ 極限との相性（面積の描像）か積分の値かの選択
- Radon–Nikodým（密度の存在）(§12) $\Longrightarrow$ 条件付確率・期待値の一意存在（cf. ベクトル値積分 (§16.3)）
- Stieltjes 積分 (§14) $\Longrightarrow$ 変数変換，部分積分，不定積分の微分
- 一般論の技術的簡明（例）
  - 直積測度→多重積分と逐次積分
  - 極限と積分の可換性→ $L^p$ 空間の完備性

# 第 0 章 準備

この章は定義を省略，次節から定義と証明．

## §-1. イントロ（講義概要，動機づけ）

01

（積分の定義の）一般化が役に立つためには…次のことが成立しなくてはならない：

(i) 線型性 $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, $\int f+g = \int f + \int g$,

(ii) Riemann の定義を含む,

(iii) １変数の場合と多変数の場合の間に著しい差がない,

(iv) 導関数である関数の不定積分は原始関数になる： $\int g' = g$.

私が採用した定義は…全ての条件を満足している．しかし…提案した定義が条件を満たすただ一つのものであることを証明できなかったので，それが自然…ということを示すことを私は試みた．さらに，それが有用であることを示すことを私はやってみた[1]

なぜ測度論を勉強するか？普通の宣伝文句：ルベーグ積分は極限と積分の交換や積分順序の交換が弱い条件の下で成り立つ．しかし，数学のおもしろさは単なる道具としてではないはず！そこで，文化（ものの見方）としての測度論.

長さ・面積といった言葉は何を表すか？図形の大きさ？図形とは点の集合だから，集合の大きさということ．では，任意の集合に対して矛盾なく面積を定義できるのか？

古典的な解析的方法（極限に基づく解析）には **微分** と **積分** がある．集合論の上にこれらを構築するとき：

| | |
|---|---|
| 解析⇔集合論 | 集合族 |
| 微分⇔位相 | 開集合族 |
| 積分⇔測度 | $\sigma$ 加法族 |

しかし，一般には微分と積分は不整合．関数空間上に Wiener 測度はあるが，Lebesgue 測度はない．この不整合は，解析という研究が自明でない内容を持つ根拠と言えるかも知れない．不整合を埋める努力が解析学を通した数学の進歩.

**測度** 長さ（面積，体積）という素朴な概念の究極の理想化・精密化・普遍化・抽象化.

**素朴** 有限加法性，区間についての平行移動不変性，直積測度としての面積,

**理想性** （本質，厳密性） $\sigma$（可算）加法性と正値性を持つ集合関数,

**精密性** （大抵可測になる） 可測集合,

**普遍性** （数学の広範な分野で用いる） 素朴な直感のない集合にも豊かな内容を持つ測度が定義できる（例 Wiener 測度（関数の集合上の測度））[2],

**抽象性** （素朴でない部分） 稠密な零集合，Cantor 集合，測度正の疎な閉集合，など[3].

**積分** 面積（測度）という視点での積分の精密化・一般化と可測関数の概念的普遍性,

**素朴** Riemann 積分，有限線型性，面積としての積分,

$$\int_A \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) dx \,,$$

$$\int_A \left( \int_B f(x,y) dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x,y) dy \right) dx = \int_{A\times B} f(x,y) dx dy \,,$$

[1][Lebesgue, §40 (p.56)]
[2]cf. Lebesgue 積分をいきなり定義する [州之内] のは普遍性の点で難があると思う.
[3][志賀浩二, p.106] は,（Borel 測度は）抽象性を零集合の部分としているが，測度正の疎な閉集合はそうではないと思う

**一般性** （数学的利用価値） robustness（極限との可換性 [伊藤清三, p.2] ←積分の幾何学的定義）→積分を用いた関数のノルムに基づく関数空間の完備性→関数解析,

**普遍性** 値域が順序集合でない関数（Banach 空間値関数など）の積分を定義できる可能性.

**密度** 符号付き測度（加法的集合関数）としての不定積分→微積分学,

**Radon–Nikodým** 測度の「比」としての 密度 → 条件付確率・期待値の一意存在,

**Stieltjes 積分** 変数変換，部分積分，不定積分の逆演算としての微分.

# §0. 集合論の基礎事項（復習）

## §0.1. 集合算

全体集合 $\Omega$ [4]，空集合 $\phi$，集合の（有限）和・(有限）積（共通部分，交わり）集合の無限和・無限積（可算 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}$, 非可算 $\displaystyle\bigcup_{i\in\Lambda}$）.

**例** $A_i = A_3$, $i \geq 3$, のとき $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ （有限和）.

直和・単純和 $A+B$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, cf. 和集合「$A$ または $B$」両方に入っていてもいい．補集合，差.

注．交換，結合（$\bigcup$ などの記号はこの事実を意識），分配，de Morgan，は無限和でも成立.

**例 1,2** [伊藤清三, p.7] 無限個の場合の分配法則と de Morgan の公式.

**例 3** 集合 $\Lambda$ (index set) で番号づけられた集合たち $A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. $B_{\lambda,1} = A_\lambda$, $B_{\lambda,0} = {A_\lambda}^c$, とおくと,

$$\Omega = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup {A_\lambda}^c) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_{\lambda,\sigma(\lambda)}\,.$$

ここで， $\Sigma = \{\sigma:\ \Lambda \to \{0,1\}\} = 2^\Lambda$ は写像の集合「2 進数表示」.

上極限 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ ＝無限個に入っている元の集合，下極限 $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ ＝有限個以外全てに入っている元,

## §0.2. 実数集合

### §0.2.1. 濃度

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. 可算と非可算←測度は非可算集合で重要（数えられないから個数でなく分量）[伊藤清三, p.9]，可算＝可算無限または有限，濃度，定義関数 [伊藤清三, p.11]，空間と点：集合と元のこと.

集合が幾何学的考察の対象として扱われるときは空間と呼ばれ，その元は空間の点と呼ばれる[5].

[4] 確率論の表記，[伊藤清三] は $X$

[5] [伊藤清三, p.3]

### §0.2.2. 区間

区間：この講義では明示しなければ $\mathbf{R}$ の区間は $(a,b]$ または，$(a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)=\mathbf{R}$, $\phi$ のいずれか．まとめて $\mathcal{I}_1=\{(a,b]\mid -\infty\le a_i\le b_i\le\infty\}$ と書くが，$\mathcal{I}_1$ では $b=\infty$ のときは $(a,b]=(a,\infty)$ の意味とする．

ここでは $\pm\infty$ は $(*,*]$ という記号を使うための便利な記号．$\pm\infty$ を値としてとる関数も使う．いずれの場合も $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ における四則の定義は [伊藤清三, p.12].

### §0.2.3. 直積

直積集合（空間） $Z=X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$: [伊藤清三, p.7]，$\mathbf{R^N}$, $\mathbf{R^N}$ の区間も $\mathbf{R}$ と同様：$\mathcal{I}_N=\{\mathbf{R^N}$ の区間 $\}=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_N,b_N]\mid -\infty\le a_i\le b_i\le\infty\}$.

**命題 1** $I_{N-1}\in\mathcal{I}_{N-1}$ ならば $I_{N-1}\times(a,b]\in\mathcal{I}_N$.

証明．明らか □

$\mathbf{R^N}=(-\infty,\infty]^N$, $(a,a]\times I_{N-1}=\phi$.

### §0.2.4. 位相

開区間，閉区間，内部（内点の集合） $A^o=\{x\in\Omega\mid\exists\epsilon>0;\ \mathrm{Ball}(x,\epsilon)\subset A\}$，閉包 $\bar{A}=\{x\in\Omega\mid\exists\{x_n\}\subset A;\ \lim_{n\to\infty}x_n=x\}$,

## §0.3. 集合族

集合族：集合の集合．集合族だけなぜ族と呼ぶか？

> 集合を元とする集合はしばしば集合族 (family) と呼ばれる[6]．cf. ZF から集合 $\{u\mid A(u)\}$ の存在は言えない．これを class と呼ぶ．von Neumann は class の代わりに関数を用いた[7]．これは関係するだろうか？[8]

本当はドイツ花文字を使う習慣，$2^\Omega$，集合の集合の共通部分・和，無限和，極限． 02

注．この講義では空間 $\Omega$ が与えられたとき，その部分集合を元とする集合族のみを考える．即ち，$2^\Omega$ の部分集合．

選択公理，集合関数，定義域，値域，点関数との比較．

$\Omega$, $\mathcal{F}\subset 2^\Omega$, $\Phi:\ \mathcal{F}\to\mathbf{R}\cup\infty$.

**例** [9] $N$ 次元空間上の区間塊の族: $\mathcal{J}_N=\{\mathbf{R^N}$ の区間塊 $\}=\{\sum_{i=1}^n I_i\mid n\in\mathbf{N},\ I_i\in\mathcal{I}_N\}$. $f:\ \mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ を連続関数とするとき，$E\in\mathcal{J}_N$ に対して $\Phi(E)=\int_E f(x)\,dx;\ dx=dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_N$.

注．この講義では集合関数の値域は $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ に限定する．

## §0.4. 公式

exp, $n!$, Stirling [小針, pp.107–111]: $\lim_{N\to\infty}\dfrac{N!}{N^Ne^{-N}\sqrt{2\pi N}}=1$.

[6] [数学辞典, 162B 集合算] (960120 確認)
[7] 123C BG 集合論
[8] [河田三村, §28 (p.209)] では同じものを同一視するか否かで呼び分けているが，以下はこれは採用しない．
[9] [伊藤清三, p.13]

# 第 1 章 測度

伊藤 5 回 荒川 6 回 (直積測度 +1)

## §1. 測度

03

長さ，面積，体積のような素朴な概念の理想化（数学的本質，厳密性）→定義

### §1.1. 定義

#### §1.1.1. $\sigma$ 加法族

全体集合（空間） $\Omega$．空でない $\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ が $\sigma$ 加法族（完全加法族，可算加法族）であるとは

**補集合** $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$,

**可算和** $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

を満たすこと．このことから，有限和に関して閉じていること，積 $A \cap B \in \mathcal{F}$ （de Morgan を使う）, 差, 空集合 $\phi \in \mathcal{F}$, 全体集合 $\Omega \in \mathcal{F}$, 高々可算積に関して閉じていること，が従う．

注．ある集合族が $\sigma$ 加法族であることを証明するときは 2 つの性質のみ証明すればよく，$\sigma$ 加法族と分かっている（仮定している）族に対しては直ちに上記全ての性質を持っている前提で話を進めてよい，というように使い分ける．以下でも同様.

#### §1.1.2. 測度

$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$: $\sigma$ 加法族．恒等的に $\infty$ ではない集合関数 $\mu$ : $\mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が測度であるとは

**非負** $0 \le \mu(A) \le \infty$, $A \in \mathcal{F}$,

**$\sigma$ 加法性** $\displaystyle\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbf{N}$,

を満たすこと．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathcal{F}$ の元を ($\mu$-) 可測集合と呼ぶ.

定義から，空集合 $\mu(\phi) = 0$, 有限加法性 $\displaystyle\mu(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$，単調性 $A \subset B$ ならば $\mu(A) \le \mu(B)$, 差 $A \supset B$, $\mu(B) < \infty$ ならば $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$，劣加法性 $\displaystyle\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, が従う．さらに,

**命題 2** 集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ に対して

*(i)* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば $\displaystyle\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

*(ii)* $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ならば $\displaystyle\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

*(iii)* $\displaystyle\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

*(iv)* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ ならば $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geq \limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)$,

*(v)* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ （$= \lim_{n\to\infty} A_n$ と書く）ならば $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

証明. [伊藤清三, 定理 6.2 (pp.31–32)]. □

注. 命題 2 において，$\mu(A_1) < \infty$ などの条件を落とせない．反例：$\Omega = \mathbf{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mu(\{n\}) = 1$, において，$A_n = \{n, n+1, \cdots\}$.

**命題 3** $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$ ならば，$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \mu(\Omega)$.

証明. 命題 2 による．後半は de Morgan[10].

注. 素朴な概念を含んでいること：正値性，有限加法性．精密性は §2.2，§16，普遍性は §1.2.9，抽象性は §2.2，一般性は第 2 章の主要テーマ.

## §1.2. 例

有限集合や可算集合上の測度＝場合の数（個数数え）や素朴な確率論．$\mu(\Omega) = 1$ なる測度は確率測度と呼び，測度空間は確率空間と呼ぶ．その場合 $\mu$ の代わりに $P$ を使うことが多い.

### §1.2.1. 個数

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 測度空間.

$$\Omega = \mathbf{N}, \quad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \quad \mu(\{n\}) = 1, \ n \in \Omega.$$

$\mu(A) = \sharp A$ に過ぎないが，測度空間の定義を満たす.「長さ」は「個数」の拡張であり「測度」は「長さ」の拡張である.

### §1.2.2. 2 項分布

有限集合上の確率測度の例．$0 < p < 1$, $N \in \mathbf{N}$ fix. $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_{N,p})$ 確率空間.

$$\Omega_N = \{0, 1, \cdots, N\}, \quad \mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}, \quad P_{N,p}(\{n\}) = {}_N C_n p^n (1-p)^{N-n}, \ n \in \Omega_N.$$

### §1.2.3. Poisson 分布

可算集合上の確率測度の例．$\lambda > 0$ fix. $(\Omega, \mathcal{F}, P_\lambda)$ 確率空間.

$$\Omega = \mathbf{Z}_+, \quad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \quad P_\lambda(\{n\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \ n \in \Omega.$$

Poisson の小数の法則：$p = p_N = \lambda/N$, $N \to \infty$, のとき $P_{N,p_N}(\{n\}) \to P_\lambda(\{n\})$.（Stirling の公式を用いる.）

[10] [伊藤清三, §6 問 3 (pp.35, 273)]

### §1.2.4. 地球最後の日

非可測集合の例．地球最後の日は偶数日か奇数日かを記述する確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

$$\Omega = \mathbf{N}, \quad \mathcal{B} = \{\phi, 2\mathbf{N}, 2\mathbf{N}-1, \mathbf{N}\}, \quad P(\text{偶数日}) = P(\text{奇数日}) = \frac{1}{2}\,.$$

$P$ は well-defined だが，有限集合も可測，かつ，全ての日は対等な可能性 $(P(\{n\}) = \alpha)$ とすると矛盾．日の間の対等性を維持するには有限集合は非可測にならざるを得ない．全ての日を対等とする $\Omega$ 上の測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}, \quad \mu(\{n\}) = 1\,, \ n \in \mathbf{N}\,.$$

$P$ と $\mu$ の関係は §11.2 で明らかになる．

### §1.2.5. 既約分数

込み入った例.

**問題** 自然数 2 つの比 $m/n$ が既約になる確率を求めよ[11].

**解答** $m$, $n$ が共に自然数 $p$ で割り切れる確率は $p^{-2}$．$\mathcal{P}$ を素数全体の集合とする．$m/n$ が既約になるのは各 $p \in \mathcal{P}$ に対して $m$, $n$ の少なくとも一方が割り切れない場合．よってその確率は $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-p^{-2}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = 6/\pi^2$.

**測度** $\mathcal{A} = \{(A_2, A_3, A_5, \cdots) \mid A_p \in \{(\ emptyset, p\mathbf{N}\times p\mathbf{N}, (p\mathbf{N}\times p\mathbf{N})^c, \mathbf{N}\times\mathbf{N}\},\ p \in \mathcal{P}\}$ とおく．解答を正当化する確率測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ，即ち，

$$\Omega = \mathbf{N}\times\mathbf{N}, \quad \mathcal{F} \ni p\mathbf{N}\times p\mathbf{N},\ P(p\mathbf{N}\times p\mathbf{N}) = p^{-2}, \quad p \in \mathcal{P}\,,$$

および，素数間の独立性

$$(\forall (A_p) \in \mathcal{A})\ P\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} P(A_p)\,,$$

を満たす[12]$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を構成したい．各 $n \in \mathbf{N}$ は各 $p \in \mathcal{P}$ で割れるか割れないかだから，対応 $g : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathcal{A}$ であって，$g(n,m)$ のどの項も $(\phi,\phi)$ および $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 以外であるものが自然に一意的に定まる．即ち， $p|n, p|m,$ のとき $\tilde{g}_p(n,m) = p\mathbf{N}\times p\mathbf{N}$, そうでないとき $\tilde{g}_p(n,m) = (p\mathbf{N}\times p\mathbf{N})^c$, とおき，$g$: $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathcal{A}$ を $g = (\tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \tilde{g}_5, \cdots)$ で定義する．

$$\mathcal{F} = \{\sum_{i=1}^{\infty} g^{-1}(s_i)(\subset \Omega) \mid \{s_1, s_2, \cdots\} \subset \mathcal{A}, \quad s_i \neq s_j,\ i \neq j\},$$

および $s = (A_p) \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
&P(g^{-1}(s))\\
&= \chi(A_p \neq \phi;\ p \in \mathcal{P}) \times \left(\prod_{p\in\mathcal{P};\ A_p = p\mathbf{N}\times p\mathbf{N}} p^{-2}\right) \times \left(\prod_{p\in\mathcal{P};\ A_p=(p\mathbf{N}\times p\mathbf{N})^c}(1-p^{-2})\right)\\
&= \chi(A_p \neq \phi;\ p \in \mathcal{P}) \times \zeta(2)^{-1} \prod_{p\in\mathcal{P}:\ A_p = p\mathbf{N}\times p\mathbf{N}} (p^2-1)^{-1}\,,
\end{aligned}$$

とし，可算和に対して $\sigma$ 加法的に定義すればよい．$P$ に対する $\mathcal{F}$ 上での定義と非負性と $\sigma$ 加法性は自明だから，$\mathcal{F}$ に対して補集合と可算和を示せばよいがこれは明らか.

[11][Cacoullos, p.33, Q.155, 解答 p.176]

[12]積は $A_p = \phi$ なる $p$ が一つでもあれば両辺 0, $A_p = \mathbf{N}$ なる $p$ は除く.

**注意** 上で構成した $\mathcal{F}$ の元は $\{1\} = g^{-1}(0,0,0,\cdots)$ 以外は無限集合．例えば $g^{-1}(1,0,0,\cdots) = \{2^m \mid m \in \mathbf{N}\}$, $g^{-1}(1,1,0,\cdots) = \{2^{m_2}3^{m_3} \mid m_2, m_3 \in \mathbf{N}\}$, 解答を正当化するだけならばこれ以上細かい情報は必要ない．また,

$$g^{-1}(a_1,a_2,\cdots) \neq \phi \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbf{N};\ a_n = 0,\ n \geq k\,.$$

### §1.2.6. 反例

既約分数の例のような「…を満たす測度空間」という形の定義を行うと，直感に反して全ての条件を満たす測度が構成できない場合がある．無限集合上の確率に対する人間の直感は弱い．既約分数の例で自然数 2 つの代わりに，自然数 1 つについて素因数を持つ確率を定義すると，独立性を保てない．

**命題 4** $\mathcal{P}$ を素数全体の集合とし,

$$\Omega = \mathbf{N}, \quad \mathcal{F} \ni p\mathbf{N},\ P(p\mathbf{N}) = 1/p,\ \ p \in \mathcal{P},$$

を満たす確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える．このとき素数間の独立性

$$A_p \in \{p\mathbf{N}, (p\mathbf{N})^c\}\ (\subset \mathcal{F})\ p \in \mathcal{P},\ \to\ P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P(A_{p_i})\,,$$

を全ての $\{p_i\} \subset \mathcal{P}$ に対して満たすことは出来ない.

証明. $\mathbf{N} = \bigcup_{\{A_p\}} \bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p$. 左辺は可算集合だから右辺の和のうち可算個でおおえる．それを $B_i,\ i \in \mathbf{N}$, とすると，$B_i \in \mathcal{F}$, かつ，$1 = P(\mathbf{N}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$. ところが，$P(A_p) \in \{1/p, 1-1/p\}$ だから $P(A_p) \leq 1 - 1/p$. 故に $P(B_i) \leq \prod_{p\in\mathcal{P}} (1-1/p) = 0$ で矛盾. □

### §1.2.7. 非可算集合

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. $\mu(\Omega) < \infty$ ならば，$A = \{x \mid \{x\} \in \mathcal{F},\ \mu(\{x\}) > 0\}$ は可算集合（なぜなら $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$ で右辺の各項は有限集合[13]）．特に，非可算集合では殆どの点は $\mu(\{x\}) = 0$.

ゼノンのパラドックスの一つ「飛んでいる矢は止まっている」の本当の問題意識は「長さ，即ち濃度の等しい非可算集合の間の測度の大小，を矛盾なく定義できるのか？」ではないだろうか．[14]

素朴な「長さ」の概念の神髄は非可算集合の大きさを測ること．典型例としての Lebesgue 測度.

### §1.2.8. Lebesgue 測度

**定理 5 (Lebesgue 測度)** $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の区間 $I = (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \cdots \times (a_N,b_N] \in \mathcal{I}_N$ に対して素朴な体積（面積，長さ）$\mu_N(I) = \prod_{\nu=1}^{N} (b_\nu - a_\nu)$ を与える測度 $\mu$ が $\mathcal{I}_N$ を含む $\sigma$ 加法族 $\mathcal{F}_N \subset 2^{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$ の上に存在する．即ち，素朴な体積（長さ，面積）の拡張になっている測度が存在する．このような測度は（少なくとも）$\mathcal{I}_N$ を含む最小の $\sigma$ 加法族では一意的に定まる.

この定理の証明を含め，素朴な（有限加法族上の）測度から有用な測度を構成（存在証明）するのにしばしば用いられる一般論がある．§2 では最初にこの一般論を展開する．一般論を用いた 定理 5 の証明は §2.2 を当てて行う．このような測度の一意性については §4 および§15.2.1 で議論する．そこに述べられた意味では Lebesgue の構想は一意性まで込めて肯定的に完結する.

[13] [伊藤清三, p.35, 問 2].
[14] 960603 佐藤文広先生によれば，ゼノンをここで引用するならば第 3 パラドックスのほうが適切とのこと.

#### §1.2.9. 関数の集合上の Wiener 測度

$N \in \mathbf{N}$ （空間次元）を固定する．$t > 0$, $x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, に対して $p(t,x) = (2\pi t)^{-N/2} \exp(-|x|^2/(2t))$ とおく．$\mathbf{W}$ を $\mathbf{R}_+$ 上の $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 値連続関数 $w$ : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の集合とする．

**定理 6** $\mathbf{W}$ の部分集合の族

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \;&=\; \{\{w \in \mathbf{W} \mid w(0) = 0, \quad w(t_1) \in I_1, \cdots, w(t_n) \in I_n\} \mid \\ &\qquad n \in \mathbf{Z}_+ , \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in \mathbf{R}_+ , \quad I_i \in \mathcal{I}_N , \ i = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned}$$

の元（$I_i$ が *Borel sets* のとき $\mathcal{I}$ の元の形の集合を *cylinder set* と呼ぶ）$I = \{w \in \mathbf{W} \mid w(0) = 0, \quad w(t_1) \in I_1, \cdots, w(t_n) \in I_n\}$ に対して

$$P(I) = \int_{I_1} dx_1 \int_{I_2} dx_2 \cdots \int_{I_n} dx_n \, p(t_1, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_2 - x_1)\, p(t_3 - t_2, x_3 - x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})$$

（特に $n = 1$, $I_1 = \mathbf{R}$ より $P(\mathbf{W}) = 1$）を与える確率測度 $P$ が $\mathcal{I}$ を含む $\sigma$ 加法族の上に存在する．即ち，連続関数の集合の上に（確率）測度が定義できる．このような測度は $\mathcal{I}$ を含む最小の $\sigma$ 加法族で一意的に定まる．

Wiener 測度の存在と一意性は Lebesgue 測度と同様の一般論 §2, §4 を用いて証明できる．§2.2 の諸補題に対応する性質を証明すればよい．自明でないのは $\sigma$ 加法性 (補題 14) だが，確率測度なので (1) を証明すればよい [飛田武幸, §2.1 (pp.51–56)] （他の構成法が [渡辺信三, pp.5–8] にある）．

Wiener 測度は Brown 運動を通して，確率積分，確率微分方程式，と展開する確率解析（無限次元解析）の出発点であり，豊かな数学的・自然科学的内容を持つ．特に，有限次元空間の解析では出てこない重要な特徴を持つ．関数の集合のように「体積」の素朴な直感のない集合にも豊かな内容を持つ測度が定義できる例（普遍性）として取り上げげた．

#### 練習問題

[伊藤清三, p.35, 問 1,3, 解答 p.273].

## §2. 拡張定理と Lebesgue 測度 04

### §2.1. 測度の構成

素朴な「長さ」を一般化して測度を構成する方法．非可算集合上の病的でない（役に立つ）多くの測度が以下のように作られる．

#### §2.1.1. 有限加法族

空間 $\Omega$ の空でない部分集合の族 $\mathcal{J} \subset 2^{\Omega}$ が有限加法族であるとは

**補集合** $A \in \mathcal{J}$ ならば $A^c \in \mathcal{J}$,

**和集合** $A, B \in \mathcal{J}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{J}$,

を満たすこと．このことから，積 $A \cap B \in \mathcal{J}$ （de Morgan から）, 差 $A - B \in \mathcal{J}$，空集合 $\phi \in \mathcal{J}$, 全体集合 $\Omega \in \mathcal{J}$, 有限和と有限積に関して閉じていること，が従う．また，特に，$\sigma$ 加法族は有限加法族である．

### §2.1.2. 有限加法的測度

空間 $\Omega$ と有限加法族 $\mathcal{J} \subset 2^{\Omega}$．集合関数 $m:\ \mathcal{J} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が（$\mathcal{J}$ 上の）有限加法的測度（Jordan 測度）であるとは[15]

**非負** $0 \le m(A) \le \infty$, $A \in \mathcal{J}$,

**直和** $m(A+B) = m(A) + m(B)$, $A,\ B \in \mathcal{J}$,

を満たすこと．このことから，空集合 $m(\phi)=0$, 有限加法性 $m(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$，単調性 $A \subset B$ ならば $m(A) \le m(B)$, 差 $m(B) < \infty$ ならば $m(A-B) = m(A) - m(B)$，有限劣加法性 $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, が従う．

### §2.1.3. $\sigma$ 加法性

有限加法族上の有限加法的測度 $(\Omega, \mathcal{J}, m)$ が $\mathcal{J}$ 上完全 $(\sigma)$ 加法的とは，$\mathcal{J}$ の可算個の元 $\{A_i\}$ が，もし，共通部分を持つものがなく，かつ，和（は $\mathcal{J}$ に属するとは限らないが，もしこれ）も $\mathcal{J}$ の元ならば $m(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ となるときを言う．

注. $\sigma$ 加法的でない有限加法的測度は存在する [伊藤清三, p.55].

有限加法的測度の $\sigma$ 加法性を調べるための便利な手段.

**命題 7** $m$ が $\mathcal{J}$ 上で $\sigma$ 加法的なことと次の 2 条件の同時成立は同値である.

$$A_n \in \mathcal{J},\ n \in \mathbf{N},\quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\quad m(A_1) < \infty,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0, \tag{1}$$

$$A_n \in \mathcal{J},\ n \in \mathbf{N},\quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J},\quad m(A) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \infty. \tag{2}$$

証明. [伊藤清三, pp.53–54] □

注. (i) $m(\Omega) < \infty$ (e.g. 確率測度) の場合は (1) のみ成り立てば十分（しかも $m(E) < \infty$ は不要）.

(ii) $m$ が $\sigma$ 有限な場合は (2) は後述の (25) に置き換えられる (§2.1.3 補題 27).

### §2.1.4. 外測度

集合関数 $\Gamma:\ 2^{\Omega} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が外測度であるとは[16]

**非負** $0 \le \Gamma(A) \le \infty$,

**空集合** $\Gamma(\phi) = 0$,

**単調性** $\Gamma(A) \le \Gamma(B)$, $A \subset B$,

**劣加法性** $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma(A_i)$,

を満たすこと.

[15] [伊藤清三, p.17]

[16] 公理論的定義 [伊藤清三, p.23]．外測度による可測集合の定義の意味付けは [伊藤清三, pp.25–26] 外測度優先論 [志賀浩二, pp.59–60]．$\mathbf{R}$ の測度から $\mathbf{R}^2$ の病的な外測度を作れる．哲弥異論：建設的な例は全て有限測度から作るのではないか？Haussdorff 測度の例は球の直径 $^d$ による有限加法的測度から構成.

### §2.1.5. 有限加法的測度から外測度の構成

$(\Omega, \mathcal{J}, m)$: 有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の有限加法的測度 $m$．一般化（定義域をより多くの集合に広げたい）としての外測度 $\Gamma$.

$$\Gamma(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid \{E_n\} \subset \mathcal{J},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} \tag{3}$$

は well-defined on $2^{\Omega}$ （定義に内的矛盾や不定性がない）．即ち，$A \subset \Omega$ なので右辺は空でない．

**命題 8（[伊藤清三, p.23]）** *(i)* $\Gamma$ は外測度である．

*(ii)* 特に $m$ が $\mathcal{J}$ 上 $\sigma$ 加法的ならば，$\Gamma$ は $m$ の拡張になる：$\Gamma|_{\mathcal{J}} = m$[17].

証明. [伊藤清三, p.24] □

### §2.1.6. 可測集合

外測度 $\Gamma$ の定義域を制限すること（「面積を測れる集合」の概念）によって $\sigma$ 加法性を持つ測度を定義することができる．

**定義 1 (Carathéodory, [伊藤清三, p.26])** $E \subset \Omega$ が外測度 $\Gamma$ に関して可測集合であるとは

$$(\forall A \subset \Omega)\ \ \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) = \Gamma(A). \tag{4}$$

可測集合の全体（集合族）を $\mathcal{F}$ とおく．

注. $\Gamma$ の劣加法性より $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) \geq \Gamma(A)$ は任意の $E \subset \Omega$ に対して成り立つ．逆向きの不等号が可測集合を定義する．

$\mathcal{F}$ の元を（外測度に関する）可測集合と呼ぶのは次の定理による．この定理は外測度を (3) によって構成したかどうかによらない．

**定理 9** $\mathcal{F}$ は $\sigma$ 加法族であり，$\mu \overset{\text{def}}{=} \Gamma|_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ 上の測度になる．即ち $\mathcal{F}$ の元は $\mu$-可測集合である．

証明. $\mathcal{F}$ が補集合に関して閉じていることと $\mu$ の非負性は明らか．可算和について閉じていることと $\mu$ の $\sigma$ 加法性は [伊藤清三, 定理 5.3 (pp.27–28)][18]. □

**命題 10** $\Gamma$ が有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の有限加法的測度 $m$ から *(3)* によって定義された外測度ならば，$\Gamma$ に関する可測集合 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$.

証明. [伊藤清三, p.27] □

注. (i) $m$ に $\sigma$ 加法性は仮定しない．

(ii) 命題 10 は 命題 11 と 定理 28 と命題 29 で使う．

[17] 一般には $\Gamma(E) \leq m(E)$.
[18] この引用は手間がかかるので講義時注意.

以下，この節 §2.1.6 の終わりまで，有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の $\sigma$ 加法的測度 $m$ が与えられたとし，$\Gamma$ が $m$ から (3) によって定義された外測度とする．このとき $\mathcal{F}$ の意味は 命題 11 によって明らかになる．

Carathéodory の定義の良いところは，外測度だけで書けることと，(4) が任意の $A$ に対して成り立つという強い性質を可測集合の性質として頻繁に用いる点である．これに対して，歴史的にはより早く，Lebesgue は内測度と外測度が等しければその値を測度と自然に呼べる，という直感をそのまま定義にした．

**定義 2 ([Lebesgue, §3,4 (p.9)])** $E \subset \Omega$ が外測度 $\Gamma$ に関して $L$-有限可測集合（仮称）であるとは

(5) $\quad \exists I \in \mathcal{J}; \quad E \subset I, \quad m(I) < \infty, \quad \Gamma(E) = m(I) - \Gamma(I - E).$

注. Lebesgue の元の定義では $I$ は区間塊ではなく区間から選んでいる[19]が，明らかに両者は同値．$\Omega$ が $\sigma$ 有限ならば $m(I) < \infty$ の仮定は本質ではない．

L-有限可測集合の全体を $\mathcal{F}_L^f$ とおくと，(4) と (5) から $\mathcal{F}^f \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \cap \{E \mid \Gamma(E) < \infty\} \subset \mathcal{F}_L^f$.

**命題 11 ([高木貞治, p.425], [志賀浩二, p.95])** $\Gamma(E) < \infty$ ならば $\mathcal{F}_L^f = \mathcal{F}^f$, 即ち，可測集合の *Lebesgue* の定義 と *Carathéodory* の定義は同値である．

まず，$\tilde{\mathcal{F}}_L = \{E \in 2^\Omega \mid \Gamma(E \cap J) + \Gamma(E^c \cap J) = m(J), \ \ \forall J \in \mathcal{J}\}$ とおけば $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}_L$ は明らか．

**補題 12** $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}_L$.

証明. [20] $E \in \tilde{\mathcal{F}}_L$ とする．外測度の定義から $\epsilon > 0$, $A \in 2^\Omega$, に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty m(J_n) \le \Gamma(A) + \epsilon$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty J_n \supset A$, なる $J_n \in \mathcal{J}$ $(n \in \mathbf{N})$ がとれる．

$$\begin{aligned}\Gamma(A) &\le \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) \le \Gamma(E \cap \bigcup_n J_n) + \Gamma(E^c \cap \bigcup_n J_n) \\ &= \sum_n (\Gamma(E \cap J_n) + \Gamma(E^c \cap J_n)) = \sum_n m(J_n) \le \Gamma(A) + \epsilon.\end{aligned}$$

最後から 2 つ目の等号変形は $E \in \tilde{\mathcal{F}}_L$ と $J_n \in \mathcal{J}$ を用いた．$\epsilon \downarrow 0$ として $E \in \mathcal{F}$. □

命題 *11* の証明. [21]$E \in \mathcal{F}_L^f$ とする．補題 12 から，このとき $E \in \tilde{\mathcal{F}}_L$, 即ち，任意の $J \in \mathcal{J}$ に対して $\Gamma(E \cap J) + \Gamma(E^c \cap J) \le m(J)$ を言えばよい．$m(J) = \infty$ ならば自明だから $m(J) < \infty$ を仮定する．$\Gamma$ の構成の仕方から $\Gamma|_{\mathcal{J}} = m$ (命題 8) 及び $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ (命題 10) が成り立つことに注意．

$E \in \mathcal{F}_L^f$ から，

$$\exists I \in \mathcal{J}; \ \ m(I) < \infty, \ E \subset I, \ \ \Gamma(E) + \Gamma(E^c \cap I) = m(I).$$

$J \in \mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ と $I \supset E$ より

$$\Gamma(I \cap J \cap E) + \Gamma(I \cap J^c \cap E) = \Gamma(J \cap E) + \Gamma(J^c \cap E) = \Gamma(E)$$

および

$$\Gamma(I \cap E^c) = \Gamma(I \cap J \cap E^c) + \Gamma(I \cap J^c \cap E^c).$$

以上から

[19] [Lebesgue, §3,4 (p.9)].

[20] [高木貞治] .

[21] 960117 哲弥証明. 960620 追記：[高木貞治] にはこの命題は欠落，補題 12 のみが証明されている．[志賀浩二] は補題 12 を経由せずに 命題 11 を証明するが，哲弥証明や [高木貞治] のような「初等的」証明ではなく，証明を本の後半に suspend して Lebesgue 測度の完備性を陽に用いる．

$$\Gamma(I\cap J\cap E)+\Gamma(I\cap J^c\cap E)+\Gamma(I\cap J\cap E^c)+\Gamma(I\cap J^c\cap E^c)=m(I)$$

となるが，$\Gamma(I\cap J^c\cap E)+\Gamma(I\cap J^c\cap E^c)\geq\Gamma(I\cap J^c)=m(I\cap J^c)=m(I)-m(I\cap J)$ および $m(I)<\infty$ を用いると

(6) $\Gamma(I\cap J\cap E)+\Gamma(I\cap J\cap E^c)\leq m(I\cap J)$.

他方，$I\supset E$ なので $\Gamma(I^c\cap J\cap E)=0$. これと外測度の単調性から $m(I^c\cap J)=\Gamma(I^c\cap J)\geq\Gamma(I^c\cap J\cap E^c)=\Gamma(I^c\cap J\cap E^c)+\Gamma(I^c\cap J\cap E)$ を得て，さらに，劣加法性と (6) から $m(J)\geq\Gamma(J\cap E)+\Gamma(J\cap E^c)$ を得る．
□

## §2.2. Lebesgue 測度の構成

05

定理 5 (§1.2.8) で主張した Lebesgue 測度の存在を証明する．

$N$ 次元空間上の区間塊の族 $(\Omega,\mathcal{F})=(\mathbf{R^N},\mathcal{J}_N)$; $\mathcal{J}_N=\{\sum_{i=1}^n I_i\mid n\in\mathbf{N},\ I_i\in\mathcal{I}_N,\ i=1,2,\cdots,n\}$; $\mathcal{I}_N=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_N,b_N]\mid -\infty\leq a_i\leq b_i\leq\infty\}$.

**補題 13** $\mathcal{J}_N$ は有限加法族.

証明. [22]全体集合 $\Omega=(-\infty,\infty]^N\in\mathcal{J}_N$, 直和 $A+B$ について閉じることは $\mathcal{J}_N$ の定義から当然．交わり $A\cap B$ について閉じていて，$I\in\mathcal{I}_N$ に対して $I^c\in\mathcal{J}_N$ であることを言えば，$(\bigcup_{i=1}^n I_i)^c=\bigcap_{i=1}^n I_i{}^c$ より補集合 $A^c$ について閉じていることが分かり，さらに和 $A\cup B=A+(B\cap A^c)$ について閉じるから有限加法族になる．

$I_i=\{(a_{i1},b_{i1}]\times(a_{i2},b_{i2}]\times\cdots\times(a_{iN},b_{iN}]\}\in\mathcal{I}_N$, $i=1,2$ に対して $(a_{1\nu},b_{1\nu}]\cap(a_{2\nu},b_{2\nu}]=\phi$ なる $\nu$ が一つでもあれば，$I_1\cap I_2=\phi\in\mathcal{I}_N$, なければ，$(a_{1\nu},b_{1\nu}]\cap(a_{2\nu},b_{2\nu}]=(\min\{a_{1\nu},a_{2\nu}\},\max\{b_{1\nu},b_{2\nu}\}]$ だからやはり $I_1\cap I_2\in\mathcal{I}_N$, 即ち $\mathcal{I}_N$ は交わりについて閉じている．$\mathcal{J}_N$ の元の交わりは $\mathcal{I}_N$ の元の交わりの直和だから $\mathcal{J}_N$ も交わりについて閉じている．

$I=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_N,b_N]\}\in\mathcal{I}_N$ に対して

$$\begin{aligned}&I^c=\\&(-\infty,a_1]\times\mathbf{R^{N-1}}+(b_1,\infty]\times\mathbf{R^{N-1}}+(a_1,b_1]\times(-\infty,a_2]\times\mathbf{R^{N-2}}+(a_1,b_1]\times(b_2,\infty]\times\mathbf{R^{N-2}}+\cdots\\&+(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_{k-1},b_{k-1}]\times(-\infty,a_k]\times\mathbf{R^{N-k}}+(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_{k-1},b_{k-1}]\times(b_k,\infty]\times\mathbf{R^{N-k}}\\&+\cdots+(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_{N-1},b_{N-1}]\times(-\infty,a_N]+(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_{N-1},b_{N-1}]\times(b_N,\infty]\\&\in\mathcal{J}_N\,.\end{aligned}$$

□

$E\in\mathcal{J}_N$ に対して $E=\sum_{i=1}^n I_i$ なる $\{I_i=(a_{i1},b_{i1}]\times(a_{i2},b_{i2}]\times\cdots\times(a_{iN},b_{iN}]\in\mathcal{I}_N,\ i=1,2,\cdots,n\}$ をとり，

(7) $m_N(E)=\sum_{i=1}^n\prod_{\nu=1}^N(b_{i\nu}-a_{i\nu})$,

（有界でない $E$ に対しては $m_N(E)=\infty$, $m_N(\phi)=0$,）で集合関数 $m_N$ を定義する（$N$ 次元体積）.

**補題 14** $m_N$ は $\mathcal{J}_N$ 上の

[22] 960219 哲弥証明.

*(i)* 集合関数として *well-defined*,

*(ii)* $\sigma$ 加法性を持つ有限加法的測度[23].

証明. (i) は [伊藤清三, p.14]. 有限加法的測度であることは容易. $\sigma$ 加法性を証明する. $E, E_n \in \mathcal{J}_N$, $n \in \mathbf{N}$, $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ とすると, $m_N$ の単調性と有限加法性より, $m_N(E) \geq \sum_{n=1}^{p} m_N(E_n)$, $p \in \mathbf{N}$. $p \to \infty$ で

$$(8) \quad m_N(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_N(E_n)\,.$$

逆向きの不等号を証明すればよい.

$E_n = \sum_{i=1}^{k_n} I_{ni}$ なる $k_n \in \mathbf{N}$ と $I_{ni} \in \mathcal{I}_N$ があるので $E = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} I_{ni}$. 各 $I_{ni}$ は区間だから少し膨らませて, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $I_{ni} \subset {J_{ni}}^o$ 即ち

$$(9) \quad E = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} I_{ni} \subset \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} {J_{ni}}^o,$$

かつ,

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_N(J_{ni}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_N(I_{ni}) + \epsilon\,,$$

となる $\{J_{ni}\}$ が取れる（$m_N(J_{ni}) \leq m_N(I_{ni}) + \frac{\epsilon}{2^n k_n}$ となるように選ぶ. 区間なので測度はいくらでも微調整できる）.

他方 $E \in \mathcal{J}_N$ だから $E = \sum_{i=1}^{k} \tilde{I}_i$ なる $\{\tilde{I}_i\} \subset \mathcal{I}_N$ がある. 任意の $\alpha < m_N(E)$ に対して有界な $F \in \mathcal{J}_N$ で

$$(11) \quad \bar{F} \subset E, \quad m_N(F) > \alpha,$$

を満たすものがあることを言う. 有界でなければ簡単なので, $E$ は有界とする. 各 $i$ に対して $\tilde{I}_i$ を少しせばめて $m_N(K_i) > m_N(\tilde{I}_i) - (m_N(E) - \alpha)/n$, $\bar{K}_i \subset I_i$, を満たすように $K_i \in \mathcal{I}_N$ をとる. $\{\tilde{I}_i\}$ が互いに素だから $\{K_i\}$ もそう. $F = \sum_{i=1}^{k} K_i$ が求める $F$ であることは容易.

(9), (11) より

$$\bar{F} \subset \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} {J_{ni}}^o,$$

即ち, $\{{J_{ni}}^o\}$ は閉集合 $\bar{F}$ の開被覆. Borel–Lebesgue の被覆定理 [伊藤清三, p.258] より有限個で覆える. 即ち, ある $n_0$ があって,

$$F \subset \bar{F} \subset \sum_{n=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{k_n} {J_{ni}}^o \subset \sum_{n=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{k_n} J_{ni}\,.$$

$m_N$ の単調性と正値性と有限加法性と (10), (11) から

$$\alpha < m_N(F) < \sum_{n=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{k_n} m_N(J_{ni}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_N(J_{ni}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_N(I_{ni}) + \epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} m_N(E_n) + \epsilon\,.$$

$\alpha \uparrow m_N(E)$, $\epsilon \downarrow 0$ とすれば

$$(12) \quad m_N(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_N(E_n)\,.$$

---

[23] [伊藤清三, pp.19–22]

(8) と (12) より $\sigma$ 加法性を得る. □

注. $\sigma$ 加法性に関連する証明は (8) のように一方の不等式は簡単という場合が多い.

区間 $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_N, b_N] \in \mathcal{I}_N$ に対して素朴な体積 $m_N(I) = \displaystyle\prod_{\nu=1}^{N}(b_\nu - a_\nu)$ を与える $\mathcal{J}_N$ 上の有限加法的測度 $m_N$ (定義は (7)) は補題 14 から $\sigma$ 加法的. (3) と 定理 9 によって構成した測度空間を $(\Omega, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ と書くと, 命題 10 と 命題 8 から $\mathcal{J}_N \subset \mathcal{F}_N$ かつ $\mu_N|_{\mathcal{J}_N} = m_N$ である. 即ち, $(\Omega, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ は $(\Omega, \mathcal{J}_N, m_N)$ の拡張である.

**定義 3** 以上によって構成された測度 $(\mathbf{R^N}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ を *(*$R^N$ *における) Lebesgue* 測度と呼ぶ. また, *(3)* によって $(\Omega, \mathcal{J}_N, m_N)$ から定義した外測度を $\mu_N^* = \Gamma$ と書いて, これを *Lebesgue* 外測度と呼ぶ.

注. $\mathbf{R^n}$ 上には Lebesgue 測度以外にも種々の測度がある. 例及び Lebesgue 測度との関係は §11.2.

## §2.3. Lebesgue 可測集合の性質

$(\mathbf{R^N}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$: Lebesgue 測度. どんな集合が可測か? $\mathbf{R^N}$ では大抵の集合が可測 (Lebesgue). $\mathbf{R^N}$ Lebesgue 非可測集合はむしろ病的な例 (§15). 06

### §2.3.1. 可測集合の位相的性質

$\mathcal{O}_N \subset 2^{\mathbf{R^N}}$: $\mathbf{R^N}$ の開集合族.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_N &= \{G \subset \mathbf{R^N} \mid (\forall x \in G)\ \exists a < x < b;\ (a, b) \subset G\} \\ &= \{\text{ 開区間の和集合（非可算個でも空でもよい）になっている集合 }\}. \end{aligned}$$

閉集合は補集合が開集合になっている集合のこと. $\phi$, $\mathbf{R^N}$ は閉集合かつ開集合.

**命題 15** 開集合, 閉集合は *Lebesgue* 可測. 即ち, $\mathcal{O}_N \subset \mathcal{F}_N$.

証明. $G \in \mathcal{O}_N$ とすると, 任意の $x \in G$ に対して $x \in {I_x}^o$ かつ $I_x \subset G$ となる区間 $I_x$ がある. ${I_x}^o$ は $I_x$ の内部. 実際, $x$ を中心とする開区間を $G$ の中にとって, それをさらに 1/2 に縮小した開区間に境界点を加えて区間 $I_x$ とすればよい. $I_x$ の内点の集合 ${I_x}^o$ は開区間で, 構成から $G = \displaystyle\bigcup_{x \in G} {I_x}^o$ だから Lindelöf の被覆定理 [伊藤清三, p.260] から可算個で $G$ をおおえる. それらを改めて ${I_n}^o$, $n \in \mathbf{N}$, とする. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset G$. 他方, $I_n \subset G$ だったから $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset G$. 結局 $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ となるが, $\sigma$ 加法性からこの形の集合は $\mathcal{F}_N$ の元である. □

注. §4.1 も参照.

**命題 16 ([伊藤清三, 定理 7.3])** $\mu_N^*$ を *Lebesgue* 外測度とする. $A \subset \mathbf{R^N}$ ならば $\mu_N^*(A) = \inf\{\mu_N(G) \mid A \subset G,\ G \in \mathcal{O}_N\}$.

証明. [伊藤清三, p.36] □

**定理 17** $A$ が可測集合ならば，任意の $\epsilon > 0$ に対して $F \subset A \subset G$, $\mu(G - F) < \epsilon$, なる開集合 $G$ と閉集合 $F$ が存在する．

証明. [伊藤清三, 定理 7.4+7.5 (p.38)] □

**定義 4** 可算個の開集合の共通部分として表せる集合を $G_\delta$ 集合，可算個の閉集合の和集合として表せる集合を $F_\delta$ 集合，と呼ぶ．

**系 18** $A$ が可測集合ならば，$F \subset A \subset G$, $\mu(G - F) = 0$, なる $G_\delta$ 集合 $G$ と $F_\delta$ 集合 $F$ が存在する．

証明. 定理から，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $F_n \subset A \subset G_n$, $\mu(G_n - F_n) < \dfrac{1}{n}$, なる開集合 $G_n$ と閉集合 $F_n$ がある．$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, とおけばよい． □

一般に，開集合族の定義された空間を位相空間と呼ぶ．例：$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$．開集合の全体を $\mathcal{O}$ と書くとき $\mathcal{O}$ を含む最小 (§4.1) の $\sigma$ 加法族を Borel 集合族と呼ぶ．Borel 集合族上の測度を Borel 測度と呼ぶ．

特に，$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の Borel 集合族を $\mathcal{B}_N$ と書く．命題 15 より，$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の Lebesgue 測度は Borel 測度（の拡張）である．Borel 測度（の拡張）ならば開集合，閉集合は可測．一般に，位相空間上の Borel 測度で有界な集合の外測度が有限ならば，定理 17 と 系 18 が成り立つ．拡張の一意性 (§4.2) は通常 Borel 測度としての一意性と理解する．

Lebesgue 測度は通常 Borel 測度の完備化 (§4.3) と見る．

Borel 集合ならば分かりやすいというのではない．例として，測度正の疎な（開区間を含まない）閉集合 $E \subset I = [0, 1]$ を取り上げる (cf. Cantor set は測度 0)[24]．

$M = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \epsilon_n > 0$ なる $\epsilon_n > 0$ をとる（例えば $\epsilon_n = 2^{-2n-1}$ ならば $M = 0.5$）．$I$ から $I$ の中央の長さ $\epsilon_1$ の開区間 $J_1$ を除外 $(I_1 = I - J_1)$．次に $I_1$ の各連結成分の中央に長さ $\epsilon_2$ の開区間 $J_{21}$, $J_{22}$ をとり，それらを $I_1$ から除外 $(I_2 = I_1 - J_{21} - J_{22})$．以下同様．残った部分 $E = I_\infty$ は可測で測度は $M > 0$，しかも疎である．除外集合は開区間の直和だから開集合よって $E$ は閉集合．

この集合を用いて Riemann 非可積分で Lebesgue 可積分，かつ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(y)dy = f(x)$ が各点で成り立つ関数の例がつくれる (§16.2.3)．

注. もっと定義の短い例[25]：全ての有理数を一列に並べて $n$ 番目の有理数を中点とする区間を $I_n$ と書く．$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < 1$ を満たすように各区間の長さを選んで，$E = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ とする．$I_n$ 達は重なるかも知れないが，$[0, 1] - E$ は開区間の可算和だから開集合．よって，$E$ は閉集合．有理数の稠密性から疎集合．しかも，測度は $1 - \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| > 0$ より小さくはない．

### §2.3.2. 測度 0 の集合

$(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ Lebesgue 測度.

**命題 19** $A$ が可算集合ならば $\mu_N(A) = 0$．特に，測度 0 の稠密な集合が存在する．

[24] nabe35 渡辺浩–服部哲弥 26 Jan 96 22:37:07, 19960127(2), 28 Jan 96 00:05:05 に基づく．この集合を取り上げている文献は [Lebesgue, §29 (p.37)] のみ．

[25] [Lebesgue, §34 (p.46)].

証明．1 点は測度 0 である．なぜなら，測度 $a>0$ とすると，その点を含む測度 $a/2$ の区間を考えれば単調性に矛盾するから． $\sigma$ 加法性から前半証明終わり．有理数の全体は可算集合だから測度 0 で，稠密． □

さらに，測度 0 の非可算集合も存在する（Cantor 集合） [伊藤清三, p.41]．Cantor 集合の濃度は連続体の濃度である [伊藤清三, p.43]．Cantor 集合上でのみ変化する関数（Cantor 関数），およびそれに基づく $\mathbf{R}$ 上の測度も存在する [伊藤清三, p.42–43]．Lebesgue 測度との関係は §11.2.3.

## §3. 直積測度

07

長方形（矩形）の面積（$\mathbf{R}^2$ Lebesgue 測度）は横の長さと縦の長さ（各々 $\mathbf{R}$ Lebesgue 測度）の積である.「長さの積としての面積」という素朴な概念を直積測度として一般化する.

この節 §3 では測度空間 $(X,\mathcal{F}_X,\mu_X)$, $(Y,\mathcal{F}_Y,\mu_Y)$ と直積空間 $Z=X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$ を固定.

**定義 5** $Z\supset K=E\times F=\{(x,y)\mid x\in E,\ y\in F\}$, $E\in\mathcal{F}_X$, $F\in\mathcal{F}_Y$, の形の集合を矩形集合と呼ぶ.

**定義 6** 矩形集合を全て含む $\sigma$ 加法族（が存在してその）上の測度 $\mu$ で

$$(13)\quad \mu(K)=\begin{cases}0 & ,\ \mu_X(E)=0\ \mathit{or}\ \mu_Y(F)=0\\ \mu_X(E)\,\mu_Y(F) & ,\ \mathit{otherwise}\end{cases}$$

を満たすもの（がもしあればそれ）を $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度と言う.（通常は，単に直積測度というと最小のものを指す.）

注. (13) の取り扱いは一辺が長さ 0 の長方形は（他方の辺が長さ $\infty$ でも）面積 0 とする，という意味である．他方の辺が長さ有限ならばどんなに長くても 0 とするのが素朴な面積. $\sigma$ 加法性と整合させるには $\mu_Y(F)=\infty$ でも $\mu_X(E)=0$ ならば $\mu(K)=0$ としなければいけないので，この定義は矛盾のない唯一の選択肢である.

**定理 20** $\mathcal{J}_Z\overset{\mathrm{def}}{=}\{\sum_{i=1}^{n}E_i\times F_i\mid E_i\in\mathcal{F}_X,\ F_i\in\mathcal{F}_Y,\ i=1,2,\cdots,n,\ n\in\mathbf{N}\}$, $Z$ の矩形集合 $E\times F$ に対して $m(E\times F)$ を *(13)*（で $\mu\Longrightarrow m$ としたもの）, $\mathcal{J}_Z\ni A=\sum_{i=1}^{n}E_i\times F_i$ に対して $m(A)=\sum_{i=1}^{n}m(E_i\times F_i)$ とおく．$(Z,\mathcal{J}_Z,m)$ は有限加法族上の $\sigma$ 加法的測度であり，従って *(3)* と 定理 *9* によって測度空間 $(Z,\mathcal{F},\mu)$ が構成できるが，これは直積測度である．即ち，直積測度は存在する.

注. $\mathcal{F}$ は $\mathcal{J}_Z$ を含む最小の $\sigma$ 加法族より少し広いが，その拡張の性質 (系 33) から $\mu$ は完備直積測度と呼ばれる.

証明. $\mathcal{J}_Z$ が有限加法族で $m$ が $\mathcal{J}_Z$ の上の $\sigma$ 加法的測度であることを言えば，命題 10 と 命題 8 から $\mathcal{J}_Z\subset\mathcal{F}$ かつ $\mu|_{\mathcal{J}_Z}=m$ なので，$(Z,\mathcal{F},\mu)$ は直積測度である．$\mathcal{J}_Z$ が有限加法族で $m$ が $\mathcal{J}_Z$ の上の $\sigma$ 加法的測度であることは 補題 21 と 補題 22 より従う. □

**補題 21** $Z=X\times Y$, $\mathcal{J}_X\subset 2^X$ と $\mathcal{J}_Y\subset 2^Y$ が有限加法族のとき，$\mathcal{J}_Z=\{\sum_{i=1}^{n}E_i\times F_i\mid E_i\in\mathcal{J}_X,\ F_i\in\mathcal{J}_Y,\ i=1,2,\cdots,n,\ n\in\mathbf{N}\}$ は有限加法族.

証明. [26]全体集合 $Z = X \times Y \in \mathcal{J}_Z$ は $\mathcal{J}_X$ と $\mathcal{J}_Y$ が有限加法族だから当然. 直和 $A+B$ について閉じることは $\mathcal{J}_N$ の定義から当然. また, $E \in \mathcal{J}_X, F \in \mathcal{J}_Y$, ならば $(E\times F)^c = (E^c \times F^c) + (E \times F^c) + (E^c \times F) \in \mathcal{J}_Z$. あとは交わり $A \cap B$ について閉じていることを言えば, $(\bigcup_{i=1}^n (E_i \times F_i))^c = \bigcap_{i=1}^n (E_i \times F_i)^c$ より補集合 $A^c$ について閉じていることが分かり, さらに和 $A \cup B = A + (B \cap A^c)$ について閉じるから有限加法族になる.

さらに, $A = \sum_{i=1}^n E_{Ai} \times F_{Ai}$, $B = \sum_{i=1}^n E_{Bi} \times F_{Bi}$, に対して $A \times B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E_{Ai} \times F_{Ai}) \cap (E_{Bj} \times F_{Bj})$ なので, $E_A, E_B \in \mathcal{J}_X$, $F_A, F_B \in \mathcal{J}_Y$ に対して $K = (E_A \times F_A) \cap (E_B \times F_B) \in \mathcal{J}_Z$ を言えばよいが, 実は $K = K' \stackrel{\text{def}}{=} (E_A \cap E_B) \times (F_A \cap F_B) \in \mathcal{J}_Z$. なぜなら, $(x,y) \in K \Longrightarrow x \in E_A \cap E_B$, $y \in F_A \cap F_B$, だから $K \subset K'$, かつ, $(x,y) \in K' \Longrightarrow (x,y) \in E_A \times F_A$, $(x,y) \in E_B \times F_B$, だから $K' \subset K$. 結局交わりについても閉じている. □

**補題 22** $(Z, \mathcal{J}_Z, m)$ を 定理 *20* の仮定に定義されたものとすると, $m$ は $\mathcal{J}_Z$ 上の

*(i)* 集合関数として *well-defined*,

*(ii)* $\sigma$ 加法的測度.

これを証明するのに補題を二つ用意する.

**補題 23** $\mathcal{J}_Z$, $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_Y$, を 定理 *20* の仮定に定義されたものとする. $A \in \mathcal{J}_Z$ ならば $n \in \mathbf{N}$, $E_j \in \mathcal{F}_X$, $F_j \in \mathcal{F}_Y$, $j = 1, 2, \cdots, n$, を選んで

$$(14) \quad A = \sum_{j=1}^n E_j \times F_j \,; \quad j \neq k \to E_j \cap E_k = \phi,$$

とできる.

証明. [伊藤清三, p.57]. □

**補題 24** $\mathcal{J}_Z$, $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_Y$, を 定理 *20* の仮定に定義されたものとする. $A_n \in \mathcal{J}_Z$, $n \in \mathbf{N}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ または, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$[27] ならば $k_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, および $E_{nj} \in \mathcal{F}_X$, $F_{nj} \in \mathcal{F}_Y$, $j = 1, 2, \cdots, k_n$, $n \in \mathbf{N}$, を選んで, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$(15) \quad A_n = \sum_{j=1}^{k_n} E_{nj} \times F_{nj} \,; \quad j \neq i \to E_{nj} \cap E_{ni} = \phi, \quad (1 \leq \forall j \leq k_{n+1}) 1 \leq \exists i \leq k_n;\ E_{n+1,j} \subset E_{ni},$$

とできる. このとき $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ *(*または $(A_1 \subset A_2 \subset \cdots$*)* ならば (それぞれ)

$$(16) \quad (\forall n, i, j)\ E_{n+1,j} \subset E_{ni} \to F_{n+1,j} \subset F_{ni}\ (\text{または } F_{n+1,j} \supset F_{ni}),$$

が成り立つ.

注. (i) この補題は図で書いたほうが意味が分かる.

(ii) $E_{n+1,j} \subset E_{ni}$ の包含関係は $n$ 大ほど細分にしたいので $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ でも $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ でも同じ.

証明. [伊藤清三, p.57]. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ でも文献の記述部分は全く同じ. (16) は文献にはないが定義と (15) から明らか. □

[26] 960220 哲弥証明, 本質的に [伊藤清三, pp.16–17] の証明に同じ. cf. 補題 13 の証明.
[27] [伊藤清三, 補題 2 (p.57)] ではこちらはない

補題 *22* の証明. [28](i) は $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の場合の証明 [伊藤清三, p.14] と同様. 有限加法的測度であることは自明. $\sigma$ 加法性を証明する. 命題 7 より, (1) と (2) を言えばよい.

**(2) の証明.** $A_n \in \mathcal{J}_Z$, $n \in \mathbf{N}$, が

(17) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}_Z\,,\ \ m(A) = \infty,$

を満たすとする. $A \in \mathcal{J}_Z$ だから $A$ は矩形集合の有限個の直和で書ける. $m(A) = \infty$ だから, 少なくとも一つの矩形集合 $A \supset E \times F$ に対して $m(E \times F) = \infty$. (13) (で $\mu \Longrightarrow m$ としたもの) より, $\mu_X(E)$ または $\mu_Y(F)$ の一方が $\infty$ で他方が正. そこで,

(18) $A \supset E \times F,\ \ E \in \mathcal{F}_X\,,\ F \in \mathcal{F}_Y\,,\ \mu_X(E) = \infty,\ \mu_Y(F) > 0,$

と仮定して一般性を失わない.

補題 24 より (15) を満たす $k_n$, $E_{nj}$, $F_{nj}$, が存在して $A_n = \sum_{j=1}^{k_n} E_{nj} \times F_{nj}$ と書ける. $E'_n = \sum_{i:\ F \subset F_{ni}} E_{ni}$ (直和になることは (15), 以下同様) とおくと

(19) $E'_n \times F = \sum_{i:\ F \subset F_{ni}} E_{ni} \times F \subset \sum_{i:\ F \subset F_{ni}} E_{ni} \times F_{ni} \subset A_n\,.$

$\mathcal{F}_X$ は $\sigma$ 加法族だから有限加法族, $\mu_X$ は測度だから $\sigma$ 加法的なので,

(20) $E'_n \subset E'_{n+1},\ n \in \mathbf{N},\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n \supset E,$

が言えれば, (18) とともに 命題 7(2) の仮定を全て満たして, $\lim_{n\to\infty} \mu_X(E'_n) = \infty$ を得る. (18) より $\mu_Y(F) > 0$ だから (19) より $m(A_n) \geq m(E'_n \times F) = \mu_X(E'_n)\,\mu_Y(F) \to \infty$, $n \to \infty$, となって (2) の証明が終わる.

(20) の証明. $x \in E'_n$ とする. $E'_n$ の定義と (15) から, ある $i$, $j$ が存在して $x \in E_{n+1,j} \subset E_{ni}$. このとき $E'_n$ の定義と (16) より $F \subset F_{ni} \subset F_{n+1,j}$. よって $x \in E'_{n+1}$ となるので, $E'_n \subset E'_{n+1}$ を得る. 他方, $x \in E$ とすると, ある $n$ に対して $\{x\} \times F \subset A_n$, 従って $\exists\, i$; $x \in E_{ni}$, さらに $\{x\} \times F \subset E_{ni} \times F_{ni}$. これは $x \in E'_n$ を意味するので $\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n \supset E$ を得る. □

**(1) の証明.** $A_n \in \mathcal{J}_Z$, $n \in \mathbf{N}$, が

(21) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi\,,\ \ m(A_1) < \infty,$

を満たすとする. 補題 24 より (15) を満たす $k_n$, $E_{nj}$, $F_{nj}$, が存在して $A_n = \sum_{j=1}^{k_n} E_{nj} \times F_{nj}$ と書ける. この和から $\mu_X(E_{nj}) = 0$ または $\mu_Y(F_{nj}) = 0$ を満たす $j$ についての和を除いたものを $A'_n$ とおくと, (13) (で $\mu \Longrightarrow m$ としたもの) から $m(A_n) = m(A'_n)$ なので, $\lim_{n\to\infty} m(A'_n) = 0$ を言えば十分. よって最初から $\mu_X(E_{1j}) > 0$, $\mu_Y(F_{1j}) > 0$, $j = 1, 2, \cdots, k_1$, を仮定してよい. 従って (13) より,

(22) $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k_1} (\mu_X(E_{1j}) + \mu_Y(F_{1j})) < \infty.$

[28] 960219–22 哲弥証明. cf. 補題 14 の証明. (2) の証明に関して [伊藤清三, p.58] の証明は $\sigma$ 有限性を仮定するが, 本質ではない. Borel 集合への一意拡張にこだわって完備化と分離するのは, 初学者向きではないし, 位相空間論にこだわりすぎの気がする. 解析の 2 大要素微分と積分は本来独立で, 位相や連続性が微分を, 加法性や測度が積分を基礎づける. 両者が逆演算の関係にあるような集合 (空間) 上で強力な解析が展開されるのではないか? 960822 哲弥追記 : 最小の$\sigma$-加法族としての Borel 集合の意義は Stieltjes 積分のときの一連の測度に共通の定義域であることである §14.

さらに仮定 (21) より $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n}(\mu_X(E_{nj})+\mu_Y(F_{nj}))\le M$ が全ての $n\in\mathbf{N}$ に対して成立.

$c>0$ とする. $E'_n=\displaystyle\sum_{i:\ \mu_Y(F_{ni})\ge c}E_{ni}$, $E''_n=\displaystyle\sum_{i:\ \mu_Y(F_{ni})<c}E_{ni}$, とおくと $m(A_n)\le c\mu_X(E''_n)+M\mu_X(E'_n)\le M(c+\mu_X(E'_n))$, $n\in\mathbf{N}$, となるから

(23) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}m(A_n)\le M(c+\limsup_{n\to\infty}\mu_X(E'_n)),\ c>0\,.$

$\mathcal{F}_X$ は $\sigma$ 加法族だから有限加法族, $\mu_X$ は測度だから $\sigma$ 加法的なので,

(24) $E'_n\supset E'_{n+1},\ n\in\mathbf{N},\ \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}E'_n=\phi,$

が言えれば, (22) とともに 命題 7(1) の仮定を全て満たして, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu_X(E'_n)=0$ を得るので, (23) より $c\downarrow 0$ として (1) の証明が終わる.

(24) の証明. $x\in E'_{n+1}$ とする. $E'_n$ の定義と (15) から, ある $i$, $j$ が存在して $x\in E_{n+1,j}\subset E_{ni}$. このとき $E'_{n+1}$ の定義と (16) より $c\le\mu_Y(F_{n+1,j})\le\mu_Y(F_{n,i})$. よって $x\in E'_n$ となるので, $E'_{n+1}\subset E'_n$ を得る.

他方, $x\in\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}E'_n$ とすると, 各自然数 $n$ 毎に $1\le i_n\le k_n$ が存在して $x\in E_{ni_n}$, $\mu_Y(F_{ni_n})\ge c>0$. 補題 24(15)(16) より $F_{n+1,i_{n+1}}\subset F_{n,i_n}$. $\mathcal{F}_X$ は $\sigma$ 加法族だから有限加法族, $\mu_X$ は測度だから $\sigma$ 加法的なので, (22) と合わせると, 命題 7(1) から $\bigcap F_{ni_n}\ne\phi$ を得る. $y\in\bigcap F_{ni_n}$ とすると $(x,y)\in E_{ni_n}\times F_{ni_n}\subset A_n$. これは $(x,y)\in A_n$, $n\in\mathbf{N}$ を意味するので (21) に矛盾. よって $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}E'_n=\phi$ を得る. □

# §4. 構成された測度の一意性

08

§2.1 で $(\Omega,\mathcal{J},m)$ から 定理 9 によって測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を得たが, ここでは得られた測度空間の一意性を調べる.

一意性についての知識は, 例えば次のような問題を解決する：$\mathbf{R^{p+q}}$ 上の Lebesgue 測度 (§2.2) は $\mathbf{R^p}$ 上の Lebesgue 測度と $\mathbf{R^q}$ 上の Lebesgue 測度の直積測度 (§3) と等しいか？前者は $\mathcal{I}_{p+q}$ から構成するのに対して, 後者は $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_q$, が与えられたところから構成するので, その関係は自明ではない. この問への解答は§4.4 の最後の練習問題で与える.

§2.1 が具体的に測度を構成するのに対して, §4 では議論が非構成的（定義された対象が具体的には分からないこと）になる. 議論を追いかける姿勢の転換に注意.

## §4.1. 加法族の生成と測度の拡張

**定理 25** 空間 $\Omega$ の部分集合からなる任意の集合族（有限加法族でなくても何でも）$\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ を含む最小の $\sigma$ 加法族 $\sigma[\mathcal{A}]$ が存在する. 即ち, $\mathcal{A}$ を含む任意の $\sigma$ 加法族 $\mathcal{C}\supset\mathcal{A}$ に対して $\sigma[\mathcal{A}]\subset\mathcal{C}$ となる. この $\sigma[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する $\sigma$ 加法族と呼ぶ[29].

証明. $2^{\Omega}$ は $\mathcal{A}$ を含む $\sigma$ 加法族. よって $\sigma[\mathcal{A}]=\displaystyle\bigcap_{\mathcal{F}:\ \mathcal{A}\text{ を含む }\sigma\text{ 加法族}}\mathcal{F}$ とおけば, これは空集合ではない. 求めるものであることは容易. □

[29] [伊藤清三, 定理 6.3 (p.32)]. 記号と用語は異なる

**定義 7** *(§2.3.1 再掲)* 位相空間 $(\Omega, \mathcal{O})$ に対して $\sigma[\mathcal{O}]$ を *Borel* 集合族と呼ぶ[30]．*Borel* 集合族上の測度を *Borel* 測度と呼ぶ．

$\mathbf{R^N}$ の例 (§2.3.1)．

**命題 26** $\mathcal{B}_N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma[\mathcal{O}_N] = \sigma[\mathcal{J}_N] = \sigma[\mathcal{I}_N]$.

証明．$E = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{N} (a_{i\nu}, b_{i\nu}] \in \mathcal{J}_N$ に対して $O_M = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{N} (a_{i\nu}, b_{i\nu} + \dfrac{1}{M})$, $M \in \mathbf{N}$, は $E$ を含む開集合（$b_{i\nu} = \infty$ のときは $b_{i\nu} + \frac{1}{M} = \infty$ と約束すれば，この場合も含めて正しい）．$\bigcap_{M=1}^{\infty} O_M = E$ だから $\sigma[\mathcal{O}_N] \ni E$. $\mathcal{J}_N$ の元は全て $E$ の形だから $\sigma[\mathcal{O}_N] \supset \sigma[\mathcal{J}_N]$.

$\sigma[\mathcal{J}_N] \supset \mathcal{J}_N \supset \mathcal{I}_N$. よって $\sigma[\mathcal{J}_N] \supset \sigma[\mathcal{I}_N]$.

$G \in \mathcal{O}_N$ とすると，任意の $x \in G$ に対して $x \in {I_x}^o$ かつ $I_x \subset G$ となる区間 $I_x$ がある．${I_x}^o$ は $I_x$ の内部．実際，$x$ を中心とする開区間を $G$ の中にとって，それをさらに 1/2 に縮小した開区間に境界点を加えて区間 $I_x$ とすればよい．$I_x$ の内点の集合 ${I_x}^o$ は開区間で，構成から $G = \bigcup_{x \in G} {I_x}^o$ だから Lindelöf の被覆定理 [伊藤清三, p.260] から可算個で $G$ をおおえる．それらを改めて ${I_n}^o$, $n \in \mathbf{N}$, とする．$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset G$. 他方，$I_n \subset G$ だったから $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset G$. 結局 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ となって $G \in \sigma[\mathcal{I}_N]$. 故に $\mathcal{O}_N \subset \sigma[\mathcal{I}_N]$ だから $\sigma[\mathcal{O}_N] \subset \sigma[\mathcal{I}_N]$. □

**定義 8** $\mathcal{F}$ は $\Omega$ の部分集合の $\sigma$ 加法族で有限加法族 $\mathcal{J}$ を含むとする．$\mathcal{F}$ で定義された測度 $\mu$ が $\mathcal{J}$ で定義された有限加法的測度 $m$ の拡張であるとは $\mu|_{\mathcal{J}} = m$ となること．$m$ が $\mathcal{F}$ 上の測度に拡張できるとは，拡張になっている $\mathcal{F}$ 上の測度が存在すること．

## §4.2. 拡張定理

この節では，有限加法的測度 $(\Omega, \mathcal{J}, m)$ が与えられたとする．

**定義 9** 有限加法的測度（もちろん測度でもよい）が $\sigma$ 有限であるとは $m(X_n) < \infty$, $X_n \in \mathcal{J}$, を満たす可算個の集合 $X_n$, $n \in \mathbf{N}$, が存在して $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ と書けること．

注． (i) $X_n' = X_n \setminus \left( \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k \right)$ を考えれば最初から $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$, $m(X_n) < \infty$, と仮定してよい．

(ii) $X_n' = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ を考えれば最初から $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $m(X_n) < \infty$, と仮定してよい．補題 27 と 定理 28 (ii) と §8 ではこの形で使う．

(iii) $\sigma$ 有限性は Hopf の拡張定理 (定理 28) の一意性，完備化の極大性 (§4.3)，Fubini の定理 (§8)，Radon–Nikodým 定理 (§12) の成立に効く．

**補題 27** $m$ が $\sigma$ 有限ならば，$\sigma$ 加法性の必要十分条件 命題 *7 (§2.1.3)* において，*(2)* を次の *(25)* に置き換えられる．

[30] 960822 哲弥：最小の$\sigma$-加法族としての Borel 集合の意義は Stieltjes 積分のときの一連の測度に共通の定義域であることである §14.

(25) $(\forall A \in \mathcal{J};\ m(A) = \infty)\ \lim_{k\to\infty} m(A \cap X_k) = \infty.$

証明. [伊藤清三, pp.54–55] □

**定理 28 (Hopf の拡張定理)** *(i)* $\mathcal{J}$ 上の有限加法的測度 $m$ が $\sigma[\mathcal{J}]$ の上の測度に拡張できるための必要十分条件は $m$ が $\mathcal{J}$ の上で $\sigma$ 加法的なこと.

*(ii)* $m$ が $\sigma$ 有限ならば拡張は一意的である.

証明. 必要性は明らか. 十分なことは (3), 定理 9 によって $\mu$ を構成すると, 命題 10 から $\sigma[\mathcal{J}] \subset \mathcal{F}$, 命題 8 から $\mu|_{\mathcal{J}} = m$. 一意性は [伊藤清三, pp.52–53] □

注. $\sigma$ 有限性がないと一意とは限らない例 [伊藤清三, p.53].

## §4.3. 完備性

定理 28 では一意性は $\sigma[\mathcal{J}]$ までしか保証されない. 有限加法的測度から (3) と 定理 9 によって構成した測度 $\mu$ は 命題 10 から, 定義域 $\mathcal{F}$ がより広い可能性がある. 初めに, この方法を 2 回以上繰り返しても定義域が広がらないことを 命題 29 で示し, その後でこの方法で拡張しうる範囲を特徴づける完備性の概念を導入する.

この節 §4.3 では測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が与えられているとする.

$\mathcal{F}$ は有限加法族, $\mu$ は $\sigma$ 加法的な有限加法的測度であるから, (3) より, $A \subset \Omega$ に対して

(26) $$\mu^*(A) = \ (\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid \{E_n\} \subset \mathcal{F},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} =)\ \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{F},\ A \subset B\}$$

とおくと, 命題 8 から $\mu^*$ は外測度だから, $\mu^*$ に関する可測集合の全体を $\mathcal{B}$ とおくと 定理 9 より $\mathcal{B}$ は $\sigma$ 加法族, かつ, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu^*)$ は測度空間である. さらに, 命題 8 と 命題 10 より, $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mu^*|_{\mathcal{F}} = \mu$, 即ち, 測度 $\mu^*$ は $\mu$ の拡張である.

**命題 29** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が, 有限加法族 $\mathcal{J}$ 上の $\sigma$ 加法的測度 $m$ から *(3)* と 定理 *9* によって構成された測度ならば（外測度として） $\mu^* = \Gamma$ であり, 従って特に $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\Omega, \mathcal{B}, \mu^*)$.

注. 定理 9 による拡張は 1 回で完結し, 繰り返しても測度は精密にならないこと, 特に, $\sigma$ 加法的な有限測度から (3) と 定理 9 によって構成した測度が究極の一般化であること（精密性）を示している.

証明. [31] $A \subset B$ ならば外測度の単調性から $\Gamma(A) \le \Gamma(B)$. $B$ を動かせば $\Gamma(A) \le \mu^*(A)$.

$\epsilon > 0$ とする. $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, $\{E_n\} \subset \mathcal{J}$, $\Gamma(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) - \epsilon$, を満たす $\{E_n\}$ に対して, 命題 8 より $m(E_n) = \Gamma(E_n)$, また, 命題 10 より $E_n \in \mathcal{F}$ だから $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \Gamma(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)$. $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$ だから結局

$$\mu^*(A) \le \Gamma(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \le \Gamma(A) + \epsilon.$$

$\epsilon \downarrow 0$ として $\mu^*(A) \le \Gamma(A)$. □

[31] 960218 哲弥命題+証明.

以下この節 §4.3 の終わりまで，与えられた測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は 定理 9 によって構成されたものでなくてよい．

**定義 10** $N \in \mathcal{F}$ が零集合であるとは $\mu(N) = 0$ であること．

注. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の場合の例は §2.3.2 で既に示した．

**補題 30** $\bar{\mathcal{F}} \overset{\text{def}}{=} \{E \subset \Omega \mid \exists F_1\,,\ F_2 \in \mathcal{F};\ F_1 \subset E \subset F_2,\ \mu(F_2 - F_1) = 0\}$ は $\mu$ の零集合の部分集合と $\mathcal{F}$ を含む最小の $\sigma$ 加法族である．[32]

証明. [33] ${F_2}^c \subset E^c \subset {F_1}^c$, $\mu({F_1}^c - {F_2}^c) = \mu(F_2 - F_1) = 0$ だから補集合は入る．$F_{1n} \subset E_n \subset F_{2n}$, $\mu(F_{2n} - F_{1n}) = 0$, $F_{1n}\,,\ F_{2n} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, とし，$E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $F_i = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{in} \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, とおくと，$F_1 \subset E \subset F_2$, $\mu(F_2 - F_1) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{2n} - F_{1n}) = 0$ だから可算和も入る．よって $\bar{\mathcal{F}}$ は $\sigma$ 加法族.

$\mathcal{F}$ と $\mu$ の零集合の部分集合を含む任意の $\sigma$ 加法族 $\mathcal{B}$ に対して，$F_1\,,\ F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \subset E \subset F_2$, $\mu(F_2 - F_1) = 0$, ならば $E - F_1$ は零集合の部分集合なので $E$ も $\mathcal{B}$ の元となる．よって $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}$. □

**定義 11** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が完備であるとは零集合の任意の部分集合が $\mathcal{F}$ の元であること．(測度は当然 0.)

**定理 31** $E \in \bar{\mathcal{F}}$ に対して 補題 *30* の $F_1\,,\ F_2 \in \mathcal{F}$ によって $\bar{\mu}(E) = \mu(F_2)\,(= \mu(F_1))$ を定義すると，$\bar{\mu}$ は $\bar{\mathcal{F}}$ 上の完備な測度である．

証明. 別の $F_1'\,,\ F_2' \in \mathcal{F}$ を持ってくると，$F_2' - F_2 \subset F_2' - E \subset F_2' - F_1'$, $F_2 - F_2' \subset F_2 - E \subset F_2 - F_1$, 故 $|\mu(F_2') - \mu(F_2)| \leq \max\{\mu(F_2' - F_1'),\ \mu(F_2 - F_1)\} = 0$, 即ち，$\mu(F_2') = \mu(F_2)$ で $\bar{\mu}$ は well-defined.

$A \subset N$, $N \in \bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mu}(N) = 0$, ならば $\exists N' \in \mathcal{F};\ (\phi \subset)\ A \subset N \subset N'$, $\mu(N') = 0$. だから $A \in \bar{\mathcal{F}}$, よって完備.

$\bar{\mu}(E) \geq 0$ は明らか．$E = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ に対して

$$F_{1n}\,,\ F_{2n} \in \mathcal{F};\ F_{1n} \subset E_n \subset F_{2n}\,,\ \mu(F_{2n} - F_{1n}) = 0\,,\ \mu(F_{1n}) = \mu(F_{2n}) = \bar{\mu}(E_n),\ n \in \mathbf{N}\,,$$

とすると，$\mu(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n} - F_{1n})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{2n} - F_{1n}) = 0$, かつ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{1n} \subset E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n}$ だから，$\bar{\mu}(E) = \mu(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_{1n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$. よって $\sigma$ 加法性も成立. □

明らかに，$\bar{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$ となるには定理 31 の $\bar{\mu}$ の定義しかありえないので，定理 31 は測度 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\bar{\mathcal{F}}$ への拡張の存在と一意性を証明している．

**定義 12** 定理 *31* の測度空間 $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の完備化と呼ぶ．補題 *30* より，完備化とは完備な最小の拡張である．

**補題 32** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から *(26)* によって構成した測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu^*)$ について

*(i)* $\mathcal{B} \supset \bar{\mathcal{F}}$.

*(ii)* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu^*)$ は完備.

---

[32][伊藤清三, (8.1) (p.44)] と同値．こちらの定義が無駄がない．$\mu(F_2 - F1) = 0$ を $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ とすると測度無限のときつまづく．

[33]960218–19 哲弥命題+証明.

*(iii)* $\mu$ が $\sigma$ 有限ならば,

$$(\forall E \in \mathcal{B})\ \exists F_1\,,\ F_2 \in \mathcal{F};\ F_1 \subset E \subset F_2,\ \mu(F_2 - F_1) = 0\,.$$

証明. $A \subset N$, $\mu(N) = 0$, $N \in \mathcal{F}$, とすると，$\mu^*(A) \le \mu(N) = 0$ だから $\mu^*(A) = 0$. $C \subset \Omega$ に対して $\mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \le \mu^*(A) + \mu^*(C) = \mu^*(C)$ となり，$A \in \mathcal{B}$. よって $\mathcal{B}$ は $\mu$ の零集合を全て含むので，(26) の下の議論と補題 30 から (i) を得る．$A \subset N$, $\mu^*(N) = 0$, $N \in \mathcal{B}$, とすると，全く同様の議論によって $A \in \mathcal{B}$. よって (ii) も成り立つ.

(iii) を先ず $\mu^*(E) < \infty$ の場合に証明する．$\mu^*$ の定義から

$$(\forall n \in \mathbf{N})\ \exists F_{0n} \in \mathcal{F};\ E \subset F_{0n}\,,\ \mu(F_{0n}) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n}\,.$$

$F_2 \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{0n}$ とおくと $E \subset F_2 \in \mathcal{F}$ で $\mu^*(F_2 - E) = \mu^*(F_2) - \mu^*(E) \le \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. よって $\mu^*(F_2 - E) = 0$. 今の議論の $E$ を $F_2 - E$ に置き換えると，$\exists N \in \mathcal{F}$; $F_2 - E \subset N$, $\mu(N) = 0$. $F_1 = F_2 - N \in \mathcal{F}$ とおくと $F_1 \subset E$, $\mu(F_2 - F_1) \le \mu(N) = 0$, で (iii) が成り立つ.

$\mu^*(E) < \infty$ とは限らない場合，仮定から $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \Omega$, $\mu(X_k) < \infty$, $k \in \mathbf{N}$, なる $\{X_k\} \subset \mathcal{F}$ $(\subset \mathcal{B})$ がある．$E_k = E \cap X_k$ $(\in \mathcal{B})$ とおくと，$\mu^*(E_k) < \mu^*(X_k) = \mu(X_k) < \infty$ $(\mu^*|_{\mathcal{F}} = \mu)$ なので今証明したことから $F_{1k} \subset E \subset F_{2k}$, $\mu(F_{2k} - F_{1k}) = 0$, なる $F_{1k}\,,\ F_{2k} \in \mathcal{F}$ がある．$F_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{ik} \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, とおけば (iii) を得る. □

**系 33** $\mu$ が $\sigma$ 有限ならば，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から *(26)* によって構成した $(\Omega, \mathcal{B}, \mu^*)$ と完備化 $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ は一致する.

注. $\sigma$ 有限な「素朴な」測度 $(\mathcal{J}, m)$ から (3) と定理 9 によって構成した測度 $(\mathcal{F}, \mu)$ は，定理 28 より $\sigma[\mathcal{J}]$ まで一意的だから，系 33 を $\mathcal{F} \to \sigma[\mathcal{J}]$, $\mathcal{B} \to \mathcal{F}$, $\mu^* \to \mu$ として用いれば，$m$ の完備な最小の拡張であることがわかる.

証明. 補題 32(i)(iii) より $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{B}$. $B \in \mathcal{B}$ に対して 補題 32(ii) の $F_1$, $F_2 \in \mathcal{F} = \mathcal{B}$ をとると，$\mu^*(E) = \mu^*(F_1) + \mu^*(F_1 - E) = \mu(F_1) = \bar{\mu}(E)$. ここで $\mu^*|_{\mathcal{F}} = \mu$ と 定理 31 を用いた. □

## §4.4. Lebesgue 測度の一意性と完備性

**定理 34** $\mathbf{R^N}$ を全体集合とする測度空間 $(\mathbf{R^N}, \mathcal{F}, \mu)$ であって，区間が可測 $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{F}$ で，$I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_N, b_N] \in \mathcal{I}_N$ に対して素朴な体積を与える $\mu(I) = \prod_{\nu=1}^{N} (b_\nu - a_\nu)$ ものが存在する．特に，$\mathcal{F}_N = \overline{\sigma[\mathcal{J}_N]}$ への（完備測度としての）拡張は一意的であり，それが *Lebesgue* 測度 $(\mathbf{R^N} \mathcal{F}_N, \mu_N)$ である.

注. 一般には Hopf の拡張定理と完備化によって $\mathcal{F} = 2^\Omega$ までは拡張できない．与えられた測度を $2^\Omega$ できるか否かの一般論の有無は私は知らない．$\mathbf{R^N}$ の Lebesgue 測度は平行移動不変性によって特徴づけられる (§15.2.1) ので，拡張可能性についても議論できる.

証明. $\mu_N$ は少なくとも $\sigma[\mathcal{J}_N]$ に $m_N$ を拡張した測度で，定理 28 から拡張は一意的である．系 33 から $(\mathcal{F}_N, \mu_N)$ は $(\sigma[\mathcal{J}_N], \mu_N)$ の完備化であり，それは一意的な拡張である. □

**練習問題**

$\mathbf{R}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ 上の Lebesgue 測度は $\mathbf{R}^{\mathbf{p}}$ 上の Lebesgue 測度と $\mathbf{R}^{\mathbf{q}}$ 上の Lebesgue 測度の直積測度（の完備化）になっている[34] [伊藤清三, 解答 p.276].

[34] [伊藤清三, p.59, 問 2]

# 第 2 章 積分

伊藤 8 回 荒川 11 回 (可測関数 +1, 積分 +2)

## §5. 定義

### §5.1. 可測関数の定義

#### §5.1.1. 一般的定義

09

**定義 13** 可測空間（空間とその部分集合からなる空でない $\sigma$-加法族）$(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ に対して，関数 $f : \Omega \to \Omega'$ が可測関数[35]であるとは,

$$(27) \quad A \in \mathcal{F}' \Longrightarrow f^{-1}(A) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in A\} \in \mathcal{F}\,.$$

一つの空間上に複数の $\sigma$-加法族を考える場合には，上記を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測，と書く．

素朴な積分のアイディアに従って，積分は測度（長さ）に基づく（$f$ のグラフの）面積としてとらえるので，$f$ の定義域は測度空間である．$\sigma$-加法族 $\mathcal{F}$ を考えるのはその意味で当然．$\mathcal{F}'$ は次の意味で $\sigma$-加法族であるとして一般性を失わないので，最初から $\sigma$-加法族とした．

**命題 35** $f :\ \Omega \to \Omega'$ と $\sigma$-加法族 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ が与えられたとき，$\mathcal{F}' \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \subset \Omega' \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ は $\sigma$-加法族.

証明. $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{F}$ より $\Omega' \in \mathcal{F}'$，よって空ではない．$A \in \mathcal{F}'$ とすると $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$．$\mathcal{F}$ は $\sigma$-加法族だから

$$\mathcal{F} \ni f^{-1}(A)^{c} = \{x \in \Omega \mid f(x) \notin A\} = f^{-1}(A^{c})\,.$$

よって $A^c \in \mathcal{F}'$．同様に，$A_n \in \mathcal{F}'$, $n \in \mathbf{N}$, とすると，$\mathcal{F}$ は$\sigma$-加法族だから

$$\mathcal{F} \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in \bigcup_{n} A_n\} = f^{-1}(\bigcup_{n} A_n)\,.$$

よって $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}'$. □

可測関数の定義 (27) に対して，§5.1.3 以降， $\Omega' = \mathbf{R}$ $(\cup\{\pm\infty\})$ （部分集合も可）のみで意味を持つ同値条件 (定理 38) を併用する．可測関数の定義 (27) は自然かつ一般的な定義だが，新しい条件は単関数近似定理 40 を通して積分の定義が容易になる．

一般の無限次元ベクトル値関数（Banach 空間値関数）について，統一的に積分論が展開できれば (27) で徹底できるかも知れないが，Radon–Nikodým の定理の成立が無条件でないらしいこと，一部の「一般的」定義は $\mathbf{R}$ 値関数の積分に基づいて積分を定義することなど，実数値関数の積分の定義が特別な意味を持っている (§16.3 参照).

$\Omega' = \mathbf{R}$ $(\cup\{\pm\infty\})$ の場合が解決すれば，$\Omega'$ を $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ に拡張する（有限次元ベクトル値関数）のは成分毎に積分を考えればよいので，容易である．特に，複素数値関数の積分への拡張は容易である.（複素数値を持ち出したのは原理的な remark ではなく，フーリエ変換を考えるときのコメントに過ぎない.）

定義域 $(\Omega, \mathcal{F})$ は任意の可測空間でよい．積分論が，面積の問題を越えて，現代確率論の定義を支えられる普遍性の一つ.

[35]960709 哲弥．逆像で考えるのが素朴な積分の概念と整合する．Riemann 積分が $x$ 座標で縦に切って短冊の面積を考えるのに対して，Lebesgue 積分が $y$ 座標で横に切って面積を定義した，という解説を見たことがある．但し， Lebesgue がそのような「発想の転換」から Lebesgue 積分に至ったのではない．むしろ，素朴に面積を 2 次元測度とみて，関数のグラフと $x$ 軸で囲む領域が 2 次元 Lebesgue 可測集合になる関数を可測関数とし，それを関数の言葉に翻訳する過程で発想の転換に至ったと思う (§16.2.1).

素朴な積分（Riemann 積分）の拡張という古典的な動機に限定すれば，$\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$，また，$\mathcal{F}$ として Lebesgue 可測集合族（§2.2 で構成した $\mathcal{F}_N$）[36]の場合のみ考えれば十分．そこに限定して考えて，理解の本質を損なうことはほとんどない．

### §5.1.2. 単関数

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$A \subset \Omega$ に対して

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

で定義される関数 $\chi_A$ を $A$ の定義関数と呼び，記号 $\chi$ をこの意味に使う．例：$\chi_\Omega$ は恒等的に 1 となる関数，$\chi_\emptyset$ は恒等的に 0 となる関数.

$E \in \mathcal{F}$ を固定する（$E = \Omega$ と思っていてよい）.

**定義 14** 全ての $j$ について $E_j \in \mathcal{F}$, かつ，$E = \sum_{j=1}^{k} E_j$ （有限個の直和）を満たす $E_j$, $j = 1, 2, 3, \cdots, k$, と $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, 3, \cdots, k$, を用いて，$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$ と表される $E$ 上の実数値関数を単関数（階段関数）と呼ぶ.

注. 単関数については $\pm\infty$ の値をとらないと約束する ($a_j \in \mathbf{R}$).

単関数の実数倍，和，積は単関数である.

### §5.1.3. 可測関数

以下，$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間，$\Omega' = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$，とする.

本質的に，$\Omega' = \mathbf{R}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{B}_1$, を考えたいのだが，[伊藤清三, §10 以下] との整合性のため，$\pm\infty$ を許す. この本質的でない拡張のために，次の命題を準備する[37].

**補題 36** 集合 $\Omega$ と $\Omega' = \Omega \cup \{a\}$ （$a \notin \Omega$）がある．$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{J}$ に対して，$\Omega$ の部分集合の族として $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{J}]$ とおく．もし，$\exists A_n \in \mathcal{J}$, $n \in \mathbf{N}$; $\bigcup_n A_n = \Omega$, ならば，$\Omega'$ の部分集合の族として，

$$\sigma[\mathcal{J} \cup \{a\}] = \mathcal{F} \cup \{B \cup \{a\} \mid B \in \mathcal{F}\}.$$

証明. 左辺を $\mathcal{L}$，右辺を $\mathcal{R}$ とする．$\mathcal{R}$ が $\Omega'$ の $\sigma$-加法族であることは，$B \in \mathcal{F} \Longrightarrow B^c = \{a\} \cup \Omega \setminus B \in \mathcal{R}$ などより分かる．よって，$\mathcal{L}$ の最小性から $\mathcal{R} \supset \mathcal{L}$.

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cap 2^\Omega$ とおく．$\mathcal{L}$ は $\sigma$-加法族なので，仮定より $\Omega = \bigcup_n A_n \in \mathcal{L}$，かつ，$A \in \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ ならば $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$．これらは $\Omega$ の部分集合でもあるので，$\Omega$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}'$. 同様に，$A_n \in \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ ならば $\bigcup_n A_n \in \mathcal{L}'$. 即ち，$\mathcal{L}'$ は $\Omega$ の部分集合の族として $\sigma$-加法族．$\mathcal{J} \subset \mathcal{L}'$ だから，$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$．$\mathcal{L} \ni \{a\}$，かつ $\mathcal{L}$ は（$\sigma$-加法族なので）和について閉じているから，$\mathcal{L} \supset \mathcal{R}$. □

以下，この講義の可測関数及び積分の議論において，

(28) $\Omega' = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$,  $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1,\ C \in 2^{\{\pm\infty\}}\}$,

[36]Borel 可測関数（$\mathcal{F} = \mathcal{B}_N = \sigma[\mathcal{O}_N]$）は省略

[37]補題 36, 命題 37, 定理 38 は普通の定義 §5.1.1 と，実数値関数の積分を定義するのに [伊藤清三] が用いた性質をつなぐために哲弥が導入 960709.

とおく．$2^{\{\pm\infty\}} = \{\emptyset,\ \{+\infty\},\ \{-\infty\},\ \{\pm\infty\}\}$. $\mathcal{B}_1$ は 1 次元 Borel 集合族 $\mathcal{B}_1 = \sigma[\mathcal{O}_1]$ (§2.3.1, §4.1)．$\mathcal{O}_1$ は $\mathbf{R}$ の開集合全体．補題 36 を 2 度使うと，

(29) $\mathcal{F}' = \sigma[\mathcal{O}_1 \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}]$

ここで，右辺は $2^{\Omega'}$ の部分集合の族としての $\sigma$-加法族.

注．$\mathcal{F}' = \sigma[\mathcal{O}_1 \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}]$ ととるのは，積分を単関数に対して自明に定義した後，単関数近似で一般の可測関数の積分を定義するからである． 定理 40 のように，単関数近似は $\mathbf{R}$ の開集合の位相に関する収束だから，$\mathcal{F}' \supset \mathcal{O}_1$．値として無限大を許すので $\mathcal{F}' \supset \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}$．$\mathcal{F}'$ を $\sigma$-加法族にとる理由は 命題 35.

[伊藤清三, §10] の可測関数の定義との一致を見ておく[38].

**命題 37** $\Omega'$ を全体集合とするとき，$\mathcal{F}' = \sigma[\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\}]$．ここで，$(a, +\infty] = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \cup \{+\infty\}$.

証明．命題 26 より，$\mathcal{B}_1$ は区間 $\mathcal{I}_1$ を含む最小の $\sigma$-加法族: $\mathcal{B}_1 = \sigma[\mathcal{O}_1] = \sigma[\mathcal{I}_1]$. $\{+\infty\} = \bigcap_n (n, \infty]$, $\{-\infty\} = \left(\bigcup_n (-n, \infty]\right)^c$, $(a, b] = (a, \infty] \setminus (b, \infty]$, $\mathbf{R} = \left(\bigcup_n (-n, \infty]\right) \setminus \{\infty\}$, などより，$\sigma[\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\}] \supset \mathcal{I}_1 \cup \{\{\infty\}, \{-\infty\}\}$．補題 36 と (28) から $\sigma[\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\}] \supset \mathcal{F}'$.

$\mathcal{F}' \supset \mathcal{O}_1 \ni (a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$．また， $\mathcal{F}' \ni \{\infty\}$．よって，$\mathcal{F}' \ni \bigcup_n (a, n) \cup \{\infty\} = (a, \infty]$．故に，$\mathcal{F}' \supset \sigma[\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\}]$. □

**定理 38** $(\Omega', \mathcal{F}')$ が *(28)* のとき，$f:\ \Omega \to \Omega'$ が $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測 *(§5.1.1)* であることと，

(30) $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{F},\ a \in \mathbf{R},$

が成り立つことは同値である.

証明．まず，(30) を仮定する．$\tilde{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega' \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とおくと，命題 35 より，これは（$\Omega'$ における）$\sigma$-加法族であって，(30) より，$(a, +\infty] \in \tilde{\mathcal{F}}$, $a \in \mathbf{R}$. これと 命題 37 より，$\tilde{\mathcal{F}} \supset \sigma[\{(a, +\infty] \mid a \in \mathbf{R}\}] = \mathcal{F}'$. これと (27) を比べれば，$f$ が $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測であることが分かる．

逆に $f$ が $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測とする．命題 37 より， $\mathcal{F}' \ni (a, +\infty]$, $a \in \mathbf{R}$. (27) より，(30) が成り立つ． □

以下，$\Omega' = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1,\ C \in 2^{\{\pm\infty\}}\}$, の場合はいちいち断らない．また，$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測関数を単に可測関数と呼ぶ．例えば，単関数は可測関数である．

**命題 39** $f$ が 可測関数ならば，$-f$, $\max\{f, 0\}$, $\min\{f, 0\}$, も可測関数.

証明．任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(-f)^{-1}((a, +\infty]) = f^{-1}([-\infty, -a)) = f^{-1}([-a, \infty])^c = \left(\bigcap_n f^{-1}((-a - \frac{1}{n}, \infty])\right)^c.$$

よって，定理 38 より，$(-f)^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{F}$ となるから，定理 38 より $-f$ は可測関数．また，

$$(\max\{f, 0\})^{-1}((a, +\infty]) = \begin{cases} \Omega, & \text{if } a < 0\,, \\ f^{-1}((a, +\infty]), & \text{if } a \ge 0\,, \end{cases}$$

[38] 960712 哲弥．[伊藤清三] は，後で用いないのをいいことに，可測関数の自然かつ一般的な定義 (§5.1.1) を導入せず，実数値 Borel 可測関数の場合のみに意味を持つ 定理 38 の性質を定義とした．[伊藤清三] はこれによって，実数に無限大という点を付加する 補題 36, 命題 37 というつまらない議論を避けることができたが，恐らく一般的視点を著者自らが一時的に損なったため，[伊藤清三, p.73] の奇妙な表を掲げることになった．なお，この表が奇妙であるという指摘は立教大学数学科山田裕二先生による．詳しくは §A 参照.

となるので，$\max\{f,0\}$ も可測関数．よって， $\min\{f,0\} = -\max\{-f,0\}$, も可測関数． □

**定理 40** $f$ が可測関数ならば，二つの非負値関数 $\max\{f,0\}$, $-\min\{f,0\}$ それぞれについて，非負単関数の単調増加列 $\{f_n\}$ で， $\max\{f,0\}$ $(-\min\{f,0\})$ に各点収束するものがある．

証明．命題 39 より， $\max\{f,0\}, -\min\{f,0\}$ ともに可測関数だから，最初から $f$ が非負値可測関数の場合に証明すれば十分である．

$$(31)\quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in f^{-1}(0), \\ (k-1)2^{-n}, & x \in f^{-1}(((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]),\ k = 1,2,3,\cdots,2^n n\,, \\ n & x \in f^{-1}((n,\infty])\,, \end{cases}$$

とおくと，$f$ が可測関数なので，$f^{-1}(((k-1)2^{-n}, k2^{-n}])$ などは $\mathcal{F}$ の元である．よって， ${f_n}^{-1}(a) \in \mathcal{F}$ だから，$f_n$ は単関数である．作り方から，単調増加性は当然． □

注． (i) $f$ が単関数 $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$ のときは，(31) の単関数は，定義から容易に分かるように，$E_j$ を共通にとって $f_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{nj} \chi_{E_j}$ という形に表すことができる（異なる $j$ に対して等しい $a_{nj}$ の値を許す）．

(ii) 気持ち：可測関数＝単関数近似可能な関数＝積分が定義可能な関数（定理 40 の逆も言える.）

## §5.2. 積分の定義 10

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

$E \in \mathcal{F}$ を固定する（$E = \Omega$ と思っていてよい）．$E$ 上で定義された可測関数 $f\colon\ E \to \Omega'$ に対して積分 $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,\mu(dx)$ を定義する．

### §5.2.1. 非負値単関数の場合

**定義 15** 非負値単関数，即ち，$E = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} E_j$ を満たす $E_j \in \mathcal{F}$, $j = 1,2,3,\cdots,n,$ と $a_j \geq 0$, $j = 1,2,3,\cdots,n,$ に対して $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ とおくとき，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \sum_{j;\ a_j \neq 0} a_j \mu(E_j)$ で $f$ の $E$ における積分を定義する．$\mu(E_j)$ は $E_j$ の測度．ここで，和は $a_j = 0$ なる $j$ を除く $1 \leq j \leq n$ にわたる和を意味する．$a_j \neq 0$ かつ $\mu(E_j) = \infty$ なる $j$ が一つでもあれば，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \infty$ と理解する．

定義から容易に分かるように，単関数 $f$, $g$ について,（$f+g$ も単関数になることより,）

$$(32)\quad \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu\,.$$

従って，特に，$f \leq g$ ならば $\displaystyle\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$. また，$E \in \mathcal{F}$ 上の単関数 $f$ に対して，$A, B \in \mathcal{F}$ が $E = A + B$ を満たせば，（$f|_A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap A}$ などより，）

$$(33)\quad \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu = \int_E f\,d\mu\,.$$

従って，特に，$f$ が非負値で，$F \subset E$ ならば，$\int_F f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$.

注. この定義は「面積（体積）は横の長さ（底面積）かける縦の長さ」という意味で，殆ど自明の定義．但し，「横（底)」が任意の可測集合でよいから，単なる区間ではなく，区間の可算和やもっと細かい構造（カントール集合など）を持っていてもよい点で一般化・抽象化されている．それ以外の注意は次の 2 点だけ.（単関数の定義で $a_j \in \mathbf{R}$ としたので，値域が $\infty$ の場合の処理はここでは問題にならない.）

(i) $a_j = 0$ なる $j$ を除く，という注釈は，たとえ $\mu(E_j) = \infty$ であっても，$\infty \times 0 = 0$ と解釈するということ．$\mu(E) < \infty$ ならば除く必要はない.

(ii) 非負値に限ったのは，$a_1 = -a_2 = 1$, $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \infty$ のように，$\infty - \infty$ が出るケースは定義不能だから．$\mu(E) < \infty$ ならば負の値をとる場合でも定義に問題ない.

#### §5.2.2. 非負値可測関数の場合

**定義 16** 非負値可測関数 $f$ に対して，定理 *40* の証明 *(31)* で用いた非負値単関数の増大列 $\{f_n\}$ を考え，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$ で $f$ の $E$ における積分を定義する．*(32)*（注意書きの単調性）より，極限が存在する．$+\infty$ に発散する場合は極限を $+\infty$ と定義する.

注. 定理 40 への注により，$f$ として非負値単関数をとっても，この定義は，単関数に対する積分の定義と矛盾は生じない.

#### §5.2.3. 可測関数の場合

**定義 17** 可測関数 $f$ に対して，$f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$, とおくと，命題 *39* よりこれらは非負値可測関数で，$f = f^+ - f^-$. $\displaystyle\int_E f^{\pm}\,d\mu$ が定義されるので，少なくとも一方が有限のとき，そのときに限り，$f$ は（ $E$ 上で，測度 $\mu$ について）**定積分** を持つ，といい，$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$ と定義して，この値を定積分という．また，この定積分が実数値（有限値）のとき，$f$ は $E$ 上で **積分可能**（または，可積分）と言う.

特に，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ *(Lebesgue* 測度*)* のとき，$\displaystyle\int_E f\,d\mu$ を（狭義の）*Lebesgue* 積分と呼び，特に，$\displaystyle\int_E f(x)\,dx$ とも書く.

注. 非負値（非正値）可測関数は，定積分を持つ.

定義から直ちに，$f$ が $E$ 上積分可能ならば

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| = \left|\int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu\right| \leq \int_E f^+\,d\mu + \int_E f^-\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu < \infty\,. \tag{34}$$

# §6. 基本性質

## §6.1. 可測関数の基本性質

#### §6.1.1. Ω の位相構造と独立な性質 11

どんな関数が積分できるのか？以下の操作を繰り返すことで,（単関数から出発して）大抵の関数が積分できる.

ここでも $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間，$\Omega' = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1,\ C \in 2^{\{\pm\infty\}}\}$, とし，$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測関数 $f\colon\ \Omega \to \Omega'$ を考える.

**命題 41** $f,\, g$ が有限値をとる可測関数で，$a, b$ が実数ならば，$|f|^a$ $(a \neq 0)$, $a\,f + b\,g$, $f\,g$ も可測関数である．但し， $|f|^a$ に関して $a < 0$ のとき $0^a = \infty$ と約束する．

また，$\{f_n\}$ が可測関数列ならば，$\sup_{n\geq 1} f_n$, $\inf_{n\geq 1} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\lim_{n\to\infty} f_n$ （存在すれば）, $\sum_n f_n$ （存在すれば）, も可測関数である．(要するに，高々可算個の可測関数から線型演算，積，極限操作を有限回施して得られる関数は可測関数ということ.)

証明. $-f$ については 命題 39. あとは全て，[伊藤清三, 定理 10.1–10.6]．証明は単調であり，注意すべきことはない． □

次の Egoroff の定理は多分，この講義ノートの構成上は Lusin の定理 (定理 44) 以外には陽には必要ないと思うので証明はしないが，重要な定理なので収録しておく．

**定理 42 (Egoroff)** $E \in \mathcal{F}$, $\mu(E) < \infty$, $f_n:\ E \to \Omega'$, $n \in \mathbf{N}$, は $\mu(E \cap \{x \in \Omega \mid f_n(x) = \pm\infty\}) = 0$ を満たす可測関数であって，$\mu(E \cap \{x \in \Omega \mid \exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) < \infty\}^c) = 0$ を満たすとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して $F \subset E$, $\mu(E - F) < \epsilon$ なる $F \in \mathcal{F}$ であって，$F$ 上で $\{f_n\}$ が $f$ に一様収束するものが取れる．

証明. [伊藤清三, pp.64–65, 補助定理，定理 10.9]. 証明はさほど長くはないし，込み入ってもいない． □

### §6.1.2. Ω が位相空間の場合

$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{F}_N)$ の場合，連続関数や区分的に連続な関数は可測関数であることが以下の諸定理で分かる．従って，実用上 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上の具体的な関数は常に Lebesgue 可測関数になり，実用上は（狭義の） Lebesgue 積分に関して可測性を気にする場面はほとんどない．Lebesgue 積分の力強さの一つである．

証明を見れば明らかなように，連続関数が可測関数であることは $\Omega$ が一般の位相空間（開集合系が定義されている空間）で成り立つし，もっと強い性質が広い範囲の位相空間で成り立つが，ここでは簡単のため $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の場合のみを証明する．

以下，この小節では $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ を Lebesgue 測度空間とする．$\mathcal{F}_N$ は §2.2 で構成した Lebesgue 可測集合族である．

**定理 43** $E \in \mathcal{F}_N$ 上の連続関数 $f:\ E \to \mathbf{R} \subset \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ は $\mathcal{F}_N/\mathcal{F}'$ 可測関数である[39]．

証明. 連続関数は開集合の逆像が開集合なので

$$f^{-1}((a,\infty]) = f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{O}_N \subset \mathcal{B}_N \subset \mathcal{F}_N\,.$$

□

注. $f$ が $E$ より広い範囲で定義されているときは，$(f|_E)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap E$ なので，$E$ が可測集合ならば，全ての議論が成立する．以下では同様の注意を省略する．

**定理 44 (Lusin)** $E \in \mathcal{F}_N$ 上の可測関数 $f:\ E \to \mathbf{R}$ （$\pm\infty$ はとらないとする）と $\epsilon > 0$ に対して，閉集合 $F \subset E$ を，$\mu_N(E - F) < \epsilon$ かつ $f$ が $F$ 上で連続であるようにできる．

[39] 証明から明らかに，$\mathcal{F}_N$ を $\mathcal{B}_N$ で置き換えても定理は成り立つ．

証明．この証明には Egoroff の定理 定理 42 を用いる [伊藤清三, p.65 定理 10.9 系, pp.67–68 定理 11.2]. $\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ のときに重要な定理だが，講義の展開で陽には用いないので，証明は略す．Egoroff の定理を用いれば長い証明ではない． □

**命題 45 ([伊藤清三, p.71, p.277, §11 問 2])** *Lusin* の定理の逆が成り立つ．即ち，$E \in \mathcal{F}_N$ 上の関数 $f : E \to \mathbf{R}$ が与えられたとする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\mu_N(E - F_\epsilon) < \epsilon$ を満たす可測集合 $F_\epsilon \subset E$ が存在して，$f$ が $F_\epsilon$ 上で連続になるならば，$f$ は $E$ 上で $\mathcal{F}_N/\mathcal{F}'$ 可測関数である[40].

証明．$F = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n} \subset E$ とおくと，$F \in \mathcal{F}_N$ であって，$f$ は $F$ 上連続だから定理 43 より，$f$ は $F$ 上で可測関数．即ち，$f^{-1}((a,\infty]) \cap F \in \mathcal{F}_N$.

一方，$F$ の作り方から任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mu_N(E - F) < \epsilon$ だから，$E - F$ は零集合．Lebesgue 測度の完備性 補題 32 より，その任意の部分集合は $\mathcal{F}_N$ の要素である．よって，$E$ 上で $f^{-1}((a,\infty]) \cap E = (f^{-1}((a,\infty]) \cap F) + (f^{-1}((a,\infty]) \cap (E - F) \in \mathcal{F}_N$. □

## §6.2. 積分の基本性質

### §6.2.1. 広義の Lebesgue 積分

再び，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を（位相空間とは限らない）測度空間とする．

積分の基本的な性質（線型性など）を挙げる[41]．基本性質のうち，収束に関するものと多重積分に関するものは節を改めて述べる．

積分の定義 (§5.2) では，(31) という特定の単関数列を選んだが，増大単関数列ならば何でもよいことを最初に証明する．

**補題 46 ([伊藤清三, pp.75–76, 補助定理 2])** $E$ 上で，$\{f_n\}$ が非負値単関数の増加列，$g$ が非負値単関数で，各 $x \in E$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \int_E g \, d\mu$.

証明．$f_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj}\chi_{E_{nj}}$, $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$, $a_- = \min\{a_j \mid a_j \neq 0,\ j = 1,2,3,\cdots,k\}$, とおく．$a_- > \epsilon > 0$ なる $\epsilon$ に対して，$g_\epsilon = \max\{g - \epsilon, 0\} = \displaystyle\sum_{j:\ a_j \neq 0} (a_j - \epsilon)\,\chi_{E_j}$ で $g_\epsilon$ を定義すると，$g_\epsilon$ は非負値単関数である．$E_p = \displaystyle\sum_{j:\ a_j \neq 0} E_j$ とおけば，$g_\epsilon = g - \epsilon\chi_{E_p}$ と書くこともできる．$F_n = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq g_\epsilon(x)\}$ とおくと，命題 41 より $f_n - g_\epsilon$ は可測関数だから，$F_n \in \mathcal{F}$. 仮定より，$\{F_n \cap E_p\}$ は単調増加で，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \cap E_p) = E \cap E_p$ だから，測度の連続性 (命題 2 のこと) より，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n \cap E_p) = \mu(E \cap E_p)\,. \tag{35}$$

（$E$, $F_n$, $E_p$ と $f_n$, $g_\epsilon$ を模式図にしたほうが分かりやすい.）

$\mu(E \cap E_p) = \infty$ ならば，(33) より，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \geq \int_{F_n \cap E_p} f_n \, d\mu \geq \int_{F_n \cap E_p} (g - \epsilon)\, d\mu \geq (a_- - \epsilon)\,\mu(F_n \cap E_p)\,.$$

左辺は $n$ によらないので，(35) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \infty$ となって，主張が成立する．

$\mu(E \cap E_p) < \infty$ ならば，同様に変形すると，

[40] $\mathcal{F} = \mathcal{B}_N$ のときはここまでは言えない.（区分的に連続な関数くらいまでは 定理 43 と全く同様の証明で大丈夫だが.）
[41] 定理 48 は [伊藤清三, p.79, 定理 12.2], 定理 49 は [伊藤清三, p.81, 系 1], 定理 50 は [伊藤清三, p.81, 系 2].

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \ge \int_{F_n\cap E_p}(g-\epsilon)\,d\mu = \int_{F_n\cap E_p} g\,d\mu - \epsilon\,\mu(F_n\cap E_p)\\
&\ge \int_E g\,d\mu - \int_{(E-F_n)\cap E_p} g\,d\mu - \epsilon\,\mu(E\cap E_p)\,.
\end{aligned}
$$

最後の変形で，(33) と $\int_{E\cap E_p} g\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ を用いた．右辺で，(32) を用いると

$$
0 \le \int_{(E-F_n)\cap E_p} g\,d\mu \le \max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(\mu(E\cap E_p)-\mu(F_n\cap E_p))\,,
$$

となるので，$n\to\infty$ として，$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu - \int_E g\,d\mu \ge O(\epsilon)$ が成り立つ．左辺は $\epsilon$ によらないので主張が成り立つ． □

**定理 47** $f$ が非負値可測関数，$\{f_n\}$ が非負値単関数の増加列で，$f$ に各点収束するならば，$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$

証明. $\int_E f\,d\mu$ を定義する (31) の単関数近似列を $\{f_{0n}\}$ とおく．$\{f_n\}$, $\{f_{0n}\}$ ともに非負値単関数の増加列で，極限が各点で等しいから，各 $m$ 毎に $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ge f_{0m}(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_{0n}(x) \ge f_m(x)$, が，各 $x$ で成り立つ．補題 46 より，全ての $m$ で，$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \ge \int_E f_{0m}\,d\mu$, $\lim_{n\to\infty}\int_E f_{0n}\,d\mu \ge \int_E f_m\,d\mu$. $m\to\infty$ として，定義 $\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_{0n}\,d\mu$ を用いれば，定理を得る． □

**定理 48** *(i)* $\mu(E)=0$ ならば，任意の可測関数 $f$ に対して（積分可能であって）$\int_E f\,d\mu = 0.$

*(ii)* $f$ が $E$ 上積分可能ならば，$\mu(\{x\in\Omega \mid f(x)=\infty\}) = \mu(\{x\in\Omega \mid f(x)=-\infty\}) = 0.$

証明. (i) $f^{\pm}$ に分けて単関数近似に戻れば，明らか．

(ii) $f^{\pm}$ に分けて単関数近似に戻れば，$\infty > \int_E f^+\,d\mu \ge n\,\mu(f=+\infty)$. よって，明らか．$-\infty$ も同様． □

**定理 49 (線型性)** *(i)* 可測集合 $E,\,A,\,B$ が $E=A+B$ を満たし，$f$ が $A,\,B$ 各々の上で積分可能ならば，$f$ は $E$ 上積分可能で，$\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$

*(ii)* $f,\,g$ が可測集合 $E$ 上積分可能ならば，任意の $a,b\in\mathbf{R}$ に対して $a\,f+b\,g$ も $E$ 上積分可能であって，

$$
\int_E (a\,f+b\,g)\,d\mu = a\int_E f\,d\mu + b\int_E g\,d\mu\,.
$$

注. $E$ の上で積分可能ならば，明らかに，$A,\,B$ 各々の上で積分可能なので，上記が成り立つ．

証明. (i) $f_n$ を非負値単関数増加列で $f^+=\max\{f,0\}$ に $E$ の各点で収束するものとすると，定理 47 より，$\int_X f^+\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$, が，$X=A,B,E$ に対して成立. (33) より，$\int_E f_n\,d\mu = \int_A f_n\,d\mu + \int_B f_n\,d\mu$ だから，$\int_E f^+\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu + \int_B f^+\,d\mu$. $f^- = -\min\{f,0\}$ についても同様．積分可能だから，$f^{\pm}$ どちらの積分も有限なので，差をとることができる．

(ii) $af+bg$ が可測関数であることは 命題 41．$af$ の積分が $f$ の積分の $a$ 倍に等しいのは，$f^{\pm}$ それぞれについて単関数近似列が $a$ 倍になり，かつ $a$ 倍の極限が極限の $a$ 倍になることから．よって，$a=b=1$ としてよい．$f$, $g$, $f+g$ の正負に応じて $E$ を有限個に分割する．例えば $F=\{x\in E \mid f(x)\geq 0,\ f(x)+g(x)\geq 0,\ g(x)<0\}$ とおくと，$f$ たちが可測関数だから $F$ は可測集合で，$F$ 上 $f$ たちは定符号である．$F$ 上で $-g$ の非負値増大単関数近似列を $-g_n$, $f+g$ の非負値増大単関数近似列を $f_n+g_n$ とおくと，$f_n=(f_n+g_n)-g_n$ も非負値増大単関数列になって $f$ に各点収束する．定理 47, (32) より，

$$\int_F f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_F (f_n+g_n)\,d\mu+\int_F(-g_n)\,d\mu\right)=\int_F (f+g)\,d\mu+\int_F(-g)\,d\mu\,.$$

$f$, $g$ の積分可能性より，$0\leq\displaystyle\int_F f\,d\mu<\infty$, $0\leq\displaystyle\int_F(-g)\,d\mu<\infty$, なので，

$$(0\leq)\ \int_F (f+g)\,d\mu=\int_F f\,d\mu-\int_F(-g)\,d\mu<\infty\,,$$

かつ，(i) で証明したことより，$\displaystyle\int_F (f+g)\,d\mu=\int_F f\,d\mu+\int_F g\,d\mu$. $F$ 以外の部分についても同様である．

□

**定理 50** $f$ が $E$ で積分可能で，$g$ が $\mu(\{x\in E\mid f(x)\neq g(x)\})=0$ を満たす可測関数ならば，$g$ も $E$ で積分可能で，$\displaystyle\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu$.

注．$\mu$ が完備測度（例えば Lebesgue 測度 補題 32）ならば，$g$ の可測性は仮定しなくても自動的.

証明．定理 49 を用いて $F$ と $E-F$ に積分範囲を分割し，$\displaystyle\int_E f\,d\mu=\int_{E-F}g\,d\mu+\int_F f\,d\mu$ の第 2 項において，定理 48 を用いると，$\displaystyle\int_F f\,d\mu=\int_F g\,d\mu=0$ なので，定理が成り立つ． □

### §6.2.2. 狭義の Lebesgue 積分

$(\Omega,\mathcal{F})=(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\mathcal{F}_N)$ の場合，連続関数や区分的に連続な関数は可測関数であったが，これらの積分 (Lebesgue 積分) は，Riemann 積分に等しいことが次の定理で分かる．従って，Riemann 積分に基づく既知の事実は全てそのまま用いてよい．（Riemann 積分との関係についての，より一般的な結果は §16.2.2. Riemann 広義積分の結果は必ずしも Lebesgue 広義積分に用いられない§16.2.4.）

**定理 51 ([§問 1 (pp.79, 277–278)]Seizo)** $(\Omega,\mathcal{F},\mu)=(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\mathcal{F}_N,\mu_N)$ を *Lebesgue* 測度空間とする．有界閉区間 $E\subset\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の上の連続関数 $f$ の *Lebesgue* 積分は *Riemann* 積分に等しい.

証明．Lebesgue 積分を $I_L$, Riemann 積分を $I_R$ とおく．$f\geq 0$ として一般性を失わない（有界閉区間の連続関数なので，$f^{\pm}$ とも積分は有限だから可積分）．$n\in\mathbf{N}$ に対して，$E$ を全ての座標軸方向について $n$ 等分した分割を $E=\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n}E_{nj}$ $(k_n=2^{nN})$ とおく．$x_{nj}\in E_{nj}$ をとって，$a_{nj}=f(x_{nj})$ とおき，$b_{nj}=\inf\{f(x)\mid x\in E_{nj}\}$ として，$f_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n}b_{nj}\chi_{E_{nj}}$ とおくと，$f_n$ は $n$ について単調増加であり，$f$ の $E$ における一様連続性から $\delta_n=\displaystyle\max_{1\leq j\leq k_n}|a_{nj}-b_{nj}|$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, かつ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n=f$ （一様，従って，各点収束）.

定義より $E_{nj}$ の Riemann の意味の体積は Lebesgue 測度 $\mu_N(E_{nj})$ に等しいから，積分の定義より，$I_R=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_j a_{nj}\mu_N(E_{nj})$, $I_L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$.

$$|I_R - I_L| = \left|\sum_j a_{nj}\mu_N(E_{nj}) - \int_E f_n\,d\mu\right| \le \sum_j |a_{nj} - b_{nj}|\mu(E_{nj}) \le \delta_n\mu(E) \to 0,\quad n \to \infty\,.$$

よって，$I_R = I_L$. □

# §7. 収束定理 12

技術的簡明１：極限と積分の可換性が弱い条件で成り立つ．

今まで同様，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\Omega' = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{F}' = \{B \cup C \mid B \in \mathcal{B}_1,\ C \in 2^{\{\pm\infty\}}\}$, とし，$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 可測関数 $f:\ \Omega \to \Omega'$ を考える．

基本は単調収束定理 定理 52 であり，それを単調列以外に翻訳したのが Fatou の補題 定理 55 である．収束定理は全てこれから得られる．

## §7.1. 単調収束定理

**定理 52 ([伊藤清三, 定理 13.2 (p.82)])** $\{f_n\}$ を $E$ 上で定義された，可測関数増大列（非減少列）とする．$\displaystyle\int_E f_1\,d\mu > -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in E,$ （極限として $+\infty$ を許す）ならば（$f$ は定積分を持ち）$\displaystyle\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$

注．例えば，非負値可測関数列 $\{f_n\}$ に対して $f = \displaystyle\sum_n f_n$ とおくと，($f$ は積分可能で，) $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \sum_n \int_E f_n\,d\mu.$

証明．単調増加列で $f_1$ が定積分 $\neq -\infty$ を持つので，$f_n$, $f$ も定積分 $\neq -\infty$ を持つ．

仮定より，$F_{-\infty} = \{x \in E \mid \exists n;\ f_n(x) = -\infty\} = \{x \in E \mid f_1(x) = -\infty\}$ は零集合だから，定理 48 より，積分への寄与はない．$E - F_{-\infty}$ を改めて $E$ とおけば，最初から，$f$, $f_n$ は $E$ の各点で $-\infty$ をとらないと仮定してよい．

$F_n = \{x \in E \mid f_n(x) = \infty\}$ $(\in \mathcal{F})$ とおく．$F_n$ 上では $f_m(x) = f(x) = \infty$, $m \ge n$, なので，$\mu(F_n) > 0$ なる $n$ があれば，両辺 $\infty$ として主張が成り立つ．よって $F_\infty = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は（$\mu(F_\infty) \le \displaystyle\sum_n \mu(F_n) = 0$ より）$\mu(F_\infty) = 0$ と仮定してよい．定理 48 より，$F_\infty$ からの積分への寄与は 0 なので，$E - F_\infty$ を改めて $E$ とおけば，最初から，$f$, $f_n$ は $E$ の各点で有限値をとると仮定してよい．

$g_k = f_k - f_{k-1}$, $k = 2, 3, 4, \cdots$, とおくと，$f_n = f_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} g_k$, $f = f_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} g_k$, $g_k \ge 0$. $g_k$ の非負増大単関数近似列を $G_{kn}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ とし，$h_{k1} = G_{k1}$, $h_{kn} = G_{kn} - G_{k,n-1}$, $n = 2, 3, 4, \cdots$, とおくと，$h_{kn}$ は非負単関数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h_{kn} = g_k$, かつ，

$$\int_E g_k\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\int_E G_{kN}\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\int_E \sum_{n=1}^{N} h_{kn}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E h_{kn}\,d\mu\,.$$

最後の変形で (32) を用いた．これより ((32) を用いて),

$$\int_E f_N\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \sum_{k=2}^{N}\int_E g_k\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \sum_{k=2}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\int_E h_{kn}\,d\mu\,. \tag{36}$$

（図を描くとわかりやすいか？）

他方，$f - f_1 = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} h_{kn}$ だから，有限部分和の列は $f - f_1$ の非負増大単関数近似列になる（例えば，$\sum_{k=2}^{N}\sum_{n=1}^{N} h_{kn}$）．定理 49, 定理 47, (32) より，

$$\int_E f\,d\mu = \int_E (f - f_1)\,d\mu + \int_E f_1\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\int_E \sum_{k=2}^{N}\sum_{n=1}^{N} h_{kn}\,d\mu + \int_E f_1\,d\mu$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_E h_{kn}\,d\mu + \int_E f_1\,d\mu\,.$$

これを (36) と比べれば定理を得る． □

**系 53** $\{E_n\}$ を可測集合とする．$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ならば，$f$ が $E$ 上で定積分を持つとき，$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\,d\mu$.

証明．[伊藤清三, 定理 13.3 (p.88)] □

**系 54** $\{E_n\}$ を可測集合とする．$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ かつ，$\mu(E - \bigcup_n E_n) = 0$ ならば，$f$ が $E$ 上で定積分を持つとき，$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,d\mu$.

証明．[伊藤清三, 定理 13.3 の系 (p.89)] □

## §7.2. Fatou の補題 13

**定理 55** 可測集合 $E$ の上で $f_n \geq 0$ たちが非負値可測関数ならば，$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$.

証明．$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$ $(\leq f_n)$ とおくと，$\{g_n\}$ は非負増加可測関数列で，$\liminf_{n\to\infty} f_n$ に各点収束する．よって，定理 52 から，

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu\,.$$

□

注．(i) 定理 52 から，$\{f_n\}$ は非負値でなくても，積分可能な関数で下から bound されていれば十分．よって，積分可能な関数で上から bound されていれば，$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$.

(ii) 不等号の例：[伊藤清三, p.92, 注意 1] がそのまま使える．$f_n$ を測度の密度の列と見たとき，測度の弱収束に対する反例（領域の縁から逃げる例）である．

**定理 56 (Lebesgue の収束定理, [伊藤清三, 定理 13.6 (p9.90–91)])** 可測集合 $E$ 上で $f_n$ たちが可測関数であって各点収束するとする．$E$ 上で積分可能な（非負値）関数 $\phi$ が存在して，$|f_n(x)| \leq \phi(x)$, $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$, ならば，$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu$.

証明. 定理 55 とその注から（あるいは $\phi \pm f_n$ に 定理 55 を適用して）,

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu\,.$$

□

注. 関数列が積分可能な関数で bound されていれば，極限と積分を交換できる！但し，仮定は除けない．仮定を除いたときの反例は [伊藤清三, p.92, 注意 1]．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を Lebesgue 測度空間，$E = (0,1]$，$f_n(x) = x^{-1}\chi_{[(2n)^{-1}, n^{-1}]}(x)$，とすると，$\{f_n\}$ は $E$ 上恒等的に 0 という関数に各点収束するが，$\displaystyle\int_{(0,1]} f_n(x)\,dx = \log 2 \ne 0$.

この節の定理に関しては，添字 $n$ は連続パラメータにしてもよい．

**系 57 ([伊藤清三, 定理 13.6' (p.93)])** 可測集合 $E$ 上で各 $t \in (-a,a)$ に対して $f_t:\ E \to \Omega'$ が可測関数であって，$\displaystyle\lim_{t\to 0} f_t(x),\ x \in E,$ が存在（各点収束）するとする．$E$ 上で積分可能な（非負値）関数 $\phi$ が存在して，$|f_t(x)| \le \phi(x),\ x \in E,\ t \in (-a,a)$ ならば，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_E f_t\,d\mu = \int_E (\lim_{t\to 0} f_t)\,d\mu.$

証明. $t_n \to 0$ なる任意の数列 $\{t_n\}$ に対して証明すればよいので，定理 56 より直ちに得る． □

**系 58 (項別積分定理, [伊藤清三, 定理 13.7 (p.93)])** 可測集合 $E$ 上で $f_n$ たちが可測関数であって，かつ，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n(x)|\,d\mu < \infty$ ならば，$\displaystyle\mu(\{x \in E \mid \neg\exists \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\}) = 0$ （殆ど全ての $x \in E$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が存在）であって，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_E f_n\,d\mu = \int_E (\sum_{n=1}^\infty f_n)\,d\mu.$

証明. 定理 52 より，$\displaystyle\int_E \sum_{n=1}^\infty |f_n|\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n|\,d\mu < \infty$. よって，$\displaystyle\phi(x) = \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|\ (\ge 0),\ F = \{x \in \Omega \mid \phi(x) = \infty\}$ とおくと，$\displaystyle\int_E \phi\,d\mu < \infty$ であって，定理 48 より，$\mu(F) = 0$. 再び 定理 48 より，$F$ から積分への寄与はないから，$E - F$ を改めて $E$ として，$(0 \le)\ \phi(x) < \infty, x \in E,$ と仮定してよい．従って，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ も $E$ で収束する．$\displaystyle g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ とおくと，$|g_n(x)| \le \phi(x), x \in E,$ となるので，定理 56 （と 定理 49）から定理を得る． □

注. Riemann 積分のときの項別積分定理は極限関数（級数和）の積分可能性の保証に苦労する．例えば [高木貞治, §47 (p.157, p.159)] によれば,「$f_n$ が連続で $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n$ が一様収束ならば項別積分可能」だが，これは一様収束性から極限が連続関数となって Riemann 積分可能である．この苦労は原理的な問題である．即ち，連続関数の極限として Riemann 積分不可能な（有界な）関数を無数に作ることができる．

(i) $m, n \in \mathbf{N}$ に対して，$\cos^{2n}(\pi m! x)$ は $[0,1]$ の連続関数だから,（Riemann の意味でも Lebesgue の意味でも）積分可能．しかし，極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi m! x))$ は $x$ が有理数のとき 1，無理数のとき 0 となり，0 と 1 どちらの値をとる点も稠密に存在するから Riemann 積分不能である．

(ii) §2.3.1 の測度正の疎な閉集合 $E \subset I = [0,1]$ をとる．$f_n$ を $E$ 上で 0 とする．$E$ の構成で $[0,1]$ から除外した開区間の一つを $J = (a,b)$ とするとき，$(a + 2^{-n}(b-a), b - 2^{-n}(b-a))$ で 1, 途中を直線で 0 から 1 まで内挿して $f$ を定義する，ということを，全ての除外区間で行う．$f_n$ は連続関数だが，極限は $\chi_{I\setminus E}$ で，0 と 1 どちらの値をとる点も稠密に存在するから Riemann 積分不能である．

他方，連続関数は可測関数 (定理 43) なので極限は可測関数 (命題 41) になり,（有界ならば） Lebesgue 積分可能である．

このように，**可測関数の空間が極限操作に関して閉じている** という事実が Lebesgue 積分の Riemann 積分に対する（極限操作における）圧倒的優位を保証する．

**系 59 (有界収束定理, [伊藤清三, 定理 13.6 系 2 (p.91)])** $\mu(E) < \infty$ なる可測集合 $E$ 上で $f_n$ たちが可測関数であって，各点収束するとする．もし， $\{f_n\}$ が一様有界，即ち，定数 $M > 0$ が存在して $|f_n(x)| \le M$, $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$, ならば，$f_n$ たちも $\lim_{n\to\infty} f_n$ も $E$ で積分可能であって，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\mu$.

証明. $\phi = M \chi_E$ とおけば， 定理 56 より直ちに主張を得る． □

### §7.3. 積分記号下の助変数に関する連続性と微分

14

**定理 60** 可測集合 $E$ 上で $f_\alpha$ $(a < \alpha < b)$ たちは（可測であって）積分可能とする．各 $x \in E$ に対して $f_\alpha(x)$ が $\alpha$ の関数として微分可能であって，積分可能な関数 $\phi$ が存在して，$\displaystyle \left|\frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha}(x)\right| \le \phi(x)$, $x \in E$, $a < \alpha < b$, とする．このとき，$\displaystyle \int_E f_\alpha \, d\mu$ は $\alpha$ の関数として微分可能であって，$\displaystyle \frac{d}{d\alpha} \int_E f_\alpha \, d\mu = \int_E \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} \, d\mu$.

証明. $\displaystyle \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} \, (f_{\alpha+\delta} - f_\alpha) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha}$ は可測関数の極限なので可測関数である．平均値の定理と仮定から， $a < \alpha < b$ かつ $0 < \delta < b - \alpha$ ならば，$\delta^{-1} \, |f_{\alpha+\delta}(x) - f_\alpha(x)| \le \phi(x)$, $x \in E$. よって，系 57 を $\delta^{-1} \, (f_{\alpha+\delta} - f_\alpha)$ に適用して,

$$\lim_{\delta\to 0} \int_E \delta^{-1} \, (f_{\alpha+\delta} - f_\alpha) \, d\mu = \int_E \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} \, d\mu \, .$$

よって主張が成り立つ. □

## §8. Fubini の定理

多重積分における積分順序の交換可能性.

初めに，積分論で極めて利用価値の高い便利な述語を導入しておく.（概念自体は既に用いていたことである.）

**定義 18** 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $\Omega$ の要素 $x$ に関する命題 $P(x)$ が与えられたとする．$P(x)$ が偽となる $x \in \Omega$ の集合 $A = \{x \in \Omega \mid P(x)$ が成り立たない $\}$ が,（$A \in \mathcal{F}$ であって,） $\mu(A) = 0$ を満たすとき，**殆ど至るところ** $P(x)$ が成り立つ，あるいは $P(x)$, $(\mu-)$ *a.e.*, あるいは $(\mu-)$ *a.e.* $x \in \Omega$ に対して $P(x)$ などと言う．

$P(x)$ が必ず成り立つならば，殆ど至るところ成り立つ．

## §8.1. Fubini の定理

15,16

2つの測度空間 $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$, の（最小の）直積測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, および（$X$, $Y$ が完備なときは）その完備化 $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ を考える (§3). ここで, $\Omega = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ は $X$ と $Y$ の直積空間, $\mathcal{F}$ は矩形集合 $E \times F$, $E \in \mathcal{F}_X$, $F \in \mathcal{F}_Y$, たちを含む最小の $\sigma$-加法族 (定理 25), $\mu$ は $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度, 即ち, 矩形集合に対して (13) 式 $\mu(E \times F) = \mu_X(E)\,\mu_Y(F)$ が成り立つ $\mathcal{F}$ 上の測度である. 直積測度空間の存在と一意性は定理 20 によって保証される.（完備化も 定理 31 の証明後の注意により一意的である）. [42]

この §8 では, 測度 $\mu_X$, $\mu_Y$ は $\sigma$ 有限（§4.2）であると仮定する[43]即ち,

$$X_n \in \mathcal{F}_X,\ \mu_X(X_n) < \infty,\ \bigcup_n X_n = X, \tag{37}$$

$$Y_n \in \mathcal{F}_Y,\ \mu_Y(Y_n) < \infty,\ \bigcup_n Y_n = Y, \tag{38}$$

を満たす $X_n$, $Y_n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, が存在する. $\Omega_n = X_n \times Y_n$ とおけば,

$$\Omega_n \in \mathcal{F},\ \mu(\Omega_n) < \infty,\ \bigcup_n \Omega_n = \Omega. \tag{39}$$

即ち, $\Omega$ も $\sigma$ 有限になる.

Fubini の定理は, 直積測度に関する積分と元の測度に関する積分の関係を述べる.

$E \subset \Omega$ に対して,「切り口」を $[E]_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$, $[E]_y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$, で定義する.

以下, (28) のように, $(\Omega', \mathcal{F}')$ をとる. $E \in \Omega$ に対して $x \mapsto \mu_Y([E]_x)$ は $X$ から $\Omega'$ への関数になる.

**講義方針案** 定理 63 は零集合の分だけ 定理 61 より弱い. 従って, 完備化の有無に関わらず成立する. 零集合はどうせ問題にならないから, 定理 61 を省略して 定理 63 だけ紹介してもよいのでは？

**定理 61 (Fubini の定理 (完備化しない場合))** *(i)* $E \in \mathcal{F}$ ならば, 任意の $x \in X$ に対して $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$ で, $\mu_Y([E]_\cdot) :\ X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって, $\int_X \mu_Y([E]_x)\, d\mu_X(x) = \mu(E)$ である. 従って, 特に, $\mu(E) < \infty$ ならば, $\mu_Y([E]_x) < \infty$, $\mu_X - a.e.$.

*(ii)* $f :\ \Omega \to \Omega'$ が非負値の $\mathcal{F}$-可測関数ならば, 任意の $x \in X$ に対して $f(x, \cdot) :\ Y \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数で, $\int_Y f(\cdot, y)\, d\mu_Y(y) :\ X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって, $\int_X \left( \int_Y f(x, y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ である.

*(iii)* $f :\ \Omega \to \Omega'$ が（非負値とは限らないが $\mathcal{F}$-可測関数であって,）可積分ならば, $\mu_X - a.e.\ x \in X$ に対して $f(x, \cdot) :\ Y \to \Omega'$ は $Y$ で可積分で, $\int_Y f(\cdot, y)\, d\mu_Y(y) :\ X \to \Omega'$ は $X$ で可積分で, $\int_X \left( \int_Y f(x, y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ である[44].

*(iv)* （自明に）以上に関して, $x, X$ と $y, Y$ を入れ換えた *statement* も成り立つ（$f$ の引数はそのままとする）. 従って, 特に, $f :\ \Omega \to \Omega'$ が可積分ならば,

$$\int_X \left( \int_Y f(x, y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y)\, d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

である.

---

[42] 960722 哲弥. 定理 20 で得られるのは完備直積測度空間 $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ である. これは一般に $\mathcal{F}$ より広い $\sigma$-加法族上で定義されているが, 直積測度に関しては, 完備性を要求しない最小の直積測度のほうが若干基本的らしい. $E \in \bar{\mathcal{F}}$ のとき, その切り口は a.e. に可測集合となるだけである. 切り口が必ず可測集合になる（直積空間内の）集合の全体は $\sigma$-加法族をなすことは証明できるが, 完備性は保証されないからである, と思う.

[43] この仮定が本質的なのかどうか結論を持っていない. [伊藤清三, p.103] を見ると必要なようにみえる.

[44] 複素数値関数でも成り立つ [伊藤清三, pp.101–102].

**系 62** $f\colon \Omega \to \Omega'$ が $\mathcal{F}$-可測関数ならば，

$$\int_X \left( \int_Y |f(x,y)|\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x), \quad \int_Y \left( \int_X |f(x,y)|\, d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y), \quad \int_\Omega |f(\omega)|\, d\mu(\omega),$$

は三つとも等しく，どれかひとつが有限ならば，*($f$ に対して)* 定理 *61* が成り立つ．

系 *62* の証明. $|f|$ は非負値の可測関数なので，定理 61 の第 2 主張より，三つの積分は等しい．よってどれか一つ有限ならば $|f|$ は可積分で，従って $f^{\pm}$ が可積分だから $f$ も可積分であり，定理 61 の第 3 主張が $f$ に対して成り立つ． □

**定理 63 (Fubini の定理 (完備化した場合))** *$X$, $Y$ が完備ならば，定理 61 において $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ におきかえた定理が（場合によっては零集合を除いて）成立する．即ち，*

*(i)* $E \in \bar{\mathcal{F}}$ ならば，$\mu_X - a.e.\ x \in X$ に対して $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$ で，$\mu_Y([E]_\cdot)\colon X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって，$\displaystyle\int_X \mu_Y([E]_x)\, d\mu_X(x) = \bar{\mu}(E)$ である．従って，特に，$\bar{\mu}(E) < \infty$ ならば，$\mu_Y([E]_x) < \infty$, $\mu_X - a.e.$.

*(ii)* $f\colon \Omega \to \Omega'$ が $a.e.$ に非負値の $\bar{\mathcal{F}}$-可測関数ならば，$\mu_X - a.e.\ x \in X$ に対して $f(x,\cdot)\colon Y \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数で，$\displaystyle\int_Y f(\cdot,y)\, d\mu_Y(y)\colon X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって，$\displaystyle\int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega f(\omega)\, d\bar{\mu}(\omega)$ である．

*(iii)* $f\colon \Omega \to \Omega'$ が（非負値とは限らないが $\bar{\mathcal{F}}$-可測関数であって,）可積分ならば，$\mu_X - a.e.\ x \in X$ に対して $f(x,\cdot)\colon Y \to \Omega'$ は $Y$ で可積分で，$\displaystyle\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y)\colon X \to \Omega'$ は $X$ で可積分で，$\displaystyle\int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega f(\omega)\, d\bar{\mu}(\omega)$ である．

*(iv)* 以上に関して，$x, X$ と $y, Y$ を入れ換えた *statement* も成り立つ．従って，特に，$f\colon \Omega \to \Omega'$ が可積分ならば，

$$\int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_Y \left( \int_X f(x,y)\, d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) = \int_\Omega f(\omega)\, d\bar{\mu}(\omega)$$

である．

**系 64** $f\colon \Omega \to \Omega'$ が $\bar{\mathcal{F}}$-可測関数ならば，

$$\int_X \left( \int_Y |f(x,y)|\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x), \quad \int_Y \left( \int_X |f(x,y)|\, d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y), \quad \int_\Omega |f(\omega)|\, d\bar{\mu}(\omega),$$

は三つとも等しく，どれかひとつが有限ならば，*($f$ に対して)* 定理 *63* が成り立つ．(証明は 系 *62* と同様である.)

$X = Y = \mathbf{R}$ で Lebesgue 測度を考えれば素朴な 2 次元積分の積分順序交換可能性を意味する．

**補足** [伊藤清三, pp.100–102] では，定理 61 および 定理 63 のように，被積分関数 $f(x,y)$ の非負性（このときは積分は発散してもよい）または $\mu$-可積分性（全体の積分が正部分も負部分も有限ということ，このときは定符号関数でなくてよい）を仮定した．

これらの仮定の本質は $f$ が $\mu$-定積分を持つこと（正部分または負部分のどちらかの積分が有限）である．このとき正負各部分に非負関数の場合の Fubini 定理を適用できるので順序交換が証明される．定理 61, 定理 63 に比べて拡張されるのは，積分が $\pm\infty$ になる場合なので，結果には興味がないが，Lebesgue 積分と

Riemann 積分の広義積分としての比較が，級数の絶対収束と条件収束の比較と類推が成り立つことを意味している (§16.2.4)[45].

対偶をとれば，逐次積分 $\int_X \left( \int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x)$ が存在するだけでは，積分順序交換で値が等しいとは限らないことになる．(直積測度に関して可測関数であっても，) 積分の正部分と負部分が両方発散して定積分を持たない場合には，積分順序交換可能性が破れうる．[伊藤清三, p.106 (注意 1)] の例．$X = Y = (0,1]$, $\Omega = X \times Y$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, とおく．($F(x,y) = \arctan(x/y)$ とおくと，$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.) $f$ は連続関数なので可測関数 (定理 43),

実行してみると逐次積分は可能である．

$$\int_X \left( \int_Y f(x,y)\,d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

しかし，

$$\int_Y \left( \int_X f(x,y)\,d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) = \int_0^1 \left[ -\frac{x}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}\,,$$

となって，積分順序交換性が破れている．

これは 定理 63 と矛盾していない．定理 63 の仮定，$f$ が（直積測度に関して）定積分を持たないことが次のように分かるからである．$A = \{(x,y) \in \Omega \mid x \geq y\}$, $B = \{(x,y) \in \Omega \mid x < y\}$, とおくと，$f^+|_A = f|_A$, $f^+|_B = 0$, $f^-|_A = 0$, $f^-|_B = -f|_B$. 定理 63 より，

$$\int_\Omega f^+(\omega)\,d\omega = \int_0^1 \left( \int_0^1 f^+(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+x^2}\,dx = \infty,$$
$$\int_\Omega f^-(\omega)\,d\omega = \int_0^1 \left( \int_0^1 f^-(x,y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_0^y -f(x,y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y}{y^2+y^2}\,dy = \infty,$$

となるので，$f$ は定積分を持たない．

注．より病的な問題だが，定理 61, 定理 63 において $f$ の，直積測度に関する可測性の仮定もはずせない．選択公理（整列可能性）の下では，逐次積分が存在して順序交換が可能でも，直積測度に関して可測関数とは限らない (§15.1.2).

## §8.2. Fubini の定理の証明

### §8.2.1. 単調族

準備として初等的な一般論を展開する．一般の集合 $\Omega$ で考える．次の定義は，本質的に $\sigma$-加法族の定義を言い換える．

**定義 19** $\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{M}$ が単調族であるとは，

$$A_n \in \mathcal{M},\ n = 1,2,3,\cdots,\quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}, \tag{40}$$

$$A_n \in \mathcal{M},\ n = 1,2,3,\cdots,\quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{M}, \tag{41}$$

が両方とも成り立つこと．

**定理 65** 空間 $\Omega$ の部分集合からなる任意の集合族 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}$ を含む最小の単調族 $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ が存在する．即ち，$\mathcal{A}$ を含む任意の単調族 $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{M}[\mathcal{A}] \subset \mathcal{C}$ となる．この $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ を $\mathcal{A}$ が生成する単調族と呼ぶ．

[45] 以上，960727 哲弥注.

証明．定理 25 の証明と全く同じである． □

**命題 66** $\Omega$ の部分集合よりなる有限加法族 $\mathcal{M}$ が，$\sigma$-加法族であることと，単調族であることは同値．

証明．$\sigma$-加法族が (40) と (41) を満たすことは既知．$\mathcal{M}$ が有限加法族で，かつ，単調族であるとする．可算和について閉じていることを証明すればよい．$A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbf{N}$, とする．$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ とおくと，$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, かつ,（有限加法族だから）$B_n \in \mathcal{M}$. (40) より，$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n \in \mathcal{M}$. □

**定理 67** $\mathcal{J}$ が（$\Omega$ の部分集合よりなる，空でない）有限加法族ならば，$\mathcal{M}[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{J}]$.

証明．$\mathcal{M}[\mathcal{J}]$ が有限加法族であることを証明すれば，命題 66 と $\mathcal{M}[\mathcal{J}], \sigma[\mathcal{J}]$, それぞれの最小性より，$\mathcal{M}[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{J}]$ を得る．

空でないから，補集合と有限和について閉じていることを言えばよい．

$\mathcal{M}_1 = \{A \subset \Omega \mid A^c \in \mathcal{M}[\mathcal{J}]\}$ とおく[46]．$A \in \mathcal{J}$ ならば $A^c \in \mathcal{J} \subset \mathcal{M}[\mathcal{J}]$ だから，$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{J}$. 他方，$A_n \in \mathcal{M}_1$, $n \in \mathbf{N}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, ならば，${A_n}^c \in \mathcal{M}[\mathcal{J}]$, $n \in \mathbf{N}$, かつ，${A_1}^c \supset {A_2}^c \supset \cdots$, なので，(41) より，$\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n {A_n}^c \in \mathcal{M}[\mathcal{J}]$, よって，$\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}_1$, 即ち，$\mathcal{M}_1$ は (40) を満たす．全く同様に (41) も満たすから，$\mathcal{M}_1$ は $\mathcal{J}$ を含む単調族である．よって，$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}[\mathcal{J}]$. $\mathcal{M}_1$ の定義より，これは $\mathcal{M}[\mathcal{J}]$ が補集合演算に関して閉じていることを示す．

次に $\mathcal{M}[\mathcal{J}]$ が有限和に関して閉じていることを示す．上と同様の論理を 2 段階用いるべく，まず，$\mathcal{M}_2 = \{A \subset \Omega \mid B \in \mathcal{J} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}[\mathcal{J}]\}$ とおく．$A, B \in \mathcal{J}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{J} \subset \mathcal{M}[\mathcal{J}]$ だから，$\mathcal{M}_2 \supset \mathcal{J}$. $\mathcal{M}_1$ と同様の論理で，$\mathcal{M}_2$ が単調族であることも言えるので，$\mathcal{M}_2 \supset \mathcal{M}[\mathcal{J}]$. $\mathcal{M}_2$ の定義より，これは $\mathcal{M}[\mathcal{J}]$ が $\mathcal{J}$ の要素との和集合演算に関して閉じていることを示す．そこで，$\mathcal{M}_3 = \{A \subset \Omega \mid B \in \mathcal{M}[\mathcal{J}] \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}[\mathcal{J}]\}$ とおくと，今証明したことにより，$\mathcal{M}_3 \supset \mathcal{J}$. $\mathcal{M}_1$ と同様の論理で，$\mathcal{M}_3$ が単調族であることも言えるので，$\mathcal{M}_3 \supset \mathcal{M}[\mathcal{J}]$. $\mathcal{M}_3$ の定義より，これは $\mathcal{M}[\mathcal{J}]$ が和に関して閉じていることを示す． □

### §8.2.2. Fubini の定理（完備化に無関係な部分）

§8.2.2 と §8.2.3 では，§8.1 最初の記号に戻り，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を $\sigma$ 有限な測度空間 $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$, の最小の直積測度空間とし，$(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ をその完備化とする．

**補題 68** $\mathcal{J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\sum_{i=1}^{n} E_i \times F_i \mid E_i \in \mathcal{F}_X\ F_i \in \mathcal{F}_Y,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ n \in \mathbf{N}\}$ は有限加法族で，$\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{J}]$.

証明．前半は 補題 21 そのものである．$\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{J}]$ は 定理 20. □

定理 *61* の証明． (i) $\mathcal{M} = \{E \subset \Omega \mid [E]_x \in \mathcal{F}_Y,\ x \in X\}$ とおくと，補題 68 の定義から $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$[47]. $\{E_n\}$ が単調増加（または減少）で $\bigcup_n \left(\bigcap_n\right) E_n = E$ ならば，明らかに $\{[E_n]_x\}$ も単調増加（減少）で $\bigcup_n \left(\bigcap_n\right) [E_n]_x = [E]_x$. よって，$[E]_x \in \mathcal{F}_Y$ となるから，$E \in \mathcal{M}$. 即ち，$\mathcal{M}$ は単調族である．よって，定理 67 より，$(\mathcal{M} \supset)\ \mathcal{M}[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{J}] = \mathcal{F}$. 即ち，$E \in \mathcal{F}$ ならば全ての $x \in X$ に対して $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$.

[46] [伊藤清三, p.98]
[47] 以下，[伊藤清三, pp.103–104] の証明．

次に， $k \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathcal{M}_k = \{E \in \mathcal{F} \mid \mu_Y([E \cap \Omega_k]_x)$ が $x$ の $\mathcal{F}_X$-可測関数 $\}$ とおく．$\Omega_k$ は (39) で定義した．上と同様の理由により，$\mathcal{M}_k \supset \mathcal{F}$ となる．単調族であることを言うのに，単調増加（または減少）で $\bigcup_n \left( \bigcap_n \right) E_n = E$ を満たす $\{E_n\}$ に対して，$[E_n \cap \Omega_k]_x$ が単調増加（または減少）で，$\bigcup_n \left( \bigcap_n \right) [E_n \cap \Omega_k]_x = [E \cap \Omega_k]_x$ より，命題 2 によって，

$$(42) \quad \lim_{n \to \infty} \mu_Y([E_n \cap \Omega_k]_x) = \mu_Y([E \cap \Omega_k]_x),$$

を得ることを用いる．$\Omega_k$ の導入は，減少列の場合にこれが成り立つための条件を満たすためである．$k$ は任意だから $\mathcal{F} \subset \bigcap_k \mathcal{M}_k$. 即ち，$E \in \mathcal{F}$ ならば全ての $k$ に対して $\mu_Y([E \cap \Omega_k]_x)$ が $x$ の $\mathcal{F}_X$-可測関数．ところが，任意の $x \in X$ に対して $[E \cap \Omega_k]_x$ は単調増加で $\bigcup_k [E \cap \Omega_k]_x = [E]_x$. よって，命題 2 より $\mu_Y([E]_x) = \lim_{k \to \infty} \mu_Y([E \cap Z_k]_x)$. 従って，$\mu_Y([E]_x)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．

最後に， $k \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathcal{M}'_k = \{E \in \mathcal{F} \mid \int_X \mu_Y([E \cap \Omega_k]_x)\, d\mu(x) = \mu(E \cap \Omega_k)\}$ とおく．上と同様の理由により，$\mathcal{M}'_k \supset \mathcal{F}$ となる．単調族であることを言うのには，(42) から，定理 52（減少列の場合は 定理 56 で $\phi(x) = \mu_Y([\Omega_k]_x)$ とおくと $\mu(\Omega_k) < \infty$ のおかげで条件を満たす）より，極限と積分が交換できることを用いる．$k \to \infty$ も上と同様に積分と交換できるので，結局，$E \in \mathcal{F}$ ならば，$\int_X \mu_Y([E]_x)\, d\mu(x) = \mu(E)$.

(ii) $f$ が $E \in \mathcal{F}$ の定義関数のときは上記に帰着する．単関数は定義関数の有限和だから，定義関数に帰着する．非負値可測関数は非負値増加単関数の極限 (定理 40) だから定理 52 より，単関数に帰着する．

(iii) $f = f^+ - f^-$ と分解して上記を適用すればよい．積分したものが有限であることから，被積分関数が a.e. に有限になる．

(iv) は明らか．

□

### §8.2.3. Fubini の定理（完備化する場合）

定理 *63* の証明.

**補題 69 ([伊藤清三, 補助定理 3 (p.105)])** $E \in \bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mu}(E) = 0$, ならば $\mu_X - a.e.\ x$ に対して $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$, $\mu_Y([E]_x) = 0$. （$x, X, y, Y$ を入れ換えても成立.）

証明. (39) より $\Omega$ は $\sigma$ 有限だから，補題 32, 系 33 より，$E \subset F$, $\mu(F) = 0$ を満たす $F \in \mathcal{F}$ が存在する．定理 61 より，$\int_X \mu_Y([F]_x)\, d\mu_X(x) = \mu(F) = 0$. $\mu_Y([F]_x) \geq 0$ だから積分の定義より $\mu_Y([F]_x) = 0$, $\mu_X - a.e.$. $[E]_x \subset [F]_x$ で $\mu_Y$ が完備だから，$\mu_Y([F]_x) = 0$ を満たす $x$ に対して $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$ かつ $\mu_Y([E]_x) = 0$ が成り立つ. □

**補題 70** $f:\ \Omega \to \Omega'$ が $\bar{\mu}$-*a.e.* に非負値関数[48]で $\bar{\mathcal{F}}$-可測ならば，$\mathcal{F}$-可測関数 $g$ で $f^+ \geq g \geq 0$, $\bar{\mu}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$ を満たすものが存在する．

証明. $f^+$ の非負値増大単関数近似列（$\bar{\mathcal{F}}$-可測関数列）$f_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_{nj} \chi_{E_{nj}}$ をとる．ここで，

[48]哲弥 960728. [伊藤清三, 定理 10.10 (p.65), 補助定理 4 (p.105)] は a.e. とはなっていないが，あとで使うときは必要．証明自体が本質的に変わることはない．

(43) $E_{nj} \in \bar{\mathcal{F}},\ \Omega = \sum_{j=1}^{k_n} E_{nj}$ .

(39) より $\Omega$ は $\sigma$ 有限だから，補題 32, 系 33 より，各 $n, j$ に対して $F_{nj} \subset E_{nj}$, $\mu(E_{nj} - F_{nj}) = 0$ を満たす $F_{nj} \in \mathcal{F}$ が存在する．$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{k_n} F_{nj} \right) \in \mathcal{F}$ とおくと $F_{nj}$ のとりかたと (43) より，

$$\Omega - F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} (E_{nj} - F_{nj})$$

だから，$\mu(\Omega - F) = 0$.

$$g_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_{nj} \chi_{A_{nj}}, \quad A_{nj} = F_{nj} \cap F \in \mathcal{F},\ j = 1, 2, \cdots, k_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

とおくと，$g_n$ は $\mathcal{F}$-可測関数であって，各 $n$ に対して $\Omega$ の各点はただ一つの $E_{nj}$ に属し，さらに，$x \in F$ ならば，$F$ の定義から，$x$ はただ一つの $A_{nj'}$ に属す．$A_{nj} \subset E_{nj}$ だから，$j' = j$, 従って，$g_n|_F = f_n|_F$. $x \in \Omega - F$ ならば，$g_n(x) = 0$. よって，$g = \lim_{n\to\infty} g_n$ が $\Omega$ 上で存在して,（$\mathcal{F}$-可測関数の極限だから）$\mathcal{F}$-可測関数であって，

$$g(x) = \begin{cases} f^+(x)\,, & x \in F, \\ 0\,, & x \in \Omega - F \end{cases} .$$

特に，$f^+ = f$, $\bar{\mu}$-a.e. かつ $f^+ \geq g \geq 0$ だから，この $g$ が求めるものである． □

以上の補題によって 定理 63 を 定理 61 に帰着させることができる[49].

(i) $E \in \bar{\mathcal{F}}$ ならば，(39) より $\Omega$ は $\sigma$ 有限だから，補題 32, 系 33 より，$F \subset E$, $\bar{\mu}(E - F) = 0$ を満たす $F \in \mathcal{F}$ が存在する．定理 61 第 1 主張より，任意の $x \in X$ に対して $[F]_x \in \mathcal{F}_Y$ で，$\mu_Y([F]_x)\colon X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって，$\int_X \mu_Y([F]_x)\, d\mu_X(x) = \mu(F)$ である．

$\mu(E - F) = 0$ なので 補題 69 より，$\mu_X - a.e.\ x$ に対して $[E - F]_x \in \mathcal{F}_Y$, $\mu_Y([E - F]_x) = 0$. そのような $x$ に対して $[F]_x \cup [E - F]_x = \{x \in X \mid \exists y \in Y;\ (x, y) \in F \cup (E - F)\} = [E]_x$, だから $[E]_x \in \mathcal{F}_Y$, かつ，$\mu_Y([E]_x) = \mu_Y([F]_x)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって，$\int_X \mu_Y([E]_x)\, d\mu_X(x) = \mu(F) = \bar{\mu}(F) = \bar{\mu}(E)$ である．

(ii) 補題 70 より，$\mathcal{F}$-可測関数 $g$ で $f^+ \geq g \geq 0$, かつ，$F = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ とおくとき，$\bar{\mu}(F) = 0$ を満たすものが存在する．($f = f^+$, $\bar{\mu}$-a.e., に注意.)

$g$ に 定理 61 第 2 主張を適用すると，任意の $x \in X$ に対して $g(x, \cdot)\ :\ Y \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数で，$\int_Y g(\cdot, y)\, d\mu_Y(y)\ :\ X \to \Omega'$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数であって，$\int_X \left( \int_Y g(x, y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega)$ である．

補題 69 より，$\mu_X - a.e.\ x$ に対して $[F]_x \in \mathcal{F}_Y$, $\mu_Y([F]_x) = 0$. $\mathcal{F}_y$ の完備性から $2^{[F]_x} \subset \mathcal{F}_Y$ だから，$[F]_x$ 上の任意の関数（従って $f|_{[F]_x}$ も）が $\mathcal{F}_Y$-可測である．この $x$ に対して，$y \in Y - [F]_x$ ならば $F$ の定義から $f(x, y) = g(x, y)$. 即ち，$Y - [F]_x$ でも $f(x, \cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測である．可測性の定義に戻って考えると，$f(x, \cdot)$ は $Y$ で $\mathcal{F}_Y$-可測である．しかも，零集合 $[F]_x$ を除いて $g(x, \cdot)$ に一致するので，定理 50 より，$\int_Y f(x, y)\, d\mu_Y(y) = \int_Y g(x, y)\, d\mu_Y(y)$ だから，$X$ 上の関数として $\mathcal{F}_X$-可測関数である．このことが $\mu_X - a.e.\ x$ に対して成立するから，もう一度 定理 50 より，$\int_X \left( \int_Y f(x, y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) =$

[49] 960725–哲弥証明.

$\int_X \left( \int_Y g(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) = \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega)$ である．最後に， $f = g$, $\bar{\mu}$-a.e., であったから $\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ である．

(iii) $f = f^+ - f^-$ と分解して上記を適用すればよい．積分したものが有限であることから，被積分関数が a.e. に有限になる．

(iv) は明らか．

## §9. 未収録結果

[伊藤清三] の可測関数および積分に関する結果のうち，以下のものは基本的な結果だが，講義の配列上取り上げなかった．

(i) 可測関数の台が有界の連続関数による近似（位相空間の場合）[伊藤清三, 定理 12.6 (p.83)].

$f$ が $E \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上で Lebesgue 積分可能ならば，任意の $\epsilon$ に対して，ある有界集合の外では恒等的に 0 になる連続関数 $g$ で $\left| \int_E (f(x) - g(x))\, dx \right| < \epsilon$ となるものが存在する．(単関数近似して，各成分集合について閉集合と開集合ではさみ，連続関数になるように成分集合の指示関数を内挿.）

(ii) Lebesgue 積分の並進不変性と反転不変性 [伊藤清三, 定理 12.7 (pp.84–85)].

$f$ が $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上で Lebesgue 積分可能ならば，任意の $y \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ に対して，$f(\cdot + y)$, $f(-\cdot)$ も積分可能で

$$\int_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} f(x+y)\, dx = \int_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} f(-x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} f(x)\, dx\,.$$

（単関数近似で Lebesgue 測度の不変性に帰着する[50].）

(iii) 積分の連続性 [伊藤清三, 定理 12.8 (p.85)]）.

$f$ が $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上で Lebesgue 積分可能ならば,

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} |f(x+y) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

（有界台連続関数近似をして，一様連続性を利用.）

(iv) 積分法の平均値定理 [伊藤清三, 定理 12.5 (p.82), 定理 20.3 (p.153)].

$E$ 上 $f$ が有界可測， $g$ が積分可能とすると， $fg$ は積分可能であって， $\int_E f\,|g|\, d\mu = c \int_E |g|\, d\mu$, $\inf_{x \in E} f(x) \le c \le \sup_{x \in E} g(x)$ を満たす $c$ が存在する．

開区間 $(a,b) \subset \mathbf{R}$ において $F$ は連続で有界変動 (§14.3.1)，$\phi$ は単調増加有界ならば,

$$\int_a^b \phi\, dF = \phi(a)(F(c) - F(a)) + \phi(b)(F(b) - F(c)),\ a < c < b,$$

を満たす $c$ が存在する．但し，区間端点における $F, \phi$ の値は左（右）極限で定義する．

開区間 $(a,b) \subset \mathbf{R}$ において $f$ は積分可能，$\phi$ は単調増加有界ならば,

$$\int_a^b \phi(x)\, f(x)\, dx = \phi(a) \int_a^c f(x)\, dx + \phi(b) \int_c^b f(x)\, dx,\ a < c < b,$$

を満たす $c$ が存在する．但し，区間端点における $F, \phi$ の値は左（右）極限で定義する．

（全て，straightforward．但し，後半の Stieltjes 積分の定義は §14.3 を参照.）

[50]積分変数変換の一般論 命題 93 に含められるのではないか？

# 第 3 章 微分

伊藤 4 回 荒川 0 回

## §10. 加法的集合関数

加法的集合関数とは $\sigma$ 加法性をもった集合関数である．負の値を許す点で測度の拡張概念になっている． 17
これによって，複数の測度の間の関係 (§11) や不定積分の逆操作としての微分 (§13) が議論できる．

### §10.1. 定義

**定義 20** $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．集合関数 $\Phi\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ が加法的集合関数であるとは，$+\infty$ または $-\infty$ の少なくとも一方の値はとることがなくて，恒等的に $\pm\infty$ ではなく，$\sigma$ 加法性，$\Phi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$, $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, が成り立つときを言う．

定義から，加法的集合関数の和や実数倍も加法的集合関数である．

値域が実数，即ち，値として $\pm\infty$ をとらない加法的集合関数（測度）を有界な加法的集合関数（測度）と呼ぶことにする．定理 71 で証明するように，実数値しかとらなければ，$|\Phi(A)|$ は $A$ によらない実数 $(V(\Omega))$ で押さえられるからである.（測度の場合は既に知っているように $0 \le \mu(A) \le \mu(\Omega)$ で有界.）

注. (i) 値域に $-\infty$ を許すケースは $\Phi$ の代わりに $-\Phi$ を考えれば $+\infty$ を許すケースに帰着するので，以下では加法的集合関数の値域は $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ とする．有界な加法的集合関数については，$\pm\Phi$ に結果を適用することで，結果を強化することができる．

(ii) 定義から，測度は非負定値の加法的集合関数である．特に，確率測度は $P(\Omega) = 1$ なので有界な非負定値加法的集合関数である．確率論では以下の全ての定義や性質が実際に用いられる．

(iii) [伊藤清三, p.120] では有限値に限定しているが，[伊藤清三, 注意 3 (p.132)] では測度の場合も絶対連続性等の概念を同様に定義して同様の定理が成り立つとしているので，結局は $\infty$ を許している．$\sigma$ 有限な場合しか扱わないので本質的な拡張ではないが，$\infty$ を定義から排除するのは厳密にはうそである．

(iv) $\pm\infty$ 両方を値としてとらないという限定は，$\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B) = \infty - \infty$ (?) の不定性を避けるためで，止むを得まい．$\pm\infty$ 両方の値を取る場合，つまり，強く振動する集合関数は Feynman の経路積分のような興味深い例を含むが，$\sigma$ 加法性と整合する理論は，私の知る限りない．

(v) 負の値を許す素朴な動機は，不定積分である．実際，不定積分は加法的集合関数になる (§11.2)．

(vi) 定理 71 (§10.2) で示すように加法的集合関数は二つの測度の差で書ける．負の値を自由に許すけれども見かけほどは複雑でないことになる．殆ど測度と思っていて問題はないし，全ての性質が測度の性質に帰着できる．実際，加法的集合関数のことを符号付き測度 (signed measure) とも呼ぶ．

(vii) 虚部と実部に分けることで複素数値の加法的集合関数も平行して議論できることは複素数値関数の積分のときと同様である（講義では省略）．

測度の持つ性質のうち正値性に関係しないものが成立する．即ち，測度の場合と同様に定義から，空集合 $\Phi(\phi) = 0$, 有限加法性 $\Phi(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(A_i)$，差 $|\Phi(A)| < \infty$ または $|\Phi(B)| < \infty$，かつ $A \supset B$ ならば $\Phi(A-B) = \Phi(A) - \Phi(B)$ （$\Phi$ がとりうる無限大は一方の符号だけなので $\Phi(B) + \Phi(A-B) = \Phi(A)$ において右辺が有限ならば，左辺は 2 項とも有限，ill-defined なケースは生じない），命題 2 のうち集合列が単調な場合，即ち，

(44) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \Phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n)$,

また，差の性質を用いて，

(45) $|\Phi(A_1)| < +\infty,\ \ A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \Phi(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n)$,

が従う．命題 2 の残りの性質は測度の非負性（単調性）を用いている．

加法的集合関数が負の値を取らないならば測度である．この場合は，単調性 $A \subset B$ ならば $\Phi(A) \leq \Phi(B)$, や劣加法性 $\Phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(A_i)$, 命題 2 の残りの性質，も成り立つ．正の値を取らない場合は $-\Phi$ が測度になるから，測度に帰着して,（適当な言い替えの下で）対応する性質が成り立つ．

## §10.2. 変動と Hahn 分解

ここでは加法的集合関数は二つの測度の差で書けることを証明する．その上それぞれの support が disjoint な集合の上にあることも分かる．

この節 §10.2 では可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ および加法的集合関数 $\Phi:\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を固定する.（§10.1 で注意したように，$-\infty$ をとる $\Phi$ の場合は $-\Phi$ を考えればよい.）

**定義 21** $E \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\bar{V}(E) = \bar{V}(\Phi; E) = \sup\{\Phi(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\}$$

で定義される量を $\Phi$ の $E$ 上の上変動，

$$\underline{V}(E) = \underline{V}(\Phi; E) = \inf\{\Phi(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\}$$

で定義される量を下変動，$V(E) = V(\Phi; E) = |\bar{V}(\Phi; E)| + |\underline{V}(\Phi; E)|$ を全変動，とそれぞれ呼ぶ（sup, inf で定義するので，定義の段階では $\pm\infty$ の可能性を排除できない）．

この節では $\Phi$ を固定しているので，$V(E)$ などの省略形を使う．

定義で $A = E$ ととることにより，

(46) $\underline{V}(E) \leq \Phi(E) \leq \bar{V}(E)$

を得る．また，定義で $A = \emptyset$ ととることで，

(47) $\underline{V}(E) \leq 0 \leq \bar{V}(E)$

を得るので，

(48) $V(E) = \bar{V}(E) - \underline{V}(E)$

である．これらより，特に，

(49) $V(E) \geq \max\{\bar{V}(E), -\underline{V}(E)\} = \sup\{|\Phi(A)| \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\}$.

また，

(50) $\underline{V}(-\Phi; E) = -\sup\{\Phi(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\} = -\bar{V}(\Phi; E)$.

**定理 71 (Jordan の分解)** $\bar{V}$, $-\underline{V}$ は $-\underline{V}(\Omega) < \infty$ を満たす $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度であり，さらに，$\Phi = \bar{V} + \underline{V}$ を満たす.（従って，$V$ も *(48)* により測度になる．特に，$\Phi$ が実数値（有限値）しかとらない（有界）ならば，$-\Phi$ にこの定理を適用して，*(50), (48)* に注意すれば，$\bar{V}(\Omega) < \infty$, $V(\Omega) < \infty$ も得る.）

即ち，加法的集合関数は二つの測度の差で書ける．特に，実数値加法的集合関数は有界な測度の差で書ける．

証明．証明の順序[51]：

(i) $\underline{V}(\Omega) > -\infty$ の証明.

(ii) $\underline{V}$ の $\sigma$ 加法性の証明．非負性 (47) があるので $-\underline{V}$ は測度になる．

(iii) $\Phi = \bar{V} + \underline{V}$ の証明．$\Phi$ は加法的集合関数で，(48) もあるので，$\bar{V}$ も測度になる．

以下，この順に証明する．

(i)

結論を否定して，

(51) $\underline{V}(\Omega) = -\infty$

を仮定する．

**補題 72** $\underline{V}(A) = -\infty$ かつ $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{F}$, ならば，$\underline{V}(B) = -\infty$ または $\underline{V}(A - B) = -\infty$.

証明．$\Phi$ の有限加法性を用いれば，

$$\underline{V}(B) + \underline{V}(A - B) = \inf_{C \subset B} \Phi(C) + \inf_{D \subset A - B} \Phi(D) \le \inf_{E \subset A} \Phi(E) = \underline{V}(A)\,.$$

□

まず，$\Phi(X_0) < \infty, \underline{V}(X_0) = -\infty$ を満たす $X_0 \in \mathcal{F}$ が存在することを示す．結論を否定して，$\Phi(A) < \infty$ ならば必ず $\underline{V}(A) > -\infty$ とする．$\Phi$ は恒等的には $\infty$ でないから，ある $A_0 \in \mathcal{F}$ に対して $M \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(A_0) < \infty$. 背理法の仮定から $\underline{V}(A_0) > -\infty$. (51) と 補題 72 から $\underline{V}({A_0}^c) = -\infty$. よって，$B_1 \subset {A_0}^c$ が $\mathcal{F}$ に存在して $\Phi(B_1) \le -1$. $A_1 = A_0 + B_1$ とおくと，有限加法性から $\Phi(A_1) \le M - 1$ $(< \infty)$. 以下，帰納法で，$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $\Phi(A_n) \le M - n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, を満たす列が $\mathcal{F}$ にとれる．このとき (44) から，$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = -\infty$ となるが，$\Phi$ の値域に $-\infty$ はないので矛盾である．よって，

(52) $\exists X_0 \in \mathcal{F};\ \Phi(X_0) < \infty,\ \underline{V}(X_0) = -\infty.$

次に，

(53) $\quad X_{n+1} \subset X_n,\ \underline{V}(X_n) = -\infty,\ \infty > |\Phi(X_n)| \ge n, \quad n \in \mathbf{Z}_+.$

を満たす集合列 $X_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{Z}_+$, が存在することを示す．$X_0$ は (52) より存在する．$X_n$ までが (53) を満たすように作られたとする．

$\underline{V}(X_n) = -\infty$ かつ，$|\Phi(X_n)| < \infty$ より，

(54) $\Phi(E) \le -|\Phi(X_n)| - n - 1$ $(< \infty)$

を満たす $E \subset X_n$ が $\mathcal{F}$ に存在する．$\underline{V}(X_n) = -\infty$ と 補題 72 より $\underline{V}(E) = -\infty$ または $\underline{V}(X_n - E) = -\infty$. $\underline{V}(E) = -\infty$ のときは $X_{n+1} = E$, $\underline{V}(X_n - E) = -\infty$ のときは $X_{n+1} = X_n - E$ とおくと，(54) などより (53) を $n+1$ に対して満たすことが分かる．($X_{n+1} = X_n - E$ のときの $\infty > |\Phi(X_{n+1})| \ge n+1$ は $-\Phi(X_{n+1}) = -\Phi(X_n) + \Phi(E)$ に (54) を用いると $\le -n-1$ と $> -\infty$ を得る．) 帰納法より，(53) を満たす集合列 $X_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{Z}_+$, が存在することが言えた．

(45), (52), (53) から $\left|\Phi\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right)\right| = \lim_{n\to\infty} |\Phi(X_n)| = \infty$. 他方，$\Phi(X_0) < \infty$ かつ，$X_0 \supset \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ だから，$\Phi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) < \infty$ （有限加法性から），また，$-\infty$ はとらないから，矛盾である．よって (51) が否定されて $\underline{V}(\Omega) > -\infty$ を得る．

[51] [伊藤清三, pp.122–124] に従う．但し，ここでは加法的集合関数の有限性を仮定しないので，第一段階に工夫が必要になる．

(ii)

$E \in \mathcal{F}$, および，$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, とする．

$\Phi$ の $\sigma$ 加法性と $\underline{V}$ の定義より

$$\underline{V}(E) = \inf\{\Phi(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\} = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A \cap E_n) \mid A \subset E,\ A \in \mathcal{F}\} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{V}(E_n)\,.$$

次に，任意の $\epsilon > 0$ をとる．既に証明したように $\underline{V}(E_n) > -\infty$ だから，下変動の定義から，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，ある $A_n \subset E_n$ が $\mathcal{F}$ の中にあって，$\Phi(A_n) < \underline{V}(E_n) + 2^{-n}\epsilon$ が成り立つ．$m \neq n$ ならば $E_n \cap E_m = \emptyset$ なので $A_n \cap A_m = \emptyset$ また，$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ なので $E \supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$．よって，

$$\underline{V}(E) \leq \Phi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \underline{V}(E_n) + \epsilon.$$

以上より，$\underline{V}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{V}(E_n)$ となって，$\underline{V}$ の $\sigma$ 加法性を得る．

(iii)

$E \in \mathcal{F}$ とする．$A \in \mathcal{F}$ が $A \subset E$ を満たすとすると，$\Phi(A) + \Phi(E - A) = \Phi(E)$ より，$\Phi(A) + \underline{V}(E) \leq \Phi(E) \leq \Phi(A) + \bar{V}(E)$．だから，既に証明した $\underline{V}(E) > -\infty$ に注意して，$\bar{V}(E) + \underline{V}(E) \leq \Phi(E)$ かつ $\Phi(E) \leq \underline{V}(E) + \bar{V}(E)$．よって $\Phi = \bar{V} + \underline{V}$ を得る． □

定理 71 により，加法的集合関数の性質は測度の性質に帰着する．例えば，命題 2 のうち §10.1 で紹介しなかった部分に関して，

**命題 73** $\bar{V}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ （$= \lim_{n\to\infty} A_n$ と書く）ならば $\Phi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n)$ が成り立つ．

証明は容易．なお，$\Phi$ が有界ならば $V(\Omega) < \infty$ なので，$\bar{V}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ の仮定は自動的に満たされる．

**定理 74 (Hahn の分解)** $\bar{V}(H) = 0$，かつ，$\underline{V}(H^c) = 0$，$-\underline{V}(H) < \infty$ をを満たす $H \in \mathcal{F}$ が存在する．

従って，$\Phi :\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が加法的集合関数であることと，測度 $\mu$ と $\mu(H) < \infty$ を満たす集合 $H \in \mathcal{F}$ を選んで $\Phi(E) = \mu(E \cap H^c) - \mu(E \cap H)$ と書けることは同値である．$\mu$ は $\Phi$ の全変動 $V$ であり，$H$ は上記の $H$ である．($\Phi$ が有界ならば対応する測度は $\mu(\Omega) < \infty$ を満たす.)

証明．定理 71 より[52]，$0 \geq -\underline{V}(\Omega) < \infty$．よって下変動の定義から $n \in \mathbf{N}$ に対して $\Phi(A_n) \leq \underline{V}(\Omega) + 2^{-n}$ を満たす $A_n \in \mathcal{F}$ がある．定理 71 と合わせて，$-\underline{V}$ の単調性（測度だから）を用いると，

$$\bar{V}(A_n) \leq \underline{V}(\Omega) - \underline{V}(A_n) + 2^{-n} \leq 2^{-n}\,, \tag{55}$$

および，$\underline{V}$ の有界性と (46) より，

$$-\underline{V}({A_n}^c) = -\underline{V}(\Omega) + \underline{V}(A_n) \leq -\Phi(A_n) + 2^{-n} + \underline{V}(A_n) \leq 2^{-n} \tag{56}$$

を得る．$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ とおく．$n \in \mathbf{N}$ に対して $A^c \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} {A_k}^c$ だから，測度の劣加法性と (56) から，

$$0 \leq -\underline{V}(H^c) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}\,.$$

[52]定理の前半の証明は，[伊藤清三, p.125] に従うが，$\Phi$ の値域に $+\infty$ を許しているので，$\bar{V}$ でなく $-\underline{V}$ を操作する必要がある．

よって $\underline{V}(H^c) = 0$. $\underline{V}$ の有界性から $-\underline{V}(H) < \infty$. さらに, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ は $n$ について単調増大だから

$$0 \le \bar{V}(H) = \lim_{n\to\infty} \bar{V}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \liminf_{n\to\infty} \bar{V}(A_n) = 0\,.$$

よって前半が証明された.

前半から後半を得るのは容易である. 実際, $\Phi(E) = \mu(E\cap H^c) - \mu(E\cap H)$ が加法的集合関数になることは明らか. 逆に $\Phi$ が加法的集合関数ならば, 定理の前半と 定理 71 と $\Phi$ の有限加法性を用いて

$$\begin{aligned}&\Phi(E) = \Phi(H^c\cap E) + \Phi(H\cap E) = \bar{V}(H^c\cap E) + \underline{V}(H^c\cap E) + \bar{V}(H\cap E) + \underline{V}(H\cap E)\\ &= \bar{V}(H^c\cap E) - \underline{V}(H^c\cap E) - \bar{V}(H\cap E) + \underline{V}(H\cap E) = V(H^c\cap E) - V(H\cap E)\,.\end{aligned}$$

ここで, 測度の単調性と定理の前半から $\underline{V}(H^c\cap E) = \bar{V}(H\cap E) = 0$ であることを用いた. □

**定理 75** $E\in\mathcal{F}$ に対して $V(E) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)| \mid n\in\mathbf{N},\ \ \sum_{j=1}^{n} E_j = E,\ \ E_j\in\mathcal{F},\ j=1,2,\cdots,n\}$.

証明. $E = \sum_{j=1}^{n} E_j$ ならば, 各 $j$ に対して $V(E_j) \ge |\Phi(E_j)|$ ((49) で $A = E = E_j$) だから, $V$ が測度であることより, $V(E) \ge \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)| \mid n\in\mathbf{N},\ \ \sum_{j=1}^{n} E_j = E,\ \ E_j\in\mathcal{F},\ j=1,2,\cdots,n\}$.

一方, 定理 74 より, 任意の $E\in\mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) = V(E\cap H^c) - V(E\cap H)$ となる $H\in\mathcal{F}$ が存在する. $E$ をそれぞれ $E_1 = E\cap H^c$, $E_2 = E\cap H$ とおいてこの式を用いると, $\Phi(E_1) = V(E_1)$, $\Phi(E_2) = -V(E_2)$ を得るから, $V(E) = V(E_1) + V(E_2) = |\Phi(E_1)| + |\Phi(E_2)|$. よって, $V(E) \le \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)| \mid n\in\mathbf{N},\ \ \sum_{j=1}^{n} E_j = E,\ \ E_j\in\mathcal{F},\ j=1,2,\cdots,n\}$ となるから, 定理の等号が成立する[53]. □

# §11. 絶対連続性と特異性 18

可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に $\mu$ とは別に加法的集合関数または測度が与えられたとき, これと $\mu$ の関係を論じるために, 絶対連続性と特異性という概念を導入する.

## §11.1. 定義

この節 §11.1 では測度空間 $(\Omega,\mathcal{F}',\mu)$ が与えられたものとして固定する.

**定義 22** $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$ を $\sigma$-加法族とする. $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の加法的集合関数 $\Phi:\ \mathcal{F}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ が $\mu$ に関して絶対連続 *(absolutely continuous)* とは, 全ての $E\in\mathcal{F}$ に対して

$$\mu(E) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \Phi(E) = 0$$

が成り立つことである.

加法的集合関数 $\Phi$ が $\mu$ に関して特異 *(singular)* とは, $\mu(S) = 0$, を満たす $S\in\mathcal{F}$ があって,

$$E\in\mathcal{F},\ E\cap S = \emptyset \quad\Longrightarrow\quad \Phi(E) = 0$$

[53] この定理の性質のほうが全変動の定義らしい性質に思えるが, これを定義とすることによる面白い描像は思いつかない. この定理の証明から, 加法的集合関数の場合は実際に sup を与える有限個への分解 $\{E_j\}$ が存在することが分かる. 有限個への分解が sup を与えない (加法的集合関数でない) 場合への拡張が面白いか? あまりうまくない気がする.

が成り立つことである.(定義から直ちに，任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) = \Phi(E \cap S)$ となる.)

注. (i) $\Phi$ が測度のときの定義の気持ち：$\Phi$ が絶対連続とは $\mu$ で測って長さゼロならば $\Phi$ で測っても長さゼロということ．$\Phi$ が特異とは $\mu$ で測って長さゼロのある集合だけを $\Phi$ が測り，残りの，$\mu$ で見れば全体と同じ長さの集合は長さゼロと見えるということ．§11.2 の例が示すように，これらの定義は初めて見たときの印象より自然なものである.

(ii) $\mu$ の定義域 $\mathcal{F}'$ と $\Phi$ の定義域 $\mathcal{F}$ を分けたのは哲弥 19960130 による．通常は $\mu|_{\mathcal{F}}$ を改めて $\mu$ とおくことで，$\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ の場合に帰着できるが，$\mu$ が $\sigma$ 有限で，かつ，$\mu$–有限な集合達が $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ に入っている場合を作ることができて，その場合に Radon–Nikodým の定理 (§12) を拡張するためにこの拡張を導入した．§12 の前まではこの拡張で [伊藤清三] の定理に本質的な変更はない.

$\mu$ が有界な測度（特に確率測度）の場合は最初から $\mu|_{\mathcal{F}}$ を考えればよく，定義域の拡張に本質的内容はない[54].

$\mu$ を固定しているので， $\mu$ に関して，という言葉は以下省略する.

明らかに， $\Phi, \Psi$ が共に絶対連続（または，特異）ならば，任意の実数 $a, b$ に対して $a\Phi + b\Psi$ も絶対連続（または，特異）である.($\pm\infty$ 両方を同時にとらない組み合わせに限る.)

**命題 76 ([伊藤清三, 補題 2 (p.129)])** $\Phi$ が絶対連続かつ特異ならば $\Phi$ は恒等的に 0 である.

証明. 特異だから，$\mu(E_0) = 0$ なる $E_0 \in \mathcal{F}$ があって，$E \cap E_0 = \emptyset$ なる $E \in \mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) = 0$．よって，勝手な $A \in \mathcal{F}$ に対して $B = A \cap E_0, C = A \cap {E_0}^c$ とおくと，$\Phi(C) = 0$．また，$\mu(B) \leq \mu(E_0) = 0$ だから，$\Phi$ の絶対連続性から $\Phi(B) = 0$．有限加法性から $\Phi(A) = \Phi(B) + \Phi(C) = 0$. □

**命題 77** $\Phi$ が絶対連続であることとその全変動 $V$ が絶対連続であることは同値．また，$\Phi$ が特異であることと $V$ が特異であることは同値.

証明. $\Phi$ が絶対連続とすると，$\mu(E) = 0$ なる任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) = 0$．測度の単調性から $A \in \mathcal{F}$ が $A \subset E$ を満たせば $\mu(A) = 0$．よって $\Phi(A) = 0$．上下変動の定義から $\bar{V}(E) = \underline{V}(E) = 0$ を得るので $V(E) = 0$ となる．即ち，$V$ も絶対連続.

逆に $V$ が絶対連続ならば，$\mu(E) = 0$ なる任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して $V(E) = 0$. (49) より，特に，$|\Phi(E)| \leq V(E) = 0$．よって，$\Phi$ も絶対連続.

$\Phi$ が特異とすると，$\mu(S) = 0$ を満たす $S \in \mathcal{F}$ があって，$E \cap S = \emptyset$ を満たす任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) = 0$ が成り立つ．$A \in \mathcal{F}$ が $A \subset E$ を満たせば $A \cap S = \emptyset$ なので $\Phi(A) = 0$．上下変動の定義から $\bar{V}(E) = \underline{V}(E) = 0$ を得るので $V(E) = 0$ となる．即ち，$V$ も特異.

逆に $V$ が特異ならば，$\mu(S) = 0$ を満たす $S \in \mathcal{F}$ があって，$E \cap S = \emptyset$ を満たす任意の $E \in \mathcal{F}$ に対して $V(E) = 0$ が成り立つ．(49) より $|\Phi(E)| \leq V(E) = 0$．よって，$\Phi$ も特異. □

絶対連続という単語は関数の連続性という語句を連想させるが，実際に関数の一様連続性に相当する性質がある.

**定理 78** $\Phi$ が絶対連続ならば，任意の $\epsilon > 0$ と $\bar{V}(X) < \infty$ を満たす $X \in \mathcal{F}$ に対して $\delta = \delta(\epsilon, X) > 0$ が存在して，$E \in \mathcal{F}$ が $\mu(E) < \delta$ かつ $E \subset X$ を満たせば $|\Phi(E)| < \epsilon$ となる.

注. (i) $\Phi$ が有界ならば $\bar{V}(\Omega) < \infty$ なので $X$ への言及は無用になり，主張は簡明になる.

(ii) 一般には，条件 $\bar{V}(X) < \infty$ は落とせない：$\Omega = \mathbf{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mu(n) = 2^{-n}$, $\Phi(n) = 1$.

[54] 19960130 記：特異性の定義で $S \in \mathcal{F}$ を $S \in \mathcal{F}'$ にゆるめるのはあとがきつい．19960814 追記：どのような考察かは記録がない

(iii) [伊藤清三, 定理 18.2] では同値条件として定理を書いているが，証明を見ると，逆向きは内容がない恒真式である．

証明. $\Phi$ が絶対連続とし，定理の結論を否定して，ある $\epsilon > 0$ と $\bar{V}(X) < \infty$ を満たす $X \in \mathcal{F}$, ならびに, $E_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$ が存在して，$E_n \subset X$, $\mu(E_n) < 2^{-n}$ および $|\Phi(E_n)| \geq \epsilon$ が全ての $n$ で成り立つとする. $E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ とおくと，

$$\mu(E_0) \leq \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < 2^{1-n}, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

だから $\mu(E_0) = 0$. $\Phi$ の絶対連続性と 命題 77 より，全変動 $V$ も絶対連続なので $V(E_0) = 0$. 従って, $\bar{V}(E_0) = \underline{V}(E_0) = 0$.

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ $(\subset X)$ なので，測度の単調性より $\bar{V}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \infty$ である．また 定理 71 より $-\underline{V}$ は有界な測度である．命題 2 と測度の単調性と (46) より

$$0 = \bar{V}(E_0) = \lim_{n\to\infty} \bar{V}(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \limsup_{n\to\infty} \bar{V}(E_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \Phi(E_n)\,,$$

および[55]

$$0 = -\underline{V}(E_0) = \lim_{n\to\infty} -\underline{V}(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \limsup_{n\to\infty} -\underline{V}(E_n) \geq \limsup_{n\to\infty} -\Phi(E_n)\,.$$

従って, $\lim_{n\to\infty} \Phi(E_n) = 0$. これは $|\Phi(E_n)| > \epsilon$ が全ての $n$ で成り立つことに矛盾. □

対応する特異な集合関数の性質もある.

**定理 79** 加法的集合関数 $\Phi$: $\mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が特異であることと次の性質が成り立つことは同値である：任意の $\epsilon > 0$ に対して $E = E(\epsilon) \in \mathcal{F}$ が存在して，$\mu(E) < \epsilon$ かつ $V(E^c) < \epsilon$ が成り立つ.

証明. $\Phi$ が特異とする[56]. 命題 77 より， $V$ も特異になるから，ある $E \in \mathcal{F}$ があって，$\mu(E) = 0$ かつ, $A \cap E = \emptyset$ を満たす任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $V(A) = 0$ となるので，$E(\epsilon)$ として常にこの $E$ をとれば, $\mu(E) < \epsilon$ かつ $V(E^c) < \epsilon$ が成り立つ.

逆に，任意の $\epsilon > 0$ に対して $E = E(\epsilon) \in \mathcal{F}$ が存在して，$\mu(E) < \epsilon$ かつ $V(E^c) < \epsilon$ が成り立つとすると，特に，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mu(E_n) < 2^{-n}$ かつ $V({E_n}^c) < 2^{-n}$ が成り立つような $E_n \in \mathcal{F}$ がとれる. $E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ とおくと，

$$\mu(E_0) \leq \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < 2^{1-n}, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

だから $\mu(E_0) = 0$. ${E_0}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} {E_k}^c$ であって，$V$ は測度だから非負性と 命題 2 と単調性から

$$0 \leq V({E_0}^c) = \lim_{n\to\infty} V(\bigcap_{k=n}^{\infty} {E_k}^c) \leq \liminf_{n\to\infty} V({E_n}^c) = 0\,.$$

よって $E \in \mathcal{F}$ が $E \cap E_0 = \emptyset$ を満たせば，$E \subset {E_0}^c$ なので $V(E) = 0$ となり，従って，(49) より $\Phi(E) = 0$ となるので，$\mu(E_0) = 0$ と合わせて，$\Phi$ は特異であることが分かる. □

---

[55] [伊藤清三, 定理 18.2 (p.128)] の証明は $\underline{V}$ の考察を忘れている．哲弥 19960814

[56] [伊藤清三, p.128]

## §11.2. 例

### §11.2.1. 不定積分

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間， $f\colon \Omega \to \Omega'$ を $\Omega$ で $\mu$ に関して可積分な関数とすると，$\Phi(E) = \int_E f\,d\mu$ で定義される集合関数 $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ は加法的集合関数である．$\Phi$ を $f$ の不定積分と呼ぶ.

不定積分は実数値（有界）加法的集合関数である．実際， $f$ が可積分なので，$\Phi$ は実数に値を取る．$\sigma$ 加法性は 系 53 から．

さらに，定理 48 から不定積分は $\mu$ に関して絶対連続な加法的集合関数である[57].

Radon–Nikodým の定理 (§12) によれば，絶対連続な加法的集合関数は（$\mu$ が $\sigma$ 有限ならば）全て不定積分で書けるので，絶対連続な加法的集合関数の例は本質的にこれで尽きる．

### §11.2.2. Dirac の delta

$(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{F}_N, \mu_N)$ を $N$ 次元 Lebesgue 測度空間，$w_n \in \Omega$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, を $\Omega$ の点列（有限列でも可），$p_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, は $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n| < \infty$ を満たすとする．$\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ を $\Phi(E) = \sum_{x_n \in E} p_n$ で定義すると，明らかに $\Phi$ は有界な加法的集合関数になる.（さらに $p_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, を満たせば $\Phi$ は（有界な）測度になり，さらに $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ ならば $\Phi$ は確率測度になる.）

Lebesgue 測度では一点の測度は（定義から）ゼロなので，可算集合は（ $\sigma$ 加法性から）測度ゼロ，従って，$\Phi$ は Lebesgue 測度に関して特異な加法的集合関数である．

### §11.2.3. Cantor 集合上の測度

[伊藤清三, p.42–43]．$(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を Lebesgue 測度空間とする．$[0,1] \subset \mathbf{R}$ を 3 等分し，真ん中の開区間 $(1/3, 2/3)$ （長さ 1/3）を取り除く．残った 2 つの長さ 1/3 の閉区間それぞれを 3 等分し，それぞれの真ん中の長さ $3^{-2}$ の開区間を取り除く．これを繰り返し，$n$ 回目に長さ $3^{-n}$ の開区間を $2^{n-1}$ 個取り除く．これを繰り返すと残った区間は閉区間で単調減少だから極限集合 $E$ は閉集合である．閉集合 $E \subset [0,1]$ を Cantor 集合と呼ぶ．$n$ 回目に取り除いた集合（区間達） $I_n$ の長さは $2^{n-1}3^{-n}$ で，取り除く区間は（異なるときに取り除いたものでも）共通部分を持たないから，長さ (Lebesgue 測度) の $\sigma$ 加法性から，極限で取り除いた長さは $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}3^{-n} = 1$, 従って， $\mu_1(E) = 1 - 1 = 0$．即ち，Cantor 集合は Lebesgue 零集合である．

任意の $x \in [0,1]$ に対して，$x$ から任意に近い距離に $G = [0,1] \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ の点があるから，$G$ は $[0,1]$ で稠密である．$\phi\colon\ [0,1] \to \mathbf{R}$ を次のように定義する．$I_1$ 上で $\phi = 1/2$, $I_2$ を構成する 2 つの区間のうち 0 に近いほうで $\phi = 2^{-2}$, 遠いほうで $\phi = 32^{-2}$, 一般に $I_n$ の $2^{n-1}$ 個の各区間で 0 に近いほうから順に $\phi = (2k-1)2^{-n}$ とする．$\phi$ は $G$ で連続（かつ単調増加）な関数だから $[0,1]$ に連続に拡張できる．$\phi$ は $E$ 上でのみ増加する連続関数である．これを Cantor 関数と呼ぶ.

$(a,b] \subset [0,1]$ に対して $\Phi((a,b]) = \phi(b) - \phi(a)$ で $\Phi$ を定義すると，§2 の方法によって $\Phi$ は $\mathcal{F}_1$ 上の測度に拡張される．$E$, $G$ はそれぞれ閉集合，開集合だから，ともに可測集合で，$\Phi(E) = 1$, $\Phi(G) = 0$ となる．

従って，$\Phi$ は Lebesgue 測度に関して特異な加法的集合関数（測度）である (§2.3.2).

なお，Cantor 集合の濃度は連続体の濃度である（$\phi$ で $E$ から各除外区間の左端の点を除いた集合と $\phi$ の値域 $[0,1]$ に一対一対応がつくから）．

---

[57][伊藤清三, 定理 13.4 (pp.89–90)] は定理 48 と 定理 78 から出るから，わざわざ証明する必要はない.

# §12. Radon–Nikodým の定理と密度関数

この節 §12 でも測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}', \mu)$ と $\sigma$-加法族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, および，加法的集合関数 $\Phi\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が与えられたものとして固定する．必要ならば $-\Phi$ を考えることで，$\Phi$ の値域は $-\infty$ を許さないとして一般性を失わない．

さらに，$\Phi$ に $\sigma$ 有限性 (§4.2) を仮定する．即ち，$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ なる可算個の $X_n \in \mathcal{F}$ が存在して，$\Phi(X_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$, を満たすことを仮定する．§12.1 では，任意の $\sigma$ 有限な加法的集合関数が $\mu$ に関して絶対連続な成分と特異な成分の和にかけることを示す[58]．§12.1 では $\Phi$ のみに $\sigma$ 有限性を仮定するが，§12.2 では $\mu$ にも $\sigma$ 有限性を仮定して，絶対連続な $\sigma$ 有限な加法的集合関数は適当な可測関数（密度）の積分で書けることを示す[59]．$\mu$ の定義域 $\mathcal{F}'$ と $\Phi$ の定義域 $\mathcal{F}$ を分けたことは§12.2 でのみ本質的である．

注. $\Phi$ の $\sigma$ 有限性は，定理 80 の証明[60]において，(58) の $\alpha$ が価値を持つのに必要である．$\alpha$ は (59) の $F$ が $\Phi$ の絶対連続成分をつくしていること，即ち，$\Psi = \Phi - F$ の特異性を言うのに用いられる．$\Phi$ の $\sigma$ 有限性を仮定しない証明があるかどうかは知らない．上記より，あるとすれば，(58) を避けて通る必要がある．19960822 哲弥追記：[河田三村, §29] は一意性を分離することで存在に関して $\sigma$ 有限性を仮定しない証明を行っているようだ．

## §12.1. Lebesgue の分解

**定理 80 (Lebesgue の分解)** $\sigma$ 有限な加法的集合関数 $\Phi\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して $\mu$ に関して絶対連続な加法的集合関数 $F$ と特異な加法的集合関数 $\Psi$ が $\mathcal{F}$ 上に存在して，$\Phi = F + \Psi$ が成り立つ．特に $\Phi$ が非負定値ならば $F, \Psi$ もそうなる．この分解は一意的である．

証明. 一意性は容易．なぜなら，$\Phi = F + \Psi = F' + \Psi'$ という二通りの分解があると $F - F' = \Psi - \Psi'$ は絶対連続かつ特異だから，命題 76 より恒等的に 0．即ち，$F' = F$, $\Psi' = \Psi$.

定理 71 より，$\Phi$ が非負定値の場合のみ証明すれば十分．即ち，$\Phi$ は測度であると仮定してよい．また，$\sigma$ 有限なので，$\Phi(X_n) < \infty$, なる $X_n$ 毎に可測空間を制限して $(X_n, \mathcal{F}' \cap 2^{X_n})$ を考えればよいので，$\Phi$ は実数値をとる（有界）と仮定してよい．よって，以下，$\Phi\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+$ とする．

(57) $\mathbf{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{F\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+;\ \sigma\text{ 加法的，}\mu\text{ に関して絶対連続，}\ F(E) \leq \Phi(E),\ E \in \mathcal{F}\}$,

とおき，

(58) $\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{F \in \mathbf{F}} F(\Omega)$

とおく．$\alpha$ の定義から $0 \leq \alpha \leq \Phi(\Omega) < \infty$．また，$\mathbf{F}$ の中に集合関数列 $\{F_n\}$ が取れて $\lim_{n\to\infty} F_n(\Omega) = \alpha$ が成り立つようにできる．このような列を一つ固定する．

$F\colon\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

(59) $F(E) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} F_n(E_n) \mid E_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N},\ \ E \supset \sum_{n=1}^{\infty} E_n\},\ \ E \in \mathcal{F}$,

[58] [伊藤清三] との関係では，[伊藤清三, §18] の定理 18.3 以降 (p.129–134) のうちで，$\mu$ の $\sigma$ 有限性を必要としない部分，即ち定理 18.4(i)(ii), をここで紹介する．補題 2 は既に紹介した．補題 1 は自明．補題 3 は $\mu = \infty$ のときは使えない (kaiseki.jnk 参照).

[59] [伊藤清三, §18 (pp.130–132)] の定理 18.4 (iii)．19960204 哲弥拡張; rev. 19960817–19.

[60] [伊藤清三, p.130]; 哲弥証明 19960130; rev. 19960816–18．(58), (57) は [伊藤清三] に従うが，哲弥は $\mu$ の有限性を仮定しない証明に整理した．特に，(57) を含めて，積分を持ち込まないで証明を遂行した．これは，地球最後の日の例に Radon–Nikodým の定理を適用するのに必要な，実質的な拡張である．

で定義する．$\{E_n\} = \{\emptyset\}$ というとりかたがあるので，右辺の sup は空でない．特に $F(E) \geq 0,\ E \in \mathcal{F}$, を得る．

$F$ が絶対連続な加法的集合関数であることを示す．(非負値性が分かっているので測度になる)．$\mu(E) = 0$ かつ $E \supset \sum_n E_n,\ E_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N}$, とすると，単調性から $\mu(E_n) = 0$，$F_n \in \mathbf{F}$ の絶対連続性から $F_n(E_n) = 0$, が全ての $n$ で成り立つから，$F$ の定義 (59) より $F(E) = 0$ となって，絶対連続性が成立．次に，$E \in \mathcal{F}$, $E_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N},\ E = \sum_n E_n$, とする．$F$ の定義 (59) から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$E_{n,m},\ (n,m) \in \mathbf{N}^2$, が存在して，$\sum_m E_{n,m} \subset E_n,\ n \in \mathbf{N}$, かつ,

$$\sum_n F(E_n) \leq \sum_n (\sum_m F_m(E_{n,m}) + 2^{-n}\epsilon) = \sum_m F_m(\sum_n E_{n,m}) + \epsilon \leq F(E) + \epsilon$$

となる．ここで $(n,m) \neq (n',m')$ ならば $E_{n,m} \cap E_{n',m'} = \emptyset$ なること，$\sum_m \sum_n E_{n,m} \subset E$, および，$F_m \in \mathbf{F}$ の $\sigma$ 加法性を使った．よって，

(60) $\displaystyle\sum_n F(E_n) \leq F(E)\,.$

同じ $E$, $\{E_n\}$ に対して，再びかってな $\epsilon > 0$ をとる．$F$ の定義 (59) から $\tilde{E}_m \in \mathcal{F},\ m \in \mathbf{N}$, が存在して，$\sum_m \tilde{E}_m \subset E$ かつ

$$F(E) \leq \sum_m F_m(\tilde{E}_m) + \epsilon = \sum_m F_m(\sum_n (E_n \cap \tilde{E}_m)) + \epsilon = \sum_n \sum_m F_m(E_n \cap \tilde{E}_m) + \epsilon \leq \sum_n F(E_n) + \epsilon$$

となる．ここで $\tilde{E}_m \subset E = \sum_n E_n$, $F_m\ (\in \mathbf{F})$ の $\sigma$ 加法性，(59)，を用いた．よって，$\sum_n F(E_n) \geq F(E)$. これと (60) から，$F$ の $\sigma$ 加法性を得る．

$\Psi = \Phi - F$ とおく．$F_n \in \mathbf{F}$ なので $F_n \leq \Phi$，また，$\Phi$ は測度なので，$\sigma$ 加法性と単調性も用いると，

$$E \supset \sum_n E_n,\ (E_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N},) \implies \sum_n F_n(E_n) \leq \sum_n \Phi(E_n) = \Phi(\sum_n E_n) \leq \Phi(E)$$

から $F(E) \leq \Phi(E),\ E \in \mathcal{F}$．よって，$\Psi$ は非負定値である．$\Phi$, $F$ が $\sigma$ 加法性を持つので $\Psi$ も $\sigma$ 加法性を持ち，$F \geq 0$ より $\Psi(\Omega) \leq \Phi(\Omega) < \infty$，即ち，$\Psi$ は有界な測度である．$\Psi$ が $\mu$ に関して特異であることを言えば証明が完了する．

$\mathbf{F}$ の定義 (57) と今まで証明してきたことにより，$F \in \mathbf{F}$ だから，$\alpha$ の定義 (58) より，$F(\Omega) \leq \alpha$．他方で (59) において，$E_n = \Omega,\ E_m = \emptyset,\ m \neq n$, ととることにより，$F(\Omega) \geq F_n(\Omega)$．$n$ は任意だから，特に，$F(\Omega) \geq \lim_{n\to\infty} F_n(\Omega) = \alpha$．よって，

(61) $F(\Omega) = \alpha.$

(62) $\tilde{\Psi}(E) = \sup\{\Psi(N) \mid N \subset E,\ N \in \mathcal{F},\ \mu(N) = 0\},\ E \in \mathcal{F}$

とおく．

**補題 81** $\tilde{\Psi}$ は $0 \leq \tilde{\Psi}(E) \leq \Psi(E),\ E \in \mathcal{F}$, を満たす $\mathcal{F}$ 上の有界な測度であり，$\mu(E) = 0,\ E \in \mathcal{F}$, ならば $\tilde{\Psi}(E) = \Psi(E)$ を満たす．

補題 *81* の証明. $E \in \mathcal{F}$ とする．(62) で $N = \emptyset$ を考えると，$\tilde{\Psi}(E) \geq \Psi(\emptyset) = 0$ で正値性を得る．一般に $N \subset E,\ N \in \mathcal{F}$, ならば $\Psi$ が測度であることと測度の単調性から $\Psi(N) \leq \Psi(E)$ だから，(62) より $\tilde{\Psi}(E) \leq \Psi(E)$．従って，$\Psi$ が有界なので $\tilde{\Psi}$ も有界．$\mu(E) = 0$ ならば (62) で $N = E$ をとれるので，$\tilde{\Psi}(E) \geq \Psi(E)$ だから，$\tilde{\Psi}(E) = \Psi(E)$．あとは $\sigma$ 加法性を示せばよい．

$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ とおく．任意の $\epsilon > 0$ に対して (62) から $B \subset E,\ \mu(B) = 0$ を満たす $B \in \mathcal{F}$ が存在して更に，

$$\tilde{\Psi}(E) \le \Psi(B) + \epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(B \cap E_n) + \epsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Psi}(E_n) + \epsilon\,.$$

ここで，等式は $\Psi$ の $\sigma$ 加法性，最後の不等号は $B \cap E_n \subset E_n$, $0 \le \mu(B \cap E_n) \le \mu(B) = 0$（$\mu$ の単調性）と (62) を用いた．同じ $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ について，同様に，任意の $\epsilon > 0$ に対して (62) から $B_n \subset E_n$, $\mu(B_n) = 0$, $B_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, を満たす $B_n$ たちが存在して更に，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Psi}(E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\Psi}(B_n) + 2^{-n}\epsilon) = \Psi(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) + \epsilon \le \tilde{\Psi}(E) + \epsilon\,.$$

よって， $\sigma$ 加法性 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Psi}(E_n) = \tilde{\Psi}(E)$ を得た． □

$\Psi$ の特異性の証明を続ける．$\Delta\Psi = \Psi - \tilde{\Psi}$ とおく．補題 81 と (57) より，$\Delta\Psi \in \mathbf{F}$ である．実際，$\Delta\Psi$ の非負値性，有限性， $\sigma$ 加法性は明らか．$\Delta\Psi \le \Psi \le \Phi$ も定義から明らか．$\mu(E) = 0$, $E \in \mathcal{F}$, ならば 補題 81 に示したように $\tilde{\Psi}(E) = \Psi(E)$ なので，$\Delta\Psi(E) = 0$，即ち，絶対連続性が言える．このことと，さらに，$F$ の定義 (57) より，$F + \Delta\Psi \le F + \Psi = \Phi$ であるから，$F + \Delta\Psi \in \mathbf{F}$ となる．よって， (58) と (61) より，$F(\Omega) \le F(\Omega) + \Delta\Psi(\Omega) \le \alpha = F(\Omega)$ となって， $\Delta\Psi(\Omega) = 0$ を得る．$\Delta\Psi$ は測度なので単調性から，恒等的に 0 である．よって，

$$\Psi(E) = \tilde{\Psi}(E),\ E \in \mathcal{F}\,.$$

$\tilde{\Psi}$ の定義から $\mu(B_n) = 0$, $B \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, を満たす集合列 $\{B_n\}$ が存在して， $\lim_{n\to\infty} \Psi(B_n) = \Psi(\Omega)$ とできる．$B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$ とおくと，$\sigma$ 加法性から $\mu(B_0) = 0$. $\Psi$ の単調性から

$$\Psi(\Omega) \ge \Psi(B_0) \ge \limsup_{n\to\infty} \Psi(B_n) = \Psi(\Omega)$$

だから，$\Psi(B_0) = \Psi(\Omega) < \infty$．従って，$E \subset {B_0}^c$, $E \in \mathcal{F}$ ならば $\Psi(E) = 0$ となり， $\mu(B_0) = 0$ と合わせて，$\Psi$ が $\mu$ に関して特異であることが証明できた． □

## §12.2. Radon–Nikodým の定理

**定理 82 (Radon–Nikodým)** $\mu$ が $\sigma$ 有限，即ち，$\phi = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \cdots$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, を満たす $\Omega_n \in \mathcal{F}'$ が存在すると仮定する（$\Omega_n \in \mathcal{F}$ は仮定しなくてよい[61]）．また，$F : \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ は $\sigma$ 有限な加法的集合関数であって，$\mu$ に関して絶対連続とする．このとき，

*(i)* $\mathcal{F}'$ 可測関数 $f:\ \Omega \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ であって，以下を満たすものが存在する： $0 \le f < \infty$, *a.e.*, かつ，$F(E) = \int_E f\, d\mu$, $E \in \mathcal{F}$.

*(ii)* $\Omega_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, ならば $f$ は *a.e.* に一意的である，即ち， $\tilde{f}$ も上記を満たすならば $f = \tilde{f}$, *a.e.*

$f$ を $F$ の $\mu$ に関する *(Radon–Nikodým の)* 密度関数と呼び，$f = \dfrac{dF}{d\mu}$ と書く．これは $\mu$-*a.e.* に決まる（ので，$\dfrac{dF}{d\mu}$ という記号は厳密には測度 0 での違いを無視する関数の同値類に対する記号と理解する）．

[61] 従って，$F(\Omega_n)$ が定義されるとは限らないので $\Omega_n$ に制限することができず，$\mu(\Omega) < \infty$ を仮定することはできない．この場合，[伊藤清三, 定理 18.4] の証明は不十分である．

証明. 定理 80 同様，定理 71 より，$F$ が非負定値の場合のみ証明すれば十分．また，$F$ は $\sigma$ 有限なので，実数値をとる（有界）と仮定してよい．よって，以下，$F:\ \mathcal{F}\to\mathbf{R}_+$ とする．

(i)

$\mu$ の定義域（可測集合）が広いほうは同じ $f$ で存在が言えるから，$\mathcal{F}'$ は最も狭い $\sigma$-加法族，即ち，

$$\mathcal{F}'=\mathcal{F}''\stackrel{\text{def}}{=}\sigma[\mathcal{F},\{\Omega_n\mid n\in\mathbf{N}\}]$$

と仮定してよい[62]．

**補題 83** ある $k\in\mathbf{N}$ に対して，$\tilde{E}\in\mathcal{F}'$, $\tilde{E}\subset\Omega_k-\Omega_{k-1}$, ならば，$\tilde{E}=E\cap(\Omega_k-\Omega_{k-1})$ を満たす $E\in\mathcal{F}$ が存在する．

補題 *83* の証明. （$\mathcal{F}'=\mathcal{F}''$ なので,）

$$\text{(63)}\quad \mathcal{F}'=\tilde{\mathcal{F}}\stackrel{\text{def}}{=}\{\sum_{k=1}^{\infty}E_k\cap(\Omega_k-\Omega_{k-1})\mid E_k\in\mathcal{F},\ k\in\mathbf{N}\}$$

を示せばあとは明らかである．$\mathcal{F}'\supset\tilde{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ と $\{\Omega_n\}$ を含む $\sigma$-加法族だから明らか．

$\tilde{\mathcal{F}}\ni\Omega_n$, $n\in\mathbf{N}$, は (63) において $E_k=\Omega$, $1\le k\le n$, $E_k=\emptyset$, $n<k$, とおけば得られ，$\tilde{\mathcal{F}}\ni E$, $E\in\mathcal{F}$, は $E_k=E$, $k\in\mathbf{N}$, とおけば得られる．あとは $\tilde{\mathcal{F}}$ が$\sigma$-加法族であることを示せば，$\mathcal{F}'$ の最小性から $\mathcal{F}'\subset\tilde{\mathcal{F}}$ を得る．ところが,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cap(\Omega_n-\Omega_{n-1})\right)^c=\sum_{n=1}^{\infty}{E_n}^c\cap(\Omega_n-\Omega_{n-1})\in\tilde{\mathcal{F}},$$
$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_{m,n}\cap(\Omega_n-\Omega_{n-1})\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_{m,n}\right)\cap(\Omega_n-\Omega_{n-1})\in\tilde{\mathcal{F}},$$

より $\mathcal{F}'\subset\tilde{\mathcal{F}}$ を得る．既に証明したこととと合わせて，補題は証明された． □

絶対連続有界測度 $F$ の密度関数の存在証明を続ける．

$$\mathbf{F_1}\stackrel{\text{def}}{=}\{\phi:\ \Omega_1\to\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}\mid\ \mathcal{F}'\text{ 可測},\quad\int_{E\cap\Omega_1}\phi\,d\mu\le F(E),\ E\in\mathcal{F}\},$$
$$\alpha_1\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{\phi\in\mathbf{F_1}}\int_{\Omega_1}\phi\,d\mu\ (\le F(\Omega)<\infty),$$

とおき，$\int_{\Omega_1}\phi_1\,d\mu=\alpha_1$ なる $\phi_1\in\mathbf{F_1}$ を（もし，あれば）固定する．

帰納的に $k\ge 2$ について，$\mathbf{F_{k-1}}$, $\alpha_{k-1}$, $\phi_{k-1}$ が定義されていれば，$\mathbf{F_k}$, $\alpha_k$ を

$$\mathbf{F_k}\stackrel{\text{def}}{=}\{\phi:\ \Omega_k\to\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}\mid\ \mathcal{F}'\text{ 可測},\quad\phi|_{\Omega_{k-1}}=\phi_{k-1},\ \int_{E\cap\Omega_k}\phi\,d\mu\le F(E),\ E\in\mathcal{F}\},$$
$$\alpha_k\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{\phi\in\mathbf{F_k}}\int_{\Omega_k}\phi\,d\mu\ (\le F(\Omega)<\infty),$$

で定義して，$\int_{\Omega_k}\phi_k\,d\mu=\alpha_k$ を満たす $\phi_k\in\mathbf{F_k}$ を（もし，あれば）選んで固定する[63]．$\phi_k\in\mathbf{F_k}$ なので，特に,

$$\text{(64)}\quad \phi_k|_{\Omega_{k-1}}=\phi_{k-1},\ k\in\mathbf{N}.$$

[62] 19960819 哲弥注．実は証明上重要な単純化である．というのは，以下で構成する $f$ は $\mathcal{F}''$-可測関数として一意的に決まるからである．証明は $f$ の一意性を見越して組み立てられているので，$\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}''$ より広くても，$f$ を決める以下の手続きでは常に $\mathcal{F}''$-可測関数の中から探さないと証明が壊れる．

[63] $\mu$ が $\sigma$ 有限でない場合に定理が不成立である例 [伊藤清三, 反例 (p.132)]，即ち，$\Omega=[0,1]$, $\mu=\sharp$, $F=\mu_1$, の場合には，$\chi_\emptyset$（恒等的に 0 なる関数）のみが $\mathbf{F_k}$ に含まれる．そのようにして，密度が存在しないことと矛盾しないように，この証明が壊れる．

**補題 84** 全ての $k\in\mathbf{N}$ に対して，$\mathbf{F_k}\neq\emptyset$, $\alpha_k$ は *well-defined,* かつ，$\phi_k$ は存在する．

補題 *84* の証明. $k-1$ に対して主張が成立するとする（$k=1$ のときは無前提）．

$$\phi=\begin{cases}\phi_{k-1}, \text{ on } \Omega_{k-1},\\ 0, \qquad \text{on } \Omega_k-\Omega_{k-1},\end{cases} \quad \in\mathbf{F_k}$$

があきらかなので，$\mathbf{F_k}$ は空でない，よって，$\alpha_k$ も well-defined. 特に，$\alpha_k\geq\alpha_{k-1}$ も分かる．$\alpha_k$ の定義から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_k}\tilde\phi_{k,n}\,d\mu=\alpha_k$ を満たす $\tilde\phi_{k,n}\in\mathbf{F}$, $n\in\mathbf{N}$, が存在する．$\phi_k=\displaystyle\sup_{n\geq1}\tilde\phi_{k,n}$ とおいて $\Omega_k$ 上の $\mathcal{F}'$ 可測非負定値関数 $\phi_k$ を定義する[64]．$\tilde\phi_{k,n}\in\mathbf{F}$ から特に $\phi_k|_{\Omega_{k-1}}=\phi_{k-1}$．従って，

$$(65)\quad \int_{E\cap\Omega_k}\phi_k\,d\mu\leq F(E),\ E\in\mathcal{F}\,,$$

を示せば，$\phi_k\in\mathbf{F}$ となり，特に，$\displaystyle\int_{\Omega_k}\phi_k\,d\mu\leq\alpha_k$. 他方，$\phi_k$ の定義から $\displaystyle\int_{\Omega_k}\phi_k\,d\mu\geq\int_{\Omega_k}\tilde\phi_{k,n}\,d\mu$ が任意の $n$ で成り立つので，$n\to\infty$ として $\displaystyle\int_{\Omega_k}\phi_k\,d\mu\geq\alpha_k$. 従って，

$$(66)\quad \int_{\Omega_k}\phi_k\,d\mu=\alpha_k\,,$$

を得て，$\phi_k$ が存在することも言えて，帰納法により，補題 84 の証明が終わる．

(65) を示す．$\phi_{k,n}\overset{\text{def}}{=}\displaystyle\max_{1\leq m\leq n}\tilde\phi_{k,m}$, $n\in\mathbf{N}$, とおく．$\phi_{k,n}$ は $n$ について単調増加だから各点で収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\phi_{k,n}=\phi_k$ となる.（なぜなら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\phi_{k,n}\leq\phi_k$ は明らかである．定義から，各 $\omega\in\Omega_k$, $\epsilon>0$ に対して，$m$ が存在して $n\geq m$ で

$$\phi_k(\omega)\leq\tilde\phi_{k,m}(\omega)+\epsilon\leq\phi_{k,n}(\omega)+\epsilon\leq\lim_{n\to\infty}\phi_{k,n}(\omega)+\epsilon\,.$$

よって逆向きの不等号も得る.）

$$\tilde E_{k,n,m}\overset{\text{def}}{=}\{\omega\in\Omega_k-\Omega_{k-1}\mid\phi_{k,n}(\omega)=\tilde\phi_{k,m}(\omega),\ \phi_{k,n}(\omega)>\tilde\phi_{k,\ell}(\omega),\ 1\leq\ell\leq m\}\in\mathcal{F}'$$

とおくと，$\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\tilde E_{k,n,m}=\Omega_k-\Omega_{k-1}$．補題 83 より，$1\leq m\leq n$ に対して，$\tilde E_{k,n,m}=E_{k,n,m}\cap(\Omega_k-\Omega_{k-1})$ を満たす $E_{k,n,m}\in\mathcal{F}$ が存在する．必要ならば $E_{k,n,m}$ の代わりに $E_{k,n,m}-\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{m-1}E_{k,n,\ell}$ を考えることにより，最初から $E_{k,n,m}\cap E_{k,n,m'}=\emptyset$, $m\neq m'$, と仮定してよい．$\phi_k|_{\Omega_{k-1}}=\phi_{k,n}|_{\Omega_{k-1}}=\phi_{k-1}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}&\int_{E\cap\Omega_k}\phi_{k,n}\,d\mu=\int_{E\cap\Omega_{k-1}}\phi_{k-1}\,d\mu+\sum_{m=1}^{n}\int_{E\cap E_{k,n,m}\cap(\Omega_k-\Omega_{k-1})}\tilde\phi_{k,m}\,d\mu\\&=\int_{E\cap(\sum_m E_{k,n,m})^c\cap\Omega_{k-1}}\phi_{k-1}\,d\mu+\sum_{m=1}^{n}\int_{E\cap E_{k,n,m}\cap\Omega_k}\tilde\phi_{k,m}\,d\mu\\&\leq F(E\cap(\sum_m E_{k,n,m})^c)+\sum_{m=1}^{n}F(E\cap E_{k,n,m})\\&=F(E)\,.\end{aligned}$$

[64]哲弥 19960819. 地球最後の日 §1.2 の例，即ち，$\Omega=\mathbf{N}$, $\mu(\{n\})=1$, $\mathcal{F}=\{\emptyset,2\mathbf{N},2\mathbf{N}-1,\mathbf{N}\}$, $F(2\mathbf{N})=F(2\mathbf{N}-1)=1/2$, では，各 $\Omega_k-\Omega_{k-1}$ 毎に，奇数集合上，偶数集合上，それぞれで定数になる $\phi_k$ が，$\mathcal{F}''$-可測関数として unique に決まる．この唯一性のおかげで，$\tilde\phi_{k,n}$ は $n$ について収束することが（暗黙に）従い，それ故 $\phi_k$ を $\sup\tilde\phi_{k,n}$ で定義できる．もし $\alpha_k$ を与える関数が 2 つ以上あれば，$\tilde\phi_{k,n}$ の列はそれらを振動するかも知れず，そうすると，各点の sup で定義した関数は大きくなりすぎて，$F(E)$ で押さえられない．$\mathcal{F}'\neq\mathcal{F}''$ であっても，$\mathbf{F}$ の定義には $\mathcal{F}''$ を用いるべきなのはこの理由からである．

$\mu$-有限な $\Omega_k$ を導入しないと，有限値の無限面積での平均は 0 になってしまうので $\phi$ が 0 になる．これは $\sigma$ 有限でない $\mu$ の場合の注意と同様である．

可測集合を制限すると可測関数が平均化する（均す）のは，確率論の条件付き期待値の操作に他ならない．実際，Radon–Nikodým の定理は条件付き期待値の存在に用いられる．

最後から二つ目の変形では $\phi_{k-1} \in \mathbf{F_{k-1}}$, $\tilde{\phi}_{k,m} \in \mathbf{F_k}$ を，最後の等式は $F$ の $\sigma$ 加法性を用いた.

故に，単調収束定理 定理 52 および， $\tilde{\phi}_{k,m} \in \mathbf{F_k}$ から，

$$\int_{E\cap\Omega_k} \phi_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega_k} \phi_{k,n} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le m\le n} \int_{E\cap\Omega_k} \tilde{\phi}_{k,m} \, d\mu \le F(E)\,, \quad E \in \mathcal{F}\,.$$

よって (65) が証明された. □

絶対連続有界測度 $F$ の密度関数の存在証明を続ける.

$f:\ \Omega \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ を $f|_{\Omega_k} = \phi_k$ で定義すると，$f$ は $\mathcal{F}'$-可測であって，(64) より $f$ は well-defined. この $f$ が求めるものであることを言う.

$\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $k \in \mathbf{N}$, 系 54, (65), より，

$$\text{(67)} \quad \int_E f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap\Omega_k} \phi_k \, d\mu \le F(E),\ E \in \mathcal{F}\,.$$

あとは， $F(E) = \int_E f \, d\mu$, $E \in \mathcal{F}$, を言えばよい．$\Psi(E) = F(E) - \int_E f \, d\mu$, $E \in \mathcal{F}$, とおいて，$\Psi$ を定義する．$\Psi$ は $\sigma$ 加法性を持つ．$f \ge 0$ と (67) より，$F(E) \ge \Psi(E) \ge 0$, $E \in \mathcal{F}$, だから $\Psi$ は有界な測度である．特に， $\mu(E) = 0$, $E \in \mathcal{F}$, ならば，$F(E) = 0$ となり，$\Psi(E) = 0$ だから， $\Psi$ は $\mu$ に関して絶対連続である．もし，$\Psi$ が $\mu$ に関して特異であれば，命題 76 より $\Psi$ が恒等的に 0 になって証明が終わる.

**補題 85** 任意の自然数 $n$ と $E_n \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\frac{1}{n}\,\mu(E) \le \Psi(E),\ E \subset E_n,\ E \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_n) = 0\,.$$

補題 *85* の証明. 結論を否定して，ある自然数 $n$ と $E_n \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\frac{1}{n}\,\mu(E) \le \Psi(E),\ E \subset E_n,\ E \in \mathcal{F},\ \ \mu(E_n) > 0\,.$$

が成り立つとする.

$g(\omega) = f(\omega) + \dfrac{1}{n}\,\chi_{E_n}(\omega)$ で $g:\ \Omega \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ を定義する[65]．明らかに $g$ は $\mathcal{F}'$ 可測である．そして，$E \in \mathcal{F}$ のとき，

$$\begin{aligned}&\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \frac{1}{n}\mu(E \cap E_n) \le \int_{E\cap {E_n}^c} f \, d\mu + \int_{E\cap E_n} f \, d\mu + \Psi(E \cap E_n)\\ &\le F(E \cap {E_n}^c) + F(E \cap E_n) = F(E)\,.\end{aligned}$$

他方，$0 < \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_n \cap \Omega_k)$ だから，ある $k \ge 1$ に対して $\mu(E_n \cap \Omega_k) > 0$ となるから，$k_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \ge 1 \mid \mu(E_n \cap \Omega_k) > 0\}$ が存在する．定義から $\mu(E_n \cap \Omega_{k_0-1}) = 0$ だから，最初から，$g(\omega) = f(\omega) + \dfrac{1}{n}\,\chi_{E_n\setminus\Omega_{k_0-1}}(\omega)$ とおいても，今までの $g$ を含む式は変わらない．すると，$g|_{\Omega_{k_0-1}} = f|_{\Omega_{k_0-1}} = \phi_{k_0-1}$ だから，$g \in \mathbf{F_{k_0}}$．よって $\alpha_{k_0}$ の定義から $\int_{\Omega_{k_0}} g \, d\mu \le \alpha_{k_0}$．ところが (66) を用いると，

$$\alpha_{k_0} \ge \int_{\Omega_{k_0}} g \, d\mu = \int_{\Omega_{k_0}} f \, d\mu + \frac{1}{n}\mu(\Omega_{k_0} \cap E_n) = \alpha_{k_0} + \frac{1}{n}\mu(\Omega_{k_0} \cap E_n) > \alpha_{k_0}$$

となって矛盾する．よって補題の主張が成立する. □

$\Psi$ が特異であることの証明を続ける．$n \in \mathbf{N}$ に対して $G_n = \frac{1}{n}\,\mu - \Psi$ とおくと，$\Psi$ は有限値なので $G_n$ は $G_n:\ \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ なる加法的集合関数である．従って，定理 74 よりある $E_n \in \mathcal{F}$ があって，

[65] $g(\omega) = f(\omega) + \dfrac{1}{n}\,f(\omega)\,\chi_{E_n}(\omega)$ という選択肢は，$f \ne 0$ が言えていないとだめ．それ以外は $\Psi \ll \mu$ を $\Psi \ll F$，$\frac{1}{n}\int f$ を $\frac{1}{n}F$ に，置き換えれば可能に見える.

$$\begin{cases} G_n(E) \le 0, & E \subset E_n,\ E \in \mathcal{F}, \\ G_n(E) \ge 0, & E \subset {E_n}^c,\ E \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

が成り立つ．このとき 補題 85 より，$\mu(E_n) = 0$．$E_0 = \bigcup_n E_n$ とおくと，$\mu$ は測度だから

$$\mu(E_0) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} E_m\right) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) = 0\,.$$

他方，$E \subset {E_0}^c, E \in \mathcal{F},$ ならば，$E \subset {E_n}^c$ なので，$G_n(E) \ge 0,$ 即ち，$\Psi(E) \le \frac{1}{n}\mu(E)$ が成り立つ．$n$ は任意なので，$\Psi(E) = 0$．即ち $\Psi$ は特異であるから，定理の (i) の証明が終わった．

よって $f$ が求める Radon–Nikodým density である．

(ii)

$\Omega_n \in \mathcal{F}$ なので，$\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ としてよい．$\tilde{f}\ \Omega \to \mathbf{R}_+$ も $F(E) = \int_E \tilde{f}\, d\mu,\ E \in \mathcal{F},$ を満たすとする．$\Lambda_n = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > \tilde{f}(\omega) + \dfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ とおく[66]と，

$$\frac{1}{n}\mu(\Lambda_n) \le \int_{\Lambda_n} (f - \tilde{f})\, d\mu = F(\Lambda_n) - F(\Lambda_n) = 0$$

だから，$\mu(\Lambda_n) = 0$. よって

$$\mu(f > \tilde{f}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \tilde{f} + \frac{1}{n}\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Lambda_n) = 0\,.$$

$f < \tilde{f}$ についても同様だから，$\mu(f \ne \tilde{f}) = 0$. □

## §12.3. 例

### §12.3.1. $\sigma$ 有限性

$\mu$ が $\sigma$ 有限でない場合に 定理 82 が不成立になる例 [伊藤清三, 反例 (p.132)]．$\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_1|_{[0,1]}$ は $[0,1]$ 上の Lebesgue 可測集合，$\mu = \sharp$ は個数を与える測度（無限集合には $\infty$ を与える），$F = \mu_1$ は Lebesgue 測度，の場合，密度は存在しない．

### §12.3.2. 条件付確率

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ を $\sigma$-加法族とする．$\Lambda \in \mathcal{F}$ に対して

$$D_\Lambda = \{\xi :\ \Omega \to \mathbf{R} \mid \mathcal{B}\text{-可測},\ P(\Lambda \cap \Theta) = \int_\Theta \xi\, d\,u\}$$

とおく．定理 82 より，$D_\Lambda$ が空でないこと，$\xi \ge 0, D_\Lambda \ni \xi_i, i = 1, 2,$ ならば $\xi_1 = \xi_2, P$-a.e, はすぐ分かる．$P$-a.e. で等しいという同値律を $\sim$ で表す．

**定義 23** $D_\Lambda/\sim$ の唯一の元を $\mathcal{B}$ に関する $\Lambda$ の条件付き確率と呼び，$P(\Lambda \mid \mathcal{B})$ と書く[67]．$D_\Lambda$ の元（確率変数）を $P(\Lambda \mid \mathcal{B})$ の *version* と呼ぶ．

以下，条件付き確率の version のことも条件付き確率と呼ぶ．条件付き確率（の version）は確率変数だから，$\omega \in \Omega$ 毎に $P(\Lambda \mid \mathcal{B})(\omega)$ が実数値に決まる．他方，$\Lambda \in \mathcal{F}$ を与える毎に条件付き確率が決まるから，$P(\cdot \mid \mathcal{B})(\omega)$ は $\mathcal{F}$ 上の集合関数と見ることができる．

特に，$P(\Theta_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, \sum \Theta_i = \Omega,$ を満たす $\Delta = \{\Theta_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ に対して，$\mathcal{B} = \sigma[\Delta]$ のときは，

---

[66] これが $F$ の定義域 $\mathcal{F}$ に入っていることの保証のために $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ が必要だった．

[67] [西尾, pp.163–178], [楠岡, p.26]

(68) $P(\Lambda \mid \mathcal{B})(\omega) = \dfrac{P(\Lambda \cap \Theta_i)}{P(\Theta_i)}, \ \ \omega \in \Theta_i \, ,$

とおけば，$P(\Lambda \mid \mathcal{B}) \in D_\Lambda$ が容易に確かめられる．$D_\Lambda$ の元は一意である（$\mathcal{B}$ に空でない零集合がないので a.e. の意味の一意性は本当の一意性と同じこと）．この式は $\omega$ をとめて $\Lambda$ の集合関数と見るとき $\mathcal{F}$ 上の確率測度になっている．右辺は（その support が $\Theta_i$ になっていることも含めて），事象 $\Theta_i$ が生じたときの $\Lambda$ の確率を与える，という意味で古典的な条件付き確率になっている．

$\mathcal{B}$ が零集合を元に含む場合は $P(\cdot \mid \mathcal{B})(\omega)$ が常に確率測度になっているという明らかな保証がない．(68) の右辺の分母が 0 だから (68) が形式的になってしまって上記の論法が使えない．例えば [西尾] では，$\Lambda = \{X \le x\}$ という形に限って，$x$ についての単調性を利用して，$X$ の条件付き確率の分布関数を与えることで次の定理を与えている[68]．

**定理 86 ([西尾, p.169])** *$X$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数，$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ を $\sigma$-加法族とする．次の条件を満たす関数 $\mu\colon\ \Omega \times \mathcal{B}_1 \to \mathbf{R}$ が存在する：*

*(i)* $\mu(\omega, \cdot)$ は *a.e.-$\omega$* に対して $\mathcal{B}_1$ 上の確率（古典的な条件付き確率に相当）である．

*(ii)* 任意の $A \in \mathcal{B}_1$ に対して $\mu(\cdot, A)$ は条件付き確率 $P(X^{-1}(A) \mid \mathcal{B})$ の *version* になる．

他に，これらの条件を満たす関数 $\tilde{\mu}$ があれば，$\tilde{\mu}(\omega, A) = \mu(\omega, A)$, $P$-*a.e.* $\omega$, $A \in \mathcal{B}_1$.

### §12.3.3. 地球最後の日

地球最後の日は偶数日か奇数日かを記述する確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ §1.2[69].

$$\Omega = \mathbf{N}, \ \ \mathcal{B} = \{\phi, 2\mathbf{N}, 2\mathbf{N}-1, \mathbf{N}\}, \ \ P(\text{偶数日}) = P(\text{奇数日}) = \frac{1}{2} \, .$$

全ての日を対等とする $\Omega$ 上の測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mu(\{n\}) = 1$, $n \in \mathbf{N}$, で与えられる．さて，

$$f(1) = f(2) = \frac{1}{2}, \ \ f(n) = 0, \ n \ge 3,$$

で $f$ を定義すると，$f$ は $\Omega$ 上 $\mu$-可測で $P(E) = \int_E f(x) d\mu(x)$, $E \in \mathcal{B}$, を満たすので，$\mu$ に関して絶対連続な測度 $P$ の密度になっている．明らかに密度になる $f$ は一意でない！(例：$f(3) = f(4) = 1/3$, その他では 0.）[70]

### §12.3.4. 既約分数の確率

自然数 2 つの比 $m/n$ が既約になる確率を計算する確率空間 §1.2. $f(1) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-2})$, $f(2) = \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}} (1 - p^{-2}) 2^{-2}$, $f(6) = \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{2,3\}} (1 - p^{-2}) 2^{-2} 3^{-2}$, などとすればよいと思う．未検討.

---

[68] 実数値確率変数（*nrealsN* 値でも可）を扱っている間は以上の論法で十分だが，Wiener 測度などでは関数値（Banach 空間値）確率変数を扱いたい．Malliavin calculus はそのような場合の条件付き確率や後述の部分積分等の calculus を与える方法らしい.

[69] 960206 に以下のような注釈と共に削除したが，[Cacoullos, p.33, Q155, 解答 p.155] は反例にならない．1 つの自然数の素因数の生起確率を考えると反例になるが，これは自然数対を考える Q155 と違って 1 つの自然数だと確率測度にならないので，哲弥拡張が間違いではない.

> 下記例 4 は，Radon–Nikodým の 960205 哲弥拡張の例として採用する予定だったが，この拡張はそのままでは誤りな（[Cacoullos, p.33, Q155, 解答 p.155] が反例になる）ので，960206 削除する.

[70] 通常の Radon–Nikodým の定理の証明 ([伊藤清三, p.130–132], [西尾, p.165], [高木貞治, §112 (p.420)], [河田三村, p.335 (iii)], [志賀浩二, p.204]) は $\mu(\Omega) < \infty$ として証明するので，上記例は扱われていない．他の文献は Radon–Nikodým を扱っていない. 960205 哲弥拡張の神髄.

## §13. 微分との関係

**定理 87 (微分積分法の基本公式 [高木貞治, §32, 定理 35])** $f$ が $[a,b] \subset \mathbf{R}$ で連続関数とする.

*(i)* このとき $f$ の不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f\,dx$ は微分可能な関数で，$[a,b]$ で $f$ の原始関数 *(*$F' = f$ となる関数*)* である.

*(ii)* 逆に微分可能な関数 $F$ が $f$ の原始関数ならば $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x dx$ と，不定積分で書ける.

$f$ が連続関数ならば，不定積分は原始関数と同意語である． [定理 87 は] 連続関数に関する限り，微分と積分が互いに逆な算法であることを意味する． $\cdots$ 連続関数以外では微分積分法はむずかしい！[71].

連続関数を超えて，微分と積分に関係があるかどうかが問題になる（具体例は §16.2.3）.

この節 §13 では，標語的な結果の紹介にとどめ，詳細な結果や証明は行わない．詳しくは文献 [伊藤清三, §19], [高木貞治, §125 (pp.452–453)], [河田三村, §32–34], [志賀浩二, 27,28 講], を参照．この節で紹介するのは，微分商 ([伊藤清三], [高木貞治])，または微分係数 ([河田三村])，または密度 ([志賀浩二])，と呼ばれる，用語の定着していない概念である．密度の概念は $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ で考察できるが，密度が素朴な微分と直接関連する一次元 $\mathbf{R}$ の場合を述べる.

**定義 24** $[a,b] \subset \mathbf{R}$ を有界閉区間，$F:\ [a,b] \to \mathbf{R}$ を有界な関数とする．$F$ が絶対連続であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の互いに共通部分を持たない部分区間 $n$ 個 $\{(a_k, b_k] \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$ となることである.

$n = 1$ の場合を考えれば，絶対連続な関数は連続である．$n = \infty$ としても同値な条件である.

**定理 88** $f$ が $[a,b] \subset \mathbf{R}$ で *Lebesgue* 積分可能な関数とする.

*(i)* このとき $f$ の不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ は絶対連続関数で，*a.e.* $x \in [a,b]$ に対して微分可能かつ $F'(x) = f(x)$ が成立つ.

*(ii)* 逆に絶対連続関数 $F$ はある積分可能関数 $g$ を用いて $F(x) - F(a) = \int_a^x g(x)\,dx,\ x \in [a,b],$ と不定積分で表される．従って，$F'(x) = f(x),\ a.e.\ x \in [a,b],$ ならば，$F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx,\ x \in [a,b],$ が成り立つ.

注. $F$ が連続であっても絶対連続でなければ，特異成分の寄与があり得るので，不定積分で書けるとは限らない．言い換えると，$F$ を微分して積分しても $F$ に戻るとは限らない．$F$ が絶対連続ならば OK．他方，積分して微分すれば a.e. に元に戻る.

**証明の概要１．R における絶対連続関数と加法的集合関数の対応．** 絶対連続関数は右連続有界変動関数であり，右連続有界変動関数は Jordan の分解 定理 71 に相当する性質を持つ，即ち，二つの単調増加右連続関数の差で表せる．二つの和として全変動が定義できて， 命題 77 の前半に対応する性質が示せる（以下，詳しくは [伊藤清三, §19]）．他方，$F$ が右連続単調増加関数ならば，§2.2 の方法で $\Phi((a,b]) = F(b) - F(a)$ を満たす測度を構成できるので，一般の右連続有界変動関数に対してこの式の成り立つ加法的集合関数 $\Phi$ が存在する． Radon–Nikodým の定理 定理 82 より，結局,

[71] [高木貞治, §32]

**補題 89** $[a,b]$ で定義された有界変動右連続関数 $F$ が絶対連続になる必要十分条件は $(a,b]$ で定義された *Lebesgue* 積分可能な関数 $f$ が存在して $F(x)-F(a)=\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$, $x\in(a,b]$ が成り立つことである.

これによって，絶対連続関数の平均増加率は絶対連続加法的集合関数の値と集合の Lebesgue 測度の比に等しいことが分かり，加法的集合関数の問題に帰着する.

**証明の概要 2．$\mathbf{R^N}$ における微分商の存在定理**　密度（微分商，微分係数）は加法的集合関数と Lebesgue 測度の比で定義する．Vitali の被覆定理[72]から密度（微分商，微分係数）の a.e. 存在及び Radon–Nikodým 密度との一致を言うことができる [高木貞治, 定理 122 (p.453)], [河田三村, 定理 34.4], [志賀浩二, p.219]．発想は， Radon–Nikodým 密度が $\mathbf{R^N}$ では素朴な意味の $n$ 次元密度に相当することである．特に，$\mathbf{R}$ ではそれが，補題によって微分係数に相当する.

証明は一次元といえども長い．理由の一つは， 微分商（微分係数）の存在が全ての $x$ ではなく，a.e. $x$ でしか言えないため，微分商の存在しない集合が零集合である，という dual space での考察を要するからである．Radon–Nikodým 密度の存在は測度（積分・加法的集合関数）に基づいて定義されたものであって，絶対連続性と同値なのに対して，微分商は差分（一般次元では集合関数の値と集合の体積との比）の極限として定義されていて，積分とは独立な概念であるから，煩わしさがあっても不思議ではない.

# §14. 部分積分

## §14.1. Lebesgue–Stieltjes 積分

19

**定義 25** $(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間，$\Phi:\ \Omega\to\mathbf{R}$ を実数値加法的集合関数とする．可測関数 $f:\ \Omega\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して，$\Phi$ の全変動 $V$ に基づく定積分が有限 $\displaystyle\int_\Omega |f|\,dV<\infty$ のとき，$E\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\int_E f\,d\Phi \overset{\mathrm{def}}{=} \int_E f\,d\bar{V} - \int_E f\,d\underline{V}$$

が定義できる（有限値になる）．これを $\Phi$ による $f$ の *Lebesgue–Stieltjes* 積分と呼ぶ.

上下変動 $\bar{V}$, $\underline{V}$ は測度であって，$\bar{V}+\underline{V}=V$ であった．積分の定義から（単関数にも度って考えれば），$\displaystyle\int_E f\,d\bar{V}+\int_E f\,d\underline{V}$ となるので，$\displaystyle\int_\Omega |f|\,dV<\infty$ ならば $\displaystyle\int_\Omega |f|\,d\bar{V}<\infty, \int_\Omega |f|\,d\underline{V}<\infty,$ であるから，$\displaystyle\int_E f\,d\bar{V}$, $\displaystyle\int_E f\,d\underline{V},$ が存在して有限値である．よってその差として $\displaystyle\int_E f\,d\Phi$ が定義されるのである.

多くの基本性質は（二つの測度による積分の差だから）既に述べた測度に基づく Lebesgue 積分に帰着する.

## §14.2. 積分変数変換

測度空間上の加法的集合関数による Lebesgue–Stieltjes 積分については，測度による Lebesgue 積分との関係という問題が生じる.

**定理 90 (積分変数変換)** $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間，$\Phi:\ Omega\to\mathbf{R}$ を実数値加法的集合関数であって，$\mu$ に関して絶対連続なものとする．即ち *(定理 82)*，ある *a.e.* 有限な積分可能関数 $\phi$ があって，$\Phi(E)=\displaystyle\int_E \phi\,d\mu,$ $E\in\mathcal{F},$ とする．このとき，可測関数 $f$ が $\Omega$ の上で $\Phi$ の全変動 $V$ について積分可能なことと， $f\phi$ が $\Omega$ の上で $\mu$ について積分可能なことは同等であって，

$$\int_E f\,d\Phi = \int_E f\,\phi\,d\mu\,,\ E\in\mathcal{F}.$$

[72] $\mathbf{R^N}$ 次元空間で各点で体積 0 に集積する立方体被覆から可算個選んで排他和が測度 0 を除いて集合を覆うようにできるという定理．証明は [高木貞治, §123 (pp.447–449)], [河田三村, §33], [志賀浩二, p.212]．なお，一次元ではやさしい [伊藤清三, 補助定理 4 (p.141)].

証明. $\Phi = \bar{V} - \underline{V}$, $f = f^+ - f^-$ と分解すれば，非負値関数の測度による積分に帰着する．このとき Radon–Nikodým 密度 $\phi$ も非負値となるから， $f$ の単関数近似を考察して単調収束定理を用いれば結論に至る[73]. □

## §14.3. R の場合

**R** の場合について Stieltjes 積分を有界変動関数の言葉で表し，部分積分についての結果を [伊藤清三, pp.152–153] に従って紹介する．この節 §14.3 では証明や詳細を省略する．詳しくは， [伊藤清三, pp.147–153] 参照.

### §14.3.1. Stieltjes 積分

**定義 26** 区間 $[a,b]$ 上の関数 $F:\ [a,b] \to \mathbf{R}$ が有界変動であるとは，ある $M > 0$ が存在して，$[a,b]$ の任意の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$, $(k \in \mathbf{N})$ に対して， $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \le M$ となることを言う.

**命題 91 ([伊藤清三, 定理 19.1 (p.134)])** $[a,b]$ で絶対連続な関数 *(§13)* は有界変動である.

**命題 92 ([一松, pp.245–248])** $[a,b]$ で有界変動な関数 $F$ は二つの単調増加関数 $F_1,\ F_2$ を用いて $F = F_1 - F_2$ と表すことができる．$F$ が右連続ならば $F_i$ たちも右連続に取れる.

$I \subset \mathbf{R}$ を区間とし，$F$ を $I$ 上の右連続有界変動関数とすると，命題 92 より，二つの右連続単調増加関数 $F_1, F_2$ を用いて $F = F_1 - F_2$ と表せる．個々の単調増加関数に対して $\Phi_i((a,b]) = F_i(b) - F_i(a)$ を満たす測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}_i, \Phi_i)$ が§2.2 の方法で構成できるので，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ $(\supset \mathcal{B}_1)$ 上で実数値加法的集合関数 $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ が定義できる．$F$ の全変動 $V_F$ を $V_F = F_1 + F_2$ で定義すると，$V_\Phi((a,b]) = V_F(b) - V_F(a)$ を満たす測度 $V_\Phi$ が同様に $\mathcal{B}_1$ を含む $\sigma$-加法族上で定義される．§14.1 により，可測関数 $f:\ \Omega \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して，$\displaystyle\int_\Omega |f|\, dV_\Phi < \infty$ のとき，$E \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\int_E f\, d\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f\, d\bar{V}_F - \int_E f\, d\underline{V}_F$$

が定義できる．これを $\displaystyle\int_E f\, dF$ と書いて右連続有界変動関数 $F$ による $f$ の Lebesgue–Stieltjes 積分と呼ぶ.

### §14.3.2. 変数変換

定理 90 を絶対連続関数による Lebesgue–Stieltjes 積分に適用すると次を得る.

**命題 93 (積分変数変換)** 閉区間 $I = [a,b]$ で $F$ が絶対連続，即ち，定理 *88* により，ある積分可能関数 $\phi$ を用いて，

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \phi(x)\, dxm\ x \in [a,b], \quad F' = \phi, a.e.\text{-}x,$$

となるとき，

$$\int_a^b f(x)\, dF(x) = \int_a^b f(x)\, \phi(x)\, dx\,.$$

ここで，両辺の内一方が存在して有限ならば他方もそうなって等式が成り立つ．特に， $\phi(x) > 0$, *a.e.,* ならば $F$ は狭義単調増加だから逆関数 $F^{-1}$ が存在して，

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(F(x))\, F'(x)\, dx,$$

が成り立つ.

[73] [伊藤清三, 定理 20.1 (pp.149–150)].

### §14.3.3. Riemann-Stieltjes 積分と部分積分

**命題 94** $F$ が右連続有界変動関数で $f$ が連続関数のとき，*Riemann–Stieltjes* 積分が定義できるが，それは *Lebesgue–Stieltjes* 積分に等しい．$F$ が連続かつ有界変動， $f$ が有界変動でも成立する．

Riemann–Stieltjes 積分の定義とこの命題の前半の証明は [伊藤清三, pp.148–149]．後半の証明は [伊藤清三, pp.151–152]．

**命題 95** *(i)* 開区間 $(a,b)$ において $F$ が連続かつ有界変動，$\phi$ が有界変動ならば，

$$\int_a^b \phi(x)\,dF(x) = F(b)\phi(b) - F(a)\phi(a) - \int_a^b F(x)\,d\phi(x),\ x \in (a,b).$$

*(ii)* 開区間 $(a,b)$ において $f$ が *Lebesgue* 積分可能，$\phi$ が有界変動ならば，

$$\int_a^b \phi(x)\,f(x)\,dx = F(b)\phi(b) - F(a)\phi(a) - \int_a^b F(x)\,d\phi(x),\ x \in (a,b).$$

ここで， $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx + F(a)$．$F(a)$ は任意の定数である．さらに，$\phi(x)$ が絶対連続ならば，最後の項は $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\phi'(x)\,dx$ となる．

Riemann-Stieltjes 積分が存在しない場合にも拡張できるのかどうか知らないが，重要なことだと思う．

# 第 4 章 注釈

伊藤 1 回 荒川 1 回

## §15. Lebesgue 非可測集合

(Lebesgue) 測度論の利点の一つは,「大抵の」集合が可測集合になること（$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$-Lebesgue 測度の精密性）である．実際，Ω が可算集合の場合は非可測集合は病的と思う (§1.2.4)．しかし，実用上最も重要な $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上の Lebesgue 測度の場合，非可測集合は，病的とは言え，事実上避けられない．

(i) 濃度（要素となる集合の個数）が個々の要素となる集合の濃度を越えない集合族（具体的には閉集合全体）で決まってしまう測度であって，§2 によって外測度から自然に決められていること，から導かれる（と思われる） Lebesgue 非可測集合を構成できる (§15.1)．但し，Lebesgue 外測度から自然に構成した測度 (Lebesgue 測度) に非可測集合がある，と言っただけであって，如何なる定義によっても Lebesgue 測度を $2^{\mathbf{R}}$ 上に拡張できない，と言っているのではない．

(ii) Lebesgue 測度は平行移動不変性によって特徴づけられている (§15.2.1)．この不変性を保ったまま， $2^{\mathbf{R}}$ 上に拡張できない，という意味の非可測集合を構成することができる (§15.2.2)．これも，不変性を落としても拡張できない，とは言っていない．

(iii) いずれの例も選択公理（または整列可能性）を用いる[74]．$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の Lebesgue 非可測集合の不在は選択公理以外と矛盾がないことが知られているらしい (スロバリー 1970[76])．

### §15.1. 濃度と Lebesgue 非可測集合

#### §15.1.1. R の Lebesgue 非可測集合

§2.2 で構成（定義）した Lebesgue 測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ に対して非可測集合，即ち $E \notin \mathcal{F}_1$ となる集合の存在を示す[77]．$\mu = \mu_1$ と書く．$\mu(F) > 0$, $F \subset [0, 1]$ なる閉集合 $F$ 全体を $\mathcal{A}$ とする．

**補題 96 ([伊藤清三, 付録§2 定理 4 (p.262)])** $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ の全ての閉集合の族 $\mathcal{C}$ の濃度も全ての開集合の族 $\mathcal{O}$ の濃度も $\aleph_1$ である．

証明．$E \in \mathcal{C}$ と $E^c \in \mathcal{O}$ が 1 : 1 に対応するから，両者の濃度は等しい．任意の $G \in \mathcal{O}$ は $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U(x_{n_k}, r_{m_k})$（$x_n$ は有理点，$r_m$ は正の有理数， $U$ は球の内部）と書けるので（即ち，右辺の形の $U$ 達の合併），1 : 1-対応 $G \in \mathcal{O} \mapsto \{(n_k, m_k) \mid k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{2}^{\mathbf{N}}}$ がある．$\sharp\mathbf{Z}^{\mathbf{2}^{\mathbf{N}}} = \sharp{\aleph_0}^{\mathbf{N}} = \aleph_1$ だから，$\mathcal{O}$ の濃度は $\aleph_1$ 以下．任意の正の実数に対してその実数を半径に持つ球の内部は $\mathcal{O}$ の元だから $\sharp\mathcal{O} \geq \aleph_1$ でもある． □

補題 96 より $\mathcal{A}$ の濃度は $\aleph_1$ 以下（補題 96 証明最後の文と同様に $\aleph_1$ 以上であることも言える）．そこで，$\mathcal{A} = \{F_0, F_1, \cdots, F_\xi, \cdots\}$ と整列して，全ての添字 $\xi < \gamma$ とできる．ここで，$\gamma$ は濃度 $\aleph_1$ の始数．

**補題 97** 任意の $F_\xi \in \mathcal{A}$ に対して， 2 点 $x_\xi$, $x'_\xi \in F_\xi$ をとって，$\xi \neq \eta$ ならば $x_\xi$, $x'_\xi$, $x_\eta$, $x'_\eta$ のどの二つも異なるようにできる．

証明．$F_0$ は Lebesgue 測度正だから異なる 2 点がその中にある．$\xi < \lambda$ $(\gamma)$ なる任意の $\xi$ に対して主張の 2 点がとれたとすると，$X_\lambda = \{x_\xi, x'_\xi \mid \xi < \lambda\}$ の濃度は $\aleph_1$ 未満だから，$F_\lambda \setminus X_\lambda$ の濃度は $\aleph_1$．よって， 2 点をその中からとることができて，主張が $\lambda$ でも正しいことが分かる．超限帰納法により主張が証明される．□

[74]選択公理否定論[75]．
[76][志賀浩二, p.108]
[77]本質的に Fubini の定理の（条件を落としたときの）反例として [伊藤清三, pp.109–110] で用いられたものである．その例は Fubini の定理とは独立であると思う．960727 哲弥注．

補題 97 の $x_\xi$ の全体を $E$, $x'_\xi$ の全体を $E'$ とする．Lebesgue 外測度を $\mu^*$ と書くとき，$\mu^*(E) = \mu^*(E')$ は作り方の対称性から明らか．また，$E \cap E' = \emptyset$. よって，もし，$E$ が Lebesgue 可測集合ならば，外測度の単調性と測度の差の性質より，

$$\mu^*(E) = \mu^*(E') \leq \mu^*([0,1] \setminus E) = \mu([0,1] \setminus E) = 1 - \mu(E) = 1 - \mu^*(E)\,.$$

$\mu^*(E) > 1/2$ を示せば，$E$ が非可測集合であることが証明できる．

$G$ が開集合で $G \supset E$ ならば $\mu(G) \geq 1$ を言う．もし，$\mu(G) < 1$ ならば，$[0,1] - G$ は閉集合で $\mu([0,1] - G) > 0$ だから $[0,1] - G \in \mathcal{A}$. よって，補題 97 のある $\xi$ に対して，$x_\xi \in [0,1] - G$ だから $[0,1] - G \cap E \neq \emptyset$. これは $G \supset E$ に矛盾．よって $\mu(G) \geq 1$ が言えた．これと 命題 16 から，$\mu^*(E) \geq 1$ となる．

よって，$E \notin \mathcal{F}_1$ が証明された.

#### §15.1.2. Lebesgue 非可測集合と Fubini の定理

§15.1.1 の Lebesgue 非可測集合の構成方法を $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ に適用することで，Fubini の定理 定理 61, 定理 63 において，$f:\ \Omega \to \Omega'$ が $\mathcal{F}$ (または $\bar{\mathcal{F}}$)-可測関数ならば，という条件の本質的なことの例（条件を落としたときの反例）を作ることができる．即ち，$\mathbf{R}^\mathbf{2}$ 上で定義された $\mathcal{F}_2$ 可測でない関数であって，逐次積分は存在する（$x$ を固定すれば $y$ について可測関数，逆も同様）であるものが存在する．具体的な構成の手続きは教科書参照 [伊藤清三, pp.109–110].

### §15.2. Lebesgue 測度の不変性と非可測集合 20

#### §15.2.1. Lebesgue 測度の不変性

Lebesgue 測度の素朴な重要性の一つはその（並進）不変性，即ち，岡山の水 1 リットルを阪神大震災で水道の止まった神戸に持っていっても 1 リットルであることの数学モデルになっている点である．実際，Lebesgue 測度は，有限加法的測度の一意的拡張としての測度という以外に平行移動不変性による $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ の Lebesgue 測度の特徴づけができる．

**定理 98 ( [伊藤清三, 定理 7.1 (pp.35–36), 定理 21.2 (p.155), 定理 21.3 (p.157)])** $\Omega = \mathbf{R}^\mathbf{N}$ の測度について以下が成り立つ．

*(i)* *Lebesgue* 測度は平行移動不変である．即ち，$E \in \mathcal{F}_N,\ x \in \mathbf{R}^\mathbf{N}$ ならば $E + x \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid y - x \in E\} \in \mathcal{F}_N$ であって $\mu_N(E + x) = \mu_N(E)$.

*(ii)* 平行移動不変な測度は（規格化を除いて） *Lebesgue* 測度（の制限）である．即ち，測度 $(\mathbf{R}^\mathbf{N}, \mathcal{F}, \mu)$ が

$$(\forall E \in \mathcal{F})(\forall x \in \mathbf{R}^\mathbf{N})\ E + x \in \mathcal{F},\ \mu(E + x) = \mu(E),$$

であって，単位立方体については $[0,1]^N \in \mathcal{F},\ \mu([0,1]^N) = 1$ が成り立てば，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_N$ かつ $\mu_N|_\mathcal{F} = \mu$.

*(iii)* *Lebesgue* 測度は *Euclid* 変換で不変である．即ち，$T$ を $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ の回転または反転 *(*$TE = -E \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid -y \in E\}$*)* ならば $TE \in \mathcal{F}_N$ であって $\mu_N(TE) = \mu_N(E)$.

**定理 99 ([伊藤清三, 定理 12.7 (p.84)])** $f$ が $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ 上の *Lebesgue* 可測関数で，定積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^\mathbf{N}} f(x)\,dx$ を持つならば，任意の $y \in \mathbf{R}^\mathbf{N}$ に対して，$f(x + y),\ f(-x)$ も *Lebesgue* 可測で，定積分を持ち，$\displaystyle\int f(x + y)\,dx = \int f(-x)\,dx = \int f(x)\,dx.$

#### §15.2.2. Lebesgue 非可測集合と平行移動不変性

Lebesgue 測度の平行移動不変性に基づく特徴付けに対応して，Lebesgue 非可測集合の存在は，平行移動不変性に基づいて証明することもできる．§15.1.1 と合わせると，Lebesgue 測度をどのように理解しても非可測集合が（選択公理または超限帰納法の下で）避けられないということである．

#### §15.2.3. Lebesgue 非可測集合

選択公理と 定理 98 の平行移動不変性を用いれば，Lebesgue 非可測集合 $A \subset [0,1)$, かつ，$A \notin \mathcal{F}_N$, が構成できる (Vitali 1905)[78]．具体的な構成の手続きは教科書参照 [伊藤清三, pp.49–51].

定理 98 から，定理の $A$ を可測にする平行移動不変な測度であって，単位立方体を測度有限正にするものは存在しない．特に， Lebesgue 測度を $2^{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$ まで平行移動不変に拡張することはできない．しかし，平行移動不変でない拡張ならば否定されない．もっとも，集合の体積の絶対値だけでなく比までが場所（平行移動）によって変化するのは，相対性理論の下でも直感に合わないので，そのような測度の拡張を考える素朴な動機はないかも知れない．

注. 選択公理があると半径 1 の球の有限分割で半径 2 の球を得ることができる (Banach–Tarski[79])．これは，分割が可測でかつ平行移動しても測度不変と仮定すると $\mu(B(O,1)) = \mu(B(O,2))$ で矛盾する，と言っているので， 定理 98 と矛盾はない[80].

## §16. 歴史的注釈

### §16.1. $\sigma$ 加法性への歴史

**Jordan 測度** 　点集合に線分の長さ…のもついくつかの性質を有する数を付与することができると都合がよい…測度とよばれている…最も良く用いられてきた定義は，Jordan 氏の本の中に述べられ…[81].

外測度を $m^*(A) = \inf\{m(F) \mid F \in \mathcal{J}_N :\ F \supset A\}$ で定義して，値域を Lebesgue の意味の $m^*$-可測集合に制限して得られる測度．有限加法的測度だが $\sigma$ 加法性が言えない.

**Borel 測度** $\sigma[\mathcal{J}_N]$ 上の（ $\sigma$ 加法的）測度．Baire の関数族 [伊藤清三, p.116] の概念を用いれば，Borel 可測集合の族の濃度は Baire 関数の族の濃度以下で，後者の濃度は連続体 $\mathbf{R}$ の濃度（[数学辞典, 441D Baire 関数]）． 特に，このことと次項に述べることから $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ Borel 測度は完備ではない.

**Lebesgue 測度** Cantor 集合 (§2.3.2) $C$ は連続体濃度を持つ測度 0 の Lebesgue 可測集合． Lebesgue 測度の完備性からその部分集合（$2^C$ の元）は全て Lebesgue 可測．$2^C$ の濃度は $C$ の濃度より大きい（Cantor 対角線論法）[82]．これは Borel 可測集合でない Lebesgue 可測集合の存在を示す．測度 0 の集合が非常に多い.

### §16.2. 素朴な積分概念の包含と一般性（数学的応用性）

#### §16.2.1. 面積（直積測度）としての積分

これら（測度）の準備をしておくと，連続関数の積分を平面領域の面積として定義するのに，もはや不都合はない；…その上，その定義を…和の列の極限として積分を表すという解析的な定義で置き換えることができる[83] (定理 100).

---

[78] この非可測集合は Lebesgue 測度の平行移動不変性にも基づくので，この話題は §15.2.1 の後に来るべきもの.
[79] [楠岡, p.87]
[80] 19960222 哲弥注.
[81] [Lebesgue, 序文]
[82] [Lebesgue, §6 (p.12)].
[83] [Lebesgue, 序文]

Lebesgue の元々の構想では $f:\ [a,b]\to\mathbf{R}_+$ が可測であるとは，$\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ が $\mathbf{R^2}$ の Lebesgue 可測集合であることであった[84]．これと同値な定義を，集合の面積（直積測度）に言及せずに与える定義として§5.1.3 の可測関数の定義が導入された．関数の性質を議論するのに便利な後者の概念が今日では可測関数の定義になっているが，前者のほうが可測関数の素朴な意味に近いだろう．簡単な場合について前者が後者を意味することを示す[85].

**定理 100** $a<b$ とする．関数 $f:\ (a,b]\to\mathbf{R}_+$ が有界な可測関数 *(§5.1.3)* ならば $S=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\mid a<x\le b,\ 0<y\le f(x)\}$ は $\mathbf{R^2}$ の可測集合 $S\in\mathcal{F}_2$ *(§2)* である．さらに，$\displaystyle\int_a^b f(x)\mu_1(dx)=\mu_2(S)$ である．

証明．[86] $0<f(x)\le L$, $a<x\le b$, とする．$\Gamma$ を $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 直積測度を構成するときの外測度 (§3)

$$\Gamma(A)=\inf_{A\subset I=\sum_n(a_n,b_n]\times(c_n,d_n]\in\mathcal{J}_2}\sum_{n\in\mathbf{N}}(d_n-c_n)(b_n-a_n)$$

とすると，$S\subset I=(a,b]\times(0,L]$ なので，命題 11 より $\Gamma(S)+\Gamma(S^c\cap I)=(b-a)L$ を言えばよい．任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}S&=\sum_{0<k\le nL}\{(x,y)\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b,\ 0<y\le f(x)\}\\&\subset\sum_{0<k\le nL}\{(x,y)\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b,\ 0<y\le \frac{k+1}{n}\}\\&=\sum_{0<k\le nL}\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\}\times(0,\frac{k+1}{n}].\end{aligned}$$

同様に

$$S\supset\sum_{0<k\le nL}\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\}\times(0,\frac{k}{n}].$$

$f$ が可測関数ならば定義によって上の式の中の $x$ の集合は $\mathbf{R}$ Lebesgue 可測集合である．外測度の単調性から

$$\begin{aligned}&\sum_{0<k\le nL}\mu_1(\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\})\cdot\frac{k}{n}\\&\le\Gamma(S)<\sum_{0<k\le nL}\mu_1(\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\})\cdot\frac{k}{n}+\frac{b-a}{n},\ \ n\in\mathbf{N}.\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{0<k\le nL}\mu_1(\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\})\cdot\frac{k}{n}$ は存在して $\Gamma(S)$ に等しい．同様に $\displaystyle\Gamma(S^c\cap I)=\lim_{n\to\infty}\sum_{0<k\le nL}\mu_1(\{x\mid \frac{k}{n}<f(x)\le\frac{k+1}{n},\ \ a<x\le b\})\cdot(L-\frac{k}{n})$ となるから，

$$\Gamma(S)+\Gamma(S^c\cap I)=L\lim_{n\to\infty}\mu_1(\{x\mid 0<f(x)\le L,\ \ a<x\le b\})=(b-a)L$$

が成り立つ．$\displaystyle\int_a^b f(x)\mu_1(dx)=\mu_2(S)=\Gamma(S)$ は上で導いた式と積分の定義から明らか． □

[84][Lebesgue, §16,17 (p.23)]
[85][伊藤清三, §12 問 4, 5 (pp.85–86, 279)], [高木貞治, §118 (p.439)], [Lebesgue, §18,19 (pp.23–26)].
[86]960119 哲弥証明.

### §16.2.2. Riemann 積分との関係

Riemann 積分 (1854) から Lebesgue 積分 (1902) へ.

> 導関数が非可積分である関数が存在する (§16.2.3) ⋯；したがって⋯積分学の基本的問題：導関数を知ってもとの関数を見いだすことは，ともかくもできない．したがって，積分の他の定義を見つけて⋯積分が微分の逆演算となっているようにしようとするのは自然なことと思われる[87].

**定理 101 ([伊藤清三, 定理 16.1, 16.2 (pp.112, 113)], [高木貞治, 定理 112 (p.443)])** *(i)* $[a,b]$ で有界な関数が *Riemann* 積分可能な必要十分条件は，関数の不連続点の集合が測度 0 であること．

*(ii)* $f$ が $[a,b]$ で *Riemann* 積分可能ならば *Lebesgue* 積分可能であって，両方の積分の値は等しい．

定理の前半の証明は [高木貞治, §120 (pp.441–443)] くらいにしか載っていない（[志賀浩二] は吉田耕作の引用ですませている.）．Riemann 積分の定義（「区間縮小法」と Darboux の上下積分），および定理の後半の証明は教科書参照 [伊藤清三, §16 (pp.111–114)]．定理後半の逆は真でない §16.2.3.

### §16.2.3. Riemann 積分に対する優位

> 「Lebesgue は一片の咒語 ‘ほとんど’ をもって，彼の積分論に魅惑的な外観を与えたのであった．[88]」といわれる．これは「閉集合は分かる」前提で零集合を Lebesgue 積分論の特徴としたのだろうか．しかし，閉集合ですら簡単ではない．Riemann 非可測な測度正の閉集合は存在する．言い換えれば a.s. に等しい関数を同一視する約束で単純化できない Riemann 非可積分な可測関数が存在する．[89]

Riemann 非可積分で Lebesgue 可積分，かつ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f = f$ が各点で成り立つ例 [90]

§2.3.1 の測度正の疎な閉集合 $E \subset I = [0,1]$．$E$ の構成で $[0,1]$ から除外した開区間の一つを $J = (a,b)$ とし，その中点を $c$ とする．

$$\phi(x) = 2x\,\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

とおく．$\phi(x-a)$ は $a$ と $c$ の間で無限回 0 となるので，$\phi(x-a) = 0$ となる $x$ で $c$ に最も近い $c$ 以下の点を $a+d$ とする．作り方から $a, b \in E$ に注意．関数 $f\colon\ [0,1] \to [-3,3]$，を

$$f(x) = 0\,,\quad x \in E,$$

および，各除外開区間 $J = (a,b) \subset [0,1] \setminus E$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x-a)\,, & x \in (a, a+d), \\ \quad 0 \quad\ , & x \in (a+d, b-d), \\ \phi(b-x)\,, & x \in (b-d, b), \end{cases}$$

で定義する．$f$ は $E^c$ で連続，$E$ の全ての点で不連続（振動の集積）．特に，不連続点の集合が測度正なので §16.2.2 より Riemann 積分不能.

$\Phi(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x})$ とおく．関数 $F\colon\ [0,1] \to \mathbf{R}_+$，を $F(x) = 0,\ x \in E$, および，$J = (a,b) \subset [0,1] \setminus E$ に対して

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x-a)\,, & x \in (a, a+d), \\ \quad \Phi(d) \quad\ , & x \in (a+d, b-d), \\ \Phi(b-x)\,, & x \in (b-d, b), \end{cases}$$

とおく.（$E$ が Lebesgue 可測なので）$f(x)$ の積分を $E$ と $E^c$ に分けられる．$f|_E \equiv 0$ と $[0,1] \setminus E$ が開区間の直和であることに注意して

[87] [Lebesgue, 序文]
[88] [高木貞治, §115 (p.430)]
[89] 960219 哲弥異論
[90] [Lebesgue, §29 (pp.37–39)].

$$\int_0^x f(y)dy = \int_{[0,x]\cap E} f(y)dy + \int_{[0,x]-E^c} f(y)dy = \int_{[0,x]-E^c} f(y)dy = \Phi(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

即ち $f$ は $[0,1]$ で Lebesgue 積分可能で，その不定積分は $F(x)$ である．

$[0,1]-E$ の各開区間では明らかに $F'(x) = f(x)$. $a \in E$ とする．$a$ が $I-E$ のある開区間の左端点ならば同様に $F(x)$ の $x=a$ での右微分係数は $0 = f(a)$. $a$ の右に $E$ の点が集積しているとする．それらの点の一つを $c$ とおく．$x > c\,(> a)$ ならば

$$\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\right| \le \frac{(x-c)^2}{x-a} \le x-a \;(\to 0, \quad x \to a).$$

よってこの場合も $F(x)$ の $x=a$ での右微分係数は $0=f(a)$. 全く同様に $a \in E$ での左微分係数も $0=f(a)$. よって $x \in (0,1)$ ならば $F(x)$ は微分可能で $F'(x) = f(x)$.

### §16.2.4. Riemann 広義積分との関係

Riemann 広義可積分で Lebesgue 積分不可能な例[91]：

$$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\,, \quad (x \ne 0), \quad f(0) = 0,$$

は $x \ge 0$ で Riemann 広義可積分で $\displaystyle\int_0^x f(y)dy = x^2\sin\frac{1}{x^2}$. しかし，正部分と負部分が単独では収束しないので 0 を含む区間では Lebesgue 積分不可能.

もっと鮮明な例は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{n}\,, & E_{2n-1} \overset{\text{def}}{=} 1 - 2\,\dfrac{1}{2^n} \le x < 1 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{2^n}\,, \\ -\dfrac{2^{n+1}}{n}, & E_{2n} \overset{\text{def}}{=} 1 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{2^n} \le x < 1 - \dfrac{1}{2^n}\,, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$, $0 \le x < 1$, とおくと $F(1-2^{-n+1}) = 0$, $F(1 - 3\cdot 2^{-n-1}) = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, かつ，間の点は線型内挿した値になる．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x) = 0$ となり，$[0,1]$ で広義 Riemann 積分可能 $\displaystyle\int_0^1 f(y)dy = 0$ である．

他方，$\displaystyle\int_{E_{2n-1}} f(x)dx = -\int_{E_{2n}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ だから，$\sigma$ 加法性と $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の存在を仮定すると，$E_k$, $k \in \mathbf{N}$, の任意の並べ替え $E_{i_k}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_{i_k}} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ とならねばならないが，左辺は絶対収束しないので並べ替えによってどんな値でも取り得ることになる．よって，$\int_0^1 f(x)dx$ は Lebesgue 積分不可能である．

Riemann 広義積分が級数の条件収束に， Lebesgue 積分が絶対収束に，それぞれ対応していることから来る違いであることが分かる．Lebesgue は幾何学的定義（面積としての積分）から出発することにより極限との可換性という robustness を守った．

## §16.3. 可測関数の普遍性

面積としての積分という素朴な概念 (§16.2.1) から可測関数の概念が派生したが，Banach 空間値関数など，値域が順序集合でない関数の積分を定義できる（[数学辞典, 373 ベクトル値積分]）ので，それが数学的に深い一般論を導くならば，抽象化された可測関数の概念の方が面積としての積分の概念より広い（普遍性・一般性）．

$f\colon\ \Omega_1 \to \Omega_2$ の積分 $\displaystyle\int f\,d\mu$. 値域 $\Omega_2$ が順序集合でなくても積分を定義できる二つの可能性（[数学辞典, 373A]）．

[91] [Lebesgue, §33 (p.45)]

**弱タイプ** 線型凡関数として定義できる．

$\Omega_2$ の dual space （$\Omega_2$ 上の連続線型凡関数 $x'$ : $\Omega_2 \to \mathbf{R}$ の全体）$\Omega_2{}'$ の任意の元 $x'$ に対して，$x' \circ f$ : $\Omega_1 \ni \omega \mapsto x'(f(\omega)) \in \mathbf{R}$ が可積分関数（実数値関数なので積分は講義の意味になる）ならば，$x^*(x') = \int_{\Omega_1} x'(f(\omega))\, d\mu(\omega)$ で $x^* \in \Omega_2{}''$ が定義できる (Gel'fand, Dunford [数学辞典, 373F])．

$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 値関数を成分に分けて定義する考え方の拡張．

**強タイプ** 値域空間のノルムに関する単関数近似で定義できる．

単関数に対しては $\int \sum c_j \chi_{A_j}\, d\mu = \sum c_j \mu(A_j)$ とする（$\Omega_2$ は Banach 空間なので $c_j \in \Omega_2$ の線型演算は OK）．$||f - f_n||$ が a.e.，かつ，$L^1$ で 0 に収束するような単関数列 $\{f_n\}$ がとれるならば $\int f_n\, d\mu$ は強収束（$||\cdots||$ で収束）し，極限は単関数列のとりかたによらない..

単関数近似で測度に帰着させる考え方の拡張．Bochner 積分など．

どちらでも，Radon–Nikodým の定理がそのままでは成り立たない．辞典の記述 [数学辞典, 373H] からの印象では，簡単な特徴付けは得られていないようである．

# 第 5 章 応用

関数解析[92]への測度・積分の応用の基礎概観．この章では紹介（それも，[伊藤清三] に載っているもの）を主目的とし，定義・証明・説明の詳細は原則として省略する．

> 関数解析の世紀である 20 世紀の，(Sato でなく）Schwarz の超関数論から常微分方程式の weak solution への進みを，堕落 と見なす向きもあります．私は堕落とは言わないけれど、よい問題の最終的な解答は関数解析の言葉を使わずに書かなければならないという意見です．Lebesgue 積分は $\sigma$ 加法性を使うための方便ではないでしょうか．[93]

## §17. $L^p$ 空間の完備性

21

技術的簡明 2：積分を用いた関数のノルムに基づく関数空間の完備性→関数解析

完備性とは，目標とする関数 $f$ に近くて解析の容易な関数を考え，目標 $f$ に近づくように列 $f_n$ をとる．そのとき極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ が考えている空間（集合）の中にある，ということが完備性．つまり，広げた網（考察対象の空間）の中に，たしかに求める関数があることを保証することで，近似列による方法を可能にする．

この節の主な目標は，大ざっぱに言うと，$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ がノルム ($L^p$ ノルム) であって，$\{f : \Omega \to \mathbf{R} \mid \|f\|_p < \infty\}$ なる関数の集合が Banach 空間（ノルムが定義する距離で完備な線形空間）であることを証明する．大ざっぱと言ったのは，非常に厳格に言えば，関数の集合ではなく，測度ゼロの集合上の違いを無視した同値類を考えなければならないから．

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を固定する．$\Omega$ での積分のときは積分範囲を省略して $\int f\,d\mu$ のように書く．

### §17.1. 準備（同値類，$L^p$ ノルム，Hölder 不等式）

$\Omega$ 上の関数 $f, g$ に対して $f = g$, a.e., ，即ち，

$$\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

であることを $f \sim g$ と書くと，$\sim$ は同値条件（反射律，対称律，推移律の成立）である．以下では，関数とは，$\sim$ で同一視を行ったものを指すことにする．即ち，ある条件を満たす関数の集合を $X$ と書くと言うときには，その条件を満たす（本来の意味の）関数の集合 $Y$ に対して，同値類 $X = Y/\sim$ を $X$ とし，その要素のことを関数と呼ぶ．従って，以下では如何なる条件もこの同一視と矛盾のない条件であることが確認されている．

**定義 27** *(i)* $p \geq 1$ に対して，$\Omega$ 上 *a.e.* に定義された実数値 $\mathcal{F}$-可測関数で，$\int |f|^p\,d\mu < \infty$ を満たすものの集合を $L^p$ $(L^p(\Omega))$ と書く．

*(ii)* $f \in L^p$ に対して，$\|f\| = \|f\|_p = \left\{\int |f|^p\,d\mu\right\}^{1/p}$ を $f$ の $L^p$-ノルムと呼ぶ．

*(iii)* $f_n \in L^p$, $n \in \mathbf{N}$, が $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ を満たすとき，$f_n$ は $f$ に $p$ 次平均収束するという．また，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x$-*a.e.*, を満たすとき，$f_n$ は $f$ に概収束するという．

*(iv)* $f, g \in L^2$ のとき $(f, g) = \int f\bar{g}\,d\mu$ と書く．($\bar{g}$ は $g$ の複素共役とすれば複素数値関数まで以下が成立.）

注．a.e. で一致する関数の同一視を行っていることに注意．実際，$f = g$, a.e., ならば $\int |f|^p\,d\mu = \int |g|^p\,d\mu$ なので，積分の値だけを問題にする以上の定義では同値類の代表元の取り方によらない．

[92]関数の集合の上の解析

[93]渡辺浩 28 Jan 96 00:05:05 より編集．

**命題 102 Schwarz の不等式** $f,\, g \in L^2$ ならば

$$|(f,g)|^2 \le \int |f|^2\,d\mu \int |g|^2\,d\mu\,.$$

**Hölder の不等式** $p>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, とする．$f \in L^p,\ g\in L^q$, ならば

$$|(f,g)| \le \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

注． (i) $f \in L^p,\ g \in L^q$ なので $|f|<\infty$, a.e., $|g|<\infty$, a.e., だから左辺の被積分関数は実数値と思って良い．積分の確定はこの証明で右辺によって（絶対値の積分が）押さえられることから．

(ii) もちろん Schwarz の不等式は Hölder の不等式の特別な場合である．

(iii) [伊藤清三, §17] では Schwarz の不等式の証明を済ませてから節末補足的に Hölder の不等式を証明する．その上，後者は直接的な短い証明なのに前者は support と高さを切断した近似関数の存在を補題とする．Schwarz の不等式に関するこれらの記述は無駄と思われるが，なぜそこにあるのか不明である．

証明. **補題 103** $a\,b \le \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ $(a\ge 0,\ b \ge 0)$.

補題 *103* の証明. $ab>0$ だけやればよい．増減表から $f(x)=x^p/p+1/q-x\ge 0$ $(x\ge 0)$ だから $x=a\,b^{-q/p}$ を代入して両辺に $b^q$ をかける．

Hölder の不等式の証明に戻る．$f\in L^p$ だから $\|f\|_p<\infty$ なので $|f|<\infty$, a.e., 従って最初から $|f|,|g|<\infty$ (即ち実数値関数) とする．$\|f\|_p=0$ ならば $f=0$, a.e., なので左辺は 0 となって，主張は無条件で成立する．よって $0<\|f\|_p\,\|g\|_q<\infty$ としてよい．

補題 103 で $a=|f(x)|/\,\|f\|_p,\ b=|g(x)|/\,\|g\|_q$ とおいて積分する．

$$\frac{1}{\|f\|_p\,\|g\|_q}\int |fg|\,d\mu \le \frac{1}{p\,\|f\|_p^p}\int |f|^p\,d\mu+\frac{1}{q\,\|g\|_q^q}\int |g|^q\,d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

より主張を得る．

次の定理は Hölder の不等式の帰結であり，$\|\cdot\|$ が三角不等式を満たすこと（ノルムになること）を意味する．

**補題 104 (Minkowski の不等式．)** $p\ge 1,\ f,g\in L^p$ ならば $\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p\,.$

証明. $|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$ より，$p>1,\ f\ge 0,\ g\ge 0$ の場合をやれば十分である．さらに，$\|f+g\|_p>0$ としてよい．$\|f+g\|_p{}^p=\displaystyle\int |f+g|^{p-1}f\,d\mu+\int |f+g|^{p-1}g\,d\mu$ の右辺各項に Hölder の不等式を適用すると，

$$\int |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu \le \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{1/q}\|f\|_p=\|f+g\|_p^{p-1}\,\|f\|_p$$

などから

$$\|f+g\|_p^p \le \|f+g\|_p^{p-1}\,(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

$\|f+g\|>0$ を仮定したので，主張を得る．

## §17.2. $L^p$ 空間の完備性．

**定義 28** *(i)* スカラー倍と和について閉じている空間（集合）を線型空間（ベクトル空間）と呼ぶ．

*(ii)* 線型空間上 $X$ に実数値関数 $\|\cdot\|$： $X \to \mathbf{R}$ が定義されていて，非負値性 ($\|f\| \geq 0$)，一意性 ($\|f\| = 0$ ならば $f = 0$)，スカラー倍 ($\|af\| = |a|\,\|f\|$)，三角不等式 ($\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$)，が成り立つとき，この空間 $(X, \|\cdot\|)$ を線型ノルム空間，$\|\cdot\|$ をノルムと呼ぶ．

*(iii)* 非負値性，一意性，対称性，三角不等式が成り立つ２変数関数を距離と呼ぶ．$\|\cdot\|$ をノルムとすると，$\rho(f,g) \overset{\text{def}}{=} \|f-g\|$ は距離である．これをノルムが定義する距離と呼ぶ．ノルムの定義のうちスカラー倍の代わりに $\|-f\| = \|f\|$, かつ，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|a_n f_n - af\| = 0$，を満たすとき $\|\cdot\|$ を準ノルムと呼ぶ．準ノルムでもノルムと同様の手続きで距離が定義できる．

*(iv)* 線型ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が，ノルムが定義する距離に関して完備なとき，$X = (X, \|\cdot\|)$ を *Banach* 空間と呼ぶ．

準ノルムの定義された線型空間 $(X, \|\cdot\|)$ が，準ノルムが定義する距離に関して完備なとき，$X = (X, \|\cdot\|)$ を *Frechét* 空間と呼ぶ．

*(v)* 共役性 ($(f,g) = \overline{(g,f)}$)，線形性 ($(af+bg,h) = a(f,h) + b(g,h)$)，非負性 ($(f,f) \geq 0$)，一意性 ($(f,f) = 0$ ならば $f = 0$）を満たす２変数関数 $(\cdot,\cdot)$ を内積と呼ぶ．内積から $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ で定義される $\|\cdot\|$ はノルムである．内積が定義された線形空間で内積が定義するノルムに関して *Banach* 空間になっているものを *Hilbert* 空間と呼ぶ．

Lebesgue 積分の Riemann 積分に対する最大の利点の一つが，$L^p$ の完備性である．$L^p$ ノルム有限関数の $L^p$ ノルムによる極限が $L^p$ ノルム有限になる，ということ．Riemann 積分では極限と積分の順序交換が無条件では許されない[94]．

**定理 105** $(L^p, \|\cdot\|_p)$ は *Banach* 空間である．

証明．三角不等式は 補題 104．完備性だけが自明でない．

$\{f_n\}$ を $L^p$ の中の Cauchy 列とする，即ち，$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$．$n(k)$, $k = 1,2,3,\cdots$, を単調増加で $\left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $n > n(k)$, となるようにとれるので，特に，$\left\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $k = 1,2,3,\cdots$. $\tilde{f}_k = f_{n(k)}$, $k = 1,2,3,\cdots$, とおく．$g_n = |f_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j| \ \in L^p$ とおくと，各点で非負値単調増加で，各点での複素数の三角不等式と $\tilde{f}_n$ の取り方から $\|g_n\|_p \leq \left\|\tilde{f}_1\right\|_p + 1$．単調収束定理から

$$\left\|\lim_{n\to\infty} g_n\right\|_p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p \leq \left\|\tilde{f}_1\right\|_p + 1 < \infty$$

が存在．即ち，$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ が a.e.-$x$ で存在（各点で増加だから）して有限，しかも，$g \in L^p$. $|g(x)| < \infty$ から $\tilde{f}_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$ は a.e.-$x$ で絶対収束して $|f| \leq g$, a.e., 即ち $f \in L^p$. $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq g(x)$ なので，優収束定理 (定理 56) が使えて，$\lim_{n\to\infty} \left\|f - \tilde{f}_n\right\|_p = 0$ を得る．

$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p \leq \lim_{n,k\to\infty} \left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p + \lim_{k\to\infty} \|f_n(k) - f\|_p$ となるから，主張を得る．[95]

[94]極限と積分の順序交換については，Lebesgue の収束定理 定理 56 によって，積分可能関数で押さえられていれば積分可能関数の極限が必ず積分可能になることは既に述べた．Riemann 積分ではこれは保証されない．系 58 のあとの注の中の例:$m,n \in \mathbf{N}$ に対して，$\cos^{2n}(\pi m! x)$ は $[0,1]$ の連続関数だから,（Riemann の意味でも Lebesgue の意味でも）積分可能．しかし，極限 $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x))$ は $x$ が有理数のとき 1，無理数のとき 0 となり，0 と 1 どちらの値をとる点も稠密に存在するから Riemann 積分不能である．

但し，この例は各点収束極限の例だから $L^p$ 収束が問題になっているここでの例としては不適切．たしか，連続関数の $L^p$ 極限は不連続点の集合の閉包は測度 0 ではなかったか？

[95]以上の証明 ([伊藤清三]) は関数列を級数に書き直して 系 58 に帰着させている．

**系 106** $f_n \in L^p$, $n \in \mathbf{N}$, かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ ならば，適当な部分列をとって $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) = f(x)$, *a.e.-x*, とできる．

即ち $L^p$ 収束していれば，概収束する部分列が取れる．

証明．定理 105 の証明で次の性質を持つ部分列 $n(k)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, の存在が言えている：

(i) $\exists \tilde{f}$; $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n(k)} = \tilde{f}$, a.e.,

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left\| \tilde{f} - f_{n(k)} \right\|_p = 0$.

$$\left\| \tilde{f} - f \right\|_p \le \left\| \tilde{f} - f_{n(k)} \right\|_p + \left\| f_{n(k)} - f \right\|_p \to 0 \ (k \to \infty),$$

だから $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n(k)} = f$, a.e.. □

**練習問題 ([伊藤清三, §22 問 1,2])．**

(i) $\mu(\Omega) < \infty$ ならば $1 < p < p'$ のとき $L^{p'} \subset L^p$ を証明せよ．

（ヒント．$\|f\|_p \le \|f\|_{p'}$ を証明することと同値．$f \mapsto f^p$ と $g = 1$ から $f^{p'}$ が出てくるように Hölder の不等式を使う.）

(ii) (a) $\mathcal{E} = \{\chi_A \mid \mu(A) < \infty\} \subset L^p$ は $L^p$ ノルムに関して閉集合であることを証明せよ．

（略解．$L^p$ ノルムで $\phi \in L^p$ に収束する $\mathcal{E}$ の列 $\chi_{E_n}$, $n \in \mathbf{N}$, があると，系 106 より $\phi$ に概収束する部分列 $\chi_{E_{n(k)}}$ がある．概収束で $\chi_A$ の値域は $\{0, 1\}$ だから，$\phi \in \{0, 1\}$, a.e.. 即ち，$E = \{\phi = 1\}$ とおけば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \chi_{E_{n(k)}} = \chi_E$, a.e.. $\phi \in L^p$ なので $\mu(E) < \infty$ だから $\phi = \chi_E \in \mathcal{E}$.）

(b) 完備距離空間の閉集合は（同じ距離に関して）完備であることを証明せよ．

（略解．コーシー列が元の空間で収束するが，閉集合なので極限を含む.）

(c) $f \in L^1$ に対して $F_f:\ E \to \mathbf{R}$ を，$\phi \in E$ に対して $F_f(\phi) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\phi(x)\, d\mu(x)$ とおいて定義すると，$F_f$ は $E$ 上の連続関数である．

（略解．$\|\chi_{A'} - \chi_A\|_p = \mu(A' \oplus A)^{1/p}$ なので，$\chi_{A'} \to \chi_A$ ($L^p$ 収束) と $\mu(A' \oplus A) \to 0$ は同値．また，$\mu(E) \to 0$ のとき $\int_E |f|\, d\mu(x) \to 0$ が積分の絶対連続性から言える．ヒント．近似増大単関数列 $f_n \nearrow |f|$ をとり，$\Omega$ での積分が近くなるよう $n$ を大きく固定．$\int_A |f|\, d\mu$ を $\int_A f_n\, d\mu$ で近似できるが，単関数では $\sup f_n < \infty$ に注意して $\mu(A)$ で評価.

よって，$\|\chi_{A'} - \chi_A\|_p \to 0$ のとき，

$$|F_f(\chi_{A'}) - F_f(\chi_A)| \le \int_\Omega |f(x)|\, |\chi_{A'}(x) - \chi_A(x)|\, d\mu(x) \le \int_{A' \oplus A} |f(x)|\, d\mu(x) \to 0.$$

）

**$L^\infty$．** $p = \infty$ に相当する空間も Banach 空間になる[96]

**定義 29** 可測関数 $f$ が本質的に有界とは，ある $a$ に対して $|f(x)| \le a$, *a.e.-x*, が成り立つこと．これが成り立つ $a$ の下限を $ess.\ sup_{x\in\Omega}|f(x)|$ と書いて本質的上限と呼ぶ．

本質的に有界な関数全体を $L^\infty$ と書く．今まで通り，*a.e.* 一致の同値類で関数を考える．

**命題 107** $\|f\|_\infty = ess.\ sup_x|f(x)|$ はノルムになり，$(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ は *Banach* 空間になる．

[96] [伊藤清三, §23 (p.167)] で $M$ と書かれている空間．このあと，§24 で $\mathbf{R^N}$ の場合に全く別の空間を $L_\infty$ と呼んでいるが，これから導入する $L^\infty$ とは別のもの．

これ以後の議論の一つの典型は，考察の対象となる関数の空間を考え（例えば，微分方程式が成り立つ関数の集合），その中で性質のよい関数だけからなる部分空間をとり，部分空間で求める性質を証明し，かつ，部分空間が元の空間で稠密であることを証明して，極限移行する，というものである．

さらに $\mu(\Omega) < \infty$ のときは確率空間の議論が可能になる．以下に例示する．$\mu(\Omega) = \infty$ のときは，先に support の有界な関数に制限してその稠密性を証明し，$\mu(\Omega) < \infty$ に帰着させる方法が，一つの戦術である．

**確率収束**　有限な測度（特に確率測度）で特に有効なもう一つの収束．

**定義 30**　*(i)* 可測関数列 $f_n,\ n \in \mathbf{N},$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| > \epsilon) = 0$ を満たすとき，$f_n$ は $f$ に漸近収束（確率収束）するという．

*(ii)* $\mu(\Omega) < \infty$ のとき，$\Omega$ 上 *a.e.* に定義された実数値 $\mathcal{F}$-可測関数の全体を $S = S(\Omega)$ と書く．$f \in S$ に対して準ノルム $\|f\|_S = \displaystyle\int \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$ を定義する（三角不等式は $\dfrac{a+b}{1+a+b} \le \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$ から）．

**定理 108** $\mu(\Omega) < \infty$ のとき，$\{f_n\}$ が $f$ に確率収束することと $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_S = 0$ は同値．

証明．$x/(1+x)$ は $x \ge 0$ で単調増加，1 を越えない．$\|f_n - f\|$ の積分領域を $A_{n\epsilon} = \{|f_n - f| > \epsilon\}$ と補集合に分け，$A_{n\epsilon}$ では $x/(1+x)$ を 1 で，補集合では $x = \epsilon$ で評価．確率収束は $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n\epsilon}) = 0,\ \epsilon > 0,$ と同値だから証明が終わる．

**定理 109**　*(i)* $\mu(\Omega) < \infty$ ならば，概収束すれば確率収束する．

*(ii)* $L^p$ 収束すれば確率収束する．

*(iii)* 確率収束すれば概収束する部分列がとれる．

証明．　(i) 有界収束定理 系 59 を使う．

(ii) 定理 108 の $S$ 収束から確率収束の証明と同様．

(iii) 命題 3 を適用すれば，$\mu(E_k) < 2^{-k},\ E_k = \{|f_{n(k)} - f| > 2^{-k}\},$ なる部分列 $n(k)$ が求めるものである．

**定理 110** $(S, \|\cdot\|_S)$ は *Fréchet* 空間である．

証明．定理 109 (iii) の $n(k)$ をとり，定理 105 の証明と同様に $f$ を構成する．

## §18. 畳み込みと急減少関数

関数空間論の大きな目的の一つに偏微分方程式論がある．畳み込み，特に，微分についての性質がよい関数による近似を目的とする畳み込みが重要な戦術になっている．簡単のため，以下，$\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ とする．

**定義 31** $f \in L^1$ *($L^2$)*, $g \in L^1$, のとき $f \otimes g(x) = \displaystyle\int f(x-y)\,g(y)\,dy\ \in L^1$ *($L^2$)* をたたみこみ *(convolution)* と呼ぶ．( $L^1$, $L^2$ にこだわらず，積分が存在するような組み合わせで考えてよい.）

**命題 111 (Young の不等式)** $p = 1$ または 2 に対して，$\|f \otimes g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$.

注．構成論的場の理論では Young の不等式が以下のように拡張されて用いられたことがある：$p^{-1} + q^{-1} = s^{-1} + t^{-1} = u^{-1} + v^{-1} = 1,\ w^{-1} + sr^{-1} = 1,$ ならば

$$\|f \otimes g\|_r \le {\|f\|_{r/u}}^{1/u} {\|f\|_{ws/v}}^{1/v} {\|g\|_{r/p}}^{1/p} {\|g\|_{t/q}}^{1/q}.$$

**Weierstrass の多項式近似**　$L^p(\mathbf{R}^\mathbf{N})$ の稠密な部分空間の例として，閉集合（例えば $\Omega = [a,b] \subset \mathbf{R}$）上の連続関数の全体 $C[a,b]$ またはその部分空間（例えば $\{f \in C[a,b] \mid f(a) = f(b)\}$）を考えることができる．$L^p$ のときと同様，次の定理も標準的である．

**定理 112** 連続関数の全体 $C[a,b]$ は $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ $(= \|f\|_\infty)$ で *Banach* 空間になる．言い換えると，有界閉区間の連続関数は一様連続である．

**定理 113 (Weierstrass の多項式近似)** 多項式の全体は $\|\cdot\|$ に関して $C[a,b]$ で稠密である．

証明．[伊藤清三, p.176] では $\sqrt{\pi t}^{-1} e^{-x^2/t}$ との畳み込みを利用して証明しているが，この定理は確率論によるエレガントな証明が存在する [西尾, 一章 §4 (p.24)]．$f \in C[a,b]$ の一様連続性と，Bernoulli の大数の法則を用いて，$p$-硬貨投げの平均 $M_n$ に対して $|\mathrm{E}[\, f(M_n) - f(p)\,]|$ を上から $\|f\|$ と小さい定数の和で評価する．$nM_n$ が 2 項分布に従うことから $\mathrm{E}[\, f(M_n)\,]$ が $p$ の多項式 (Bernstein 多項式) で書ける．[高木貞治, §78 (p.284)] に Bernstein の方法として紹介されているのは，確率論による証明である．

**急減少関数**　定理 113 の [伊藤清三, p.176] の証明で $\sqrt{\pi t}^{-1} e^{-x^2/t}$ との畳み込みを考えるのは，元の関数を微分についての性質がよい関数に変換する戦術である．微分に関する性質のよい空間として急減少関数の空間がある．

**定義 32** $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ 上の無限回連続微分可能な関数 $f$ が急減少であるとは，任意の $p \in \mathbf{Z}_+$ と任意の $p$ 次偏微分演算子 $D^p$ と任意の $p \in \mathbf{Z}_+$ に対して $\lim_{|x|\to\infty} |x|^m |D^p f(x)| = 0$ が成り立つことをいう急減少関数の全体を $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^\mathbf{N})$ と書く．

$\mathcal{S}$ の要素のうちで特に有用なのが,（恒等的にゼロでない）無限回微分可能で台の有界な非負値関数 $h$ である．

**定義 33** $\{x \in \Omega \mid h(x) \neq 0\}$ の閉包を $h$ の台 *(support)* と呼ぶ．

（恒等的にゼロでない）無限回微分可能で台の有界な非負値関数 $h$ を考える．（例えば $h(x) = \exp(-(1-|x|)^{-1})\chi_{[-1,1]}(x)$.）適当に定数倍することで $\int h(x)\,dx = 1$ としておいてよい．$\delta > 0$ に対して $h_\delta(x) = h(x/\delta)/\delta$ で $h_\delta \in \mathcal{S}$ を定義する．

注．$h_\delta$ は $\delta \to 0$ で Dirac のデルタ関数に（超関数の空間の中で）収束する．そのことが $h$ の有用性の背景にある．

**定理 114**　*(i)* $f$ が有界な台を持つ連続関数，$g \in \mathcal{S}$，ならば $g \otimes f \in \mathcal{S}$.

*(ii)* $f$ が有界な台を持つ連続関数とすると，$\lim_{\delta\downarrow 0} \|h_\delta \otimes f - f\|_\infty = 0$, かつ，$\lim_{\delta\downarrow 0} \|h_\delta \otimes f - f\|_p = 0$, $p \geq 1$.

*(iii)* 任意の $p \geq 1$ に対して $\mathcal{S} \subset L^p$, かつ，$\|\cdot\|_p$ に関して稠密.

*(iv)* $f \in L^1$ であって，任意の $g \in \mathcal{S}$ に対して $\int f\, g\, dx$ ならば $f(x) = 0$, *a.e.*

畳込みや後述の Fourier 変換は（関数を別の関数に変換し，線型性を持ち，有界（＝連続）性を持つので）有界線型作用素と呼ばれる．この記述が意味を持つためには，考察の対象の関数空間を指定しないといけないが，有界性や連続性の定義と共に割愛する．ここから先は関数解析という分野の教科書で体系的に勉強すべきであろう．

## §19. Hilbert 空間

$H$ を線型空間とする. 22

**定義 34** $(\cdot,\cdot):\ H\times H\to\mathbf{R}\ (\mathbf{C})$ が, 非負値性 $((f,f)\ge 0)$, 一意性 (等号は $f=\chi_\emptyset$), 対称性 $((f,g)=\overline{(g,f)}$, $\overline{x}$ は複素共役), 線型性, を満たすとき内積と呼ぶ.

$\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ はノルムになり, Schwarz の不等式が成立する.

**定義 35** 内積の定義された空間 $H$ に対して, ノルム $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ に関して $H$ が完備なとき $(H,\|\cdot\|)$ を *Hilibert* 空間と呼ぶ.

$L^2$ は Hilbert 空間である.

Hilbert 空間は Banach 空間だから,(ノルムの連続性を含め) Banach 空間の性質を全て持つ. その上内積が定義されているから,(内積の連続性に始まって) 極めて多くの性質がある. とりわけ重要なのが, 基底という概念と相対空間の概念だと思う. 後者については関数解析から超関数の理論に至る分野を参照. [伊藤清三, §27] では前者を紹介している.

**定義 36** *(i)* $f,g\in H$ が直交するとは $(f,g)=0$ ということ.

*(ii)* $S\subset H$ が直交系であるとは, $f,g\in S$ に対して $f\neq g\Rightarrow(f,g)=0$ を満たすことをいう.
$S$ が正規直交系であるとは, 直交系であって, $f\in S\Rightarrow(f,f)=1$ であることをいう.

*(iii)* 有限集合 $S\subset H$ が一次独立(線型独立)とは

$$\sum_{f\in S}a_f f=0,\ a_f\in\mathbf{C},\ f\in S\ Longrightarrow\ a_f=0,\ a_f\in\mathbf{C},$$

を満たすことをいう. 一次独立でないとき一次従属(線型従属)という.

一般に $S\subset H$ が一次独立とは $S$ の任意の有限部分集合が一次独立なときをいう.

**命題 115 (Schmidt の直交化)** $H$ を *Hilbert* 空間とする. 可算部分集合 $S=\{f_1,f_2,\cdots\}\subset H$ が一次独立ならば, $g_1=f_1/\|f_1\|$,

$$g_n=\frac{f_n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(f_n,g_k)\,g_k}{\left\|f_n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(f_n,g_k)\,g_k\right\|},\ n=2,3,4,\cdots,$$

で帰納的に定義される $\{g_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ は正規直交系をなす.

**定義 37** *Hilbert* 空間 $H$ と正規直交系 $\{f_n\}$ が与えられたとき, $g\in H$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}}(g,f_n)\,f_n$ を *Fourier* 級数といい, $(g,f_n)$ を ($g$ の $n$ 次) *Fourier* 係数という.

Fourier 級数がいつ如何なる意味で $g$ に等しいかが問題になる.

**定理 116 (Riesz–Fisher)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ なる任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}}a_n\,f_n$, $a_n=(g,f_n)$, $n\in\mathbf{N}$, を満たす $g\in H$ が存在する.(即ち $H$ の *Fourier* 型級数は係数が $\ell^2$ に入っていれば収束する.)

**定理 117 (Bessel の不等式)** 任意の $g\in H$ に対して $sum_{n=1}^{\infty}|(g,f_n)|^2\le\|f\|^2$.

定理 116 と 定理 117 から Fourier 級数は $H$ の中で収束する.

**定義 38** 直交系が完全であるとは，系のどの要素とも直交する $H$ の要素は 0 に限るときを言う．

**命題 118** 正規直交系 $\{f_n\}$ に関して以下の命題は同値である．

*(i)* $\{f_n\}$ は完全．

*(ii)* 任意の $g \in H$ が $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\, f_n$ の形に書ける．（このとき，$a_n = (g, f_n)$ となる．）

*(iii)* *Parseval* の等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |(g, f_n)|^2 = \|f\|$ が成り立つ．

*(iv)* 任意の $g \in H$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ と複素数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ があって，

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \right\| < \epsilon$$

とできる．

## §20. Fourier 変換 23

以下，$\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ とし，$i = \sqrt{-1}$ とおく．

**定義 39** $f \in L^1$ の *Fourier* 変換とは $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上の関数

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) = \int \exp(-2\pi i \xi \cdot x)\, f(x)\, dx,\ \xi \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

のことを言う．

$$= (\mathcal{F}^* f)(x) = \int \exp(2\pi i \xi \cdot x)\, f(\xi)\, d\xi,\ x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

を共役 *Fourier* 変換，または，*Fourier* 逆変換という．

**命題 119** $\left\| \hat{f} \right\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

**命題 120** $f \in \mathcal{S}$ ならば $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Fourier 変換はかけ算演算子と微分演算子の役割を交換する．$\mathcal{S}$ 上ではこのことは積分記号下の微分と部分積分を使って証明できる．

**定義 40** 連続関数で，$\{x \mid |f(x) \geq \epsilon\}$ が，任意の $\epsilon > 0$ に対して有界なもの全体を，$L_\infty$ と書く．

**命題 121** *(i)* $L_\infty$ は $\|\cdot\|_\infty$ に関して完備．

*(ii)* $\mathcal{S}$ は $L_\infty$ の中で $\|\cdot\|_\infty$ に関して稠密．

**定理 122 (Riemann–Lebesgue)** $f \in L^1$ ならば $\hat{f} \in L_\infty$．特に，$\displaystyle\lim_{\xi\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

証明．$\mathcal{S}$ が $L^1$ の中でも $L_\infty$ の中でも稠密であることを使う．

Fourier 変換の利点の一つは畳み込みが積に変換されることである．

**定理 123** $f, g \in L^1$ ならば $\widehat{f \otimes g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.

線型演算子としての Fourier 変換の重要性の一つは，Fourier 変換が $L^2$ に拡張できて，Fourier 逆変換が逆演算になっていることである．これは次のように証明される．

(i) $f \in \mathcal{S}$ ならば，$\hat{f} \in \mathcal{S}$ であって，$\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^*f = f$．特に，$\{\mathcal{F}f \mid f \in \mathcal{S}\} = \{\mathcal{F}^*f \mid f \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}$.

(ii) $\{\hat{f} \mid f \in L^1\}$ は $L_\infty$ の中で稠密.

(iii) $f \in L^1$, $g \in \mathcal{S}$ ならば $(f,g) = (\hat{f},\hat{g})$.（Fubini を使う.）特に，$f \in L^1$, $\hat{f} = \chi_\emptyset$ ならば $f = \chi_\emptyset$, a.e.

(iv) 以上から，Fourier 変換は $\mathcal{S}$ を自分自身の上に写す変換であって，Fourier 逆変換と互いに逆写像であり，$\mathcal{S}$ を Hilbert 空間 $L^2$ の稠密な部分空間と見たとき，内積を保存するので，$L^2$ ノルムを保存する．このことから，Fourier（逆）変換は $L^2$ に一意的に拡張される.（有界線型作用素の一般論であるが，直接 $L^2$ の $\mathcal{S}$ 近似によって証明できる.）拡張された作用素も同じ記号で表す．以上の性質が保存することも分かる．内積の保存はノルムの保存から，

$$(f,g) = 4^{-1}(\|f+g\|_2{}^2 - \|f-g\|_2{}^2 + i\|f+ig\|_2{}^2 - \|f-ig\|_2{}^2 +)$$

によって得る．これが $L^2$ から自分自身の上への写像であることも $\mathcal{S}$ の $L^2$ の中での稠密性から分かる．

$L^2$ に拡張された Fourier 変換も次の意味で積分で書ける．

**定理 124 (Plancherel)** $f \in L^2$ ならば，

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \lim_{n\to\infty}\int_{|x|<n} \exp(-2\pi i\xi\cdot x)\, f(x)\, dx \in L^2$$

が $L^2$ 収束の意味で存在し，$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$．$\mathcal{F}$ は $L^2$ を自分の上に一対一に写し，逆写像は $L^2$ 収束の意味で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|<n} \exp(2\pi i\xi\cdot x)\, f(x)\, dx$$

である．特に，$f \in L^1 \cap L^2$ ならば積分範囲は最初から $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 全体にとることができる．

証明は次の順序で行われる．

(i) $f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, $p = 1, 2$, となる列が $\mathcal{S}$ の中にとれる.（個々の空間における稠密性の証明と同じ.）

(ii) $f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\mathcal{F}f(\xi) = \int \exp(-2\pi i\xi\cdot x)\, f(x)\, dx$, a.e. ここで，左辺は $\mathcal{S}$ で積分で定義されたものを稠密性の議論によって $L^2$ に拡張したものであり，左辺は $L^1$ での Fourier 変換の定義である．($(L^1 \cap L^2) \setminus \mathcal{S}$ での一致を言わないといけない.)

(iii) あとは $f \in L^2$ に対して $f\,\chi_{|x|<n}$ を考えればよい．

Fourier 変換の基礎的な応用として次がある．

**定理 125 (Poisson summation formula)** $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f$ があって，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+m)$ が $[0,1]$ で一様かつ絶対収束し,（このとき $f \in L^1$ となって,）$sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ が絶対収束すれば

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \hat{f}(m)\,.$$

24

**定義 41** *(i)* $f:\ \mathbf{R}\!\to\!\mathbf{C}$ が正の定符号関数であるとは，$x = 0$ で連続であって，任意の $N \in \mathbf{N}$ と任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ と任意の複素数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，$\displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} a_p\bar{a}_q f(x_p - x_q) \geq 0$ が成り立つこと．

*(ii)* 測度空間 $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{B}_N, \mu)$ に対して $E \in \mathcal{B}_N$ が $\mu$ に関する連続集合であるとは $\mu(\bar{E} - E^o) = 0$ が成り立つこと（$\bar{E}$, $E^o$ はそれぞれ $E$ の閉包と内点の集合）．

**定理 126 (Bochner の定理, Levy の反転公式)** *(i)* $f$ が正の定符号関数ならば $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{B}_N)$ 上の測度 $\mu$ で $f(x) = \displaystyle\int \exp(2\pi i \xi \cdot x)\, d\mu(\xi)$ を満たすものが存在する.

*(ii)* 有限区間 $I = \displaystyle\prod_{k=1}^{N} (a_k, b_k]$ が $\mu$ に関する連続区間ならば

$$\mu(I) = \lim_{c \to \infty} \int_{[-c,c]^N} f(x) \prod_{k=1}^{N} ((-2\pi i x_k)^{-1} (e^{-2\pi i b_k x_k} - e^{-2\pi i a_k x_k}))\, dx\,.$$

# §A. 可測関数の合成に関する教科書のとある表について

[伊藤清三, p.73, §11] に次の表がある．この表の意義について山田裕二先生より疑問の表明を受けたので，

| $y=f(x)$ | $z=g(y)$ | $z=g(x)\equiv g(f(x))$ |
|---|---|---|
| $B$-可測 | $B$-可測 | $B$-可測 |
| $L$-可測 | $B$-可測 | $L$-可測 |
| $B$-可測 | $L$-可測 | 可測性は不定 |
| $L$-可測 | $L$-可測 | |

問題を整理する． §5.1.3 も参照のこと．

$X=B$ または $X=L$ に対して [伊藤清三] の $X$-可測関数の定義は，全ての $a\in\mathbf{R}$ に対して $\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)>a\}\in\mathcal{X}$ となることであった．ここで，$X=B$ のとき $\mathcal{X}=\mathcal{B}_1$ (Borel 可測集合族)，$X=L$ のとき $\mathcal{X}=\mathcal{F}_1$ (Lebesgue 可測集合族)．このことを $f^{-1}(\mathcal{I})\subset\mathcal{X}$ と書く．但し，$\mathcal{I}\overset{\mathrm{def}}{=}\{\{y\in\mathbf{R}\mid y>a\}\mid a\in\mathbf{R}\}$.

今，記号の簡単のために，$f$ の値域として $\pm\infty$ はとらないことにすれば，$\mathcal{I}$ が生成する $\sigma$-加法族は $\sigma[\mathcal{I}]=\mathcal{B}_1$ である． 命題 35 より，上記の $X$-可測関数の定義は

(69) $f^{-1}(\mathcal{B}_1)\subset\mathcal{X}$

と同値である.（値域に $\pm\infty$ を許しても §5.1.3 の記号や議論を繰り返せばよいので以下の議論は変わらない.）

すると，表 A の第 1 行は (69) を用いて

$$h^{-1}(\mathcal{B}_1)=f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{B}_1))\subset f^{-1}(\mathcal{B}_1)\subset\mathcal{B}_1$$

のように簡単に証明できる．第 2 行も同様である．また，

(70) $g^{-1}(\mathcal{Z})\subset\mathcal{Y}$

および $f^{-1}(\mathcal{Y}')\subset\mathcal{X}$ なる関係があるときに

(71) $\mathcal{Y}\subset\mathcal{Y}'$

ならば

(72) $(g\circ f)^{-1}(\mathcal{Z})\subset\mathcal{X}$

だが，(71) が成り立たなければ (72) も自動的には保証されないことに注目すれば，$\mathcal{B}_1$ は $\mathcal{F}_1$ より真に小さい集合族であることが知られているから，表の残りの行も特筆すべき内容でないことになる．

複数の $\sigma$-加法族に基づく合成関数の可測性を論じるならば，(70) のように値域に関しても一般化した形で可測関数を定義して論じるのが自然である．値域に対しては Borel 可測集合族のみを考えて表 A を書くことの意義に疑問が生じるのはその意味で自然であると考える．

# 参考文献

[数学辞典] 日本数学会編, 岩波数学辞典第３版, 1985, 岩波書店.

[荒川恒男] 荒川恒男[97], （講義ノート）. [伊藤清三] 準拠の講義ノート.

960603 注釈追加：この講義録は学生諸君の便宜を考えて公開しているが，一番丁寧に読んで下さっているのは教員諸氏であるらしいことが判明したので,「最もすばらしい講義ノートである.」と書いておく (笑). 正直なところ，私にとっては講義準備を急遽仕上げるために，最初のうちもっとも参考にさせて頂いた，恩義あるノート.

971221 注釈追加：荒川先生に対する批評が甘い，としかられ続けているが，立教大学数学科教員諸氏にもっともよく読まれているらしいことが分かってしまったあとでは何を書いても今更本音とは思ってもらえないから，ご容赦いただきたい．でも，１年半前の注釈最後の文は本当に本音.

1–4 章 18 回 (03–20)↔ pp.11–112(5.7 頁/回)

[Cacoullos] T. Cacoullos, Exercises in Probability, Springer-Verlag.

[伊藤清三] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 1963, 裳華房（数学選書 4）. [高木貞治] と比べると，(i) 可測集合の Lebesgue の定義を排除して Carathéodory の定義のみとする，(ii) 面積（直積測度）としての積分も排除する，(iii) $\mathbf{R^n}$, $n \geq 2$, の密度定理を排除して Vitali 被覆定理を経由しない $n = 1$ の場合のみとする，(iv) 実数上の Lebesgue 測度を早い目に登場させる，(v) Lebesgue 非可測集合を書く，(vi) 関数空間まで書く，という点で独自性を持たせている．(iii)–(vi) は適切だが，(i)(ii) については [高木貞治] のほうが Lebesgue の着想が分かりやすく，適切だと思う．また，零集合，Baire の関数類，$n = 1$ の場合の密度定理，などは [高木貞治] に引きずられて残した感がある．[河田三村] が直積測度を最後に持ってきているのに比べて，早い段階で出しているのに，(ii) を排除したのも哲学が感じられない.

960603 注釈追加：(iv) のことを考えるとこの方針が講義としては最善の（やむをえない？）選択であるとの意見を楠岡成雄先生から頂いた．三村征雄や高木貞治などのように抽象的な一般論を先にまとめてやろうとすると初学者は挫折しやすいし，Lebesgue 測度の構成を避けて測度空間の例を増やすと,「普通の」積分になかなか行きつかないという意味.

pp.16–158 (8 頁/回)

[飛田武幸] 飛田武幸, ブラウン運動, 1975, 岩波書店.

[一松] 一松信，解析学序説上巻，裳華房．[伊藤清三, p.134] に引用されている.

[河田三村] 河田敬義, 三村征雄, 現代数学概説 II, 1965, 岩波書店（現代数学 2）. 一般論から始める点 [高木貞治] と同様で，より一般化志向が強い．Jordan の有限加法的測度，内測度，正則測度，Lebesgue 非可測集合，可測関数の漸近収束，無限積空間，と詳しい．関数空間の章もある．哲学的に [高木貞治] と異なるつもりがないことは§22 終わり「高木先生が言われているように…」にもうかがわれる．思想を [高木貞治] に任せて徹底化した教科書.

[小針] 小針あき宏, 確率・統計入門, 岩波書店. 日見

[楠岡] 楠岡成雄, 確率と確率過程, 岩波書店（岩波講座応用数学 基礎 13）. 960603 注釈：楠岡氏の著作について一般に言えると思うが，短く要領よくまとまっていて，確率論の一番面白いところを熟知している著者が書いている感じがはっきり出ている．測度論や確率論を既に **十分に** 勉強した研究者が，自分の知識の整理と検証と再考察のために読むのに適した本．971221 注釈：この講義録を（本来の想定対象である学生諸君よりも）熱心に読んで下さっているらしい，立教大学数学科教員有志方から,「荒川・楠岡両先生への書評だけは甘い」とのご指摘を頂いた．が，本当に 960603 の注釈は甘いだろうか？

[97] 960608. 恐れ多くも荒川大先生の御名前を間違えていたとの指摘を落合啓之先生より頂きました．お詫びの上訂正いたします.

[Lebesgue] H. Lebesgue (吉田・松原訳), 積分・長さおよび面積, 共立出版（現代数学の系譜 3）,（原著 1902）. 測度の基本に関してはほぼ現代まで通用する思想を包含．可測関数の概念的優位性が見えないことや，加法的集合関数以後の微分との関係が弱いのは時代として仕方がない．他方，[高木貞治] を含めてどの教科書にも書かれていない測度正の疎な閉集合，およびその応用としての，Riemann 非可積分で Lebesgue 可積分かつ不定積分の微分が元に戻る（a.e. でなく各点で）関数の例がある．これは，Lebesgue の高さというよりはむしろ，日本の教科書が全て [高木貞治] に引きずられていることを暗示していると私は思う.

[西尾] 西尾真喜子, 確率論, 実教出版. 確率論の初学者向け教科書の決定版.

[志賀浩二] 志賀浩二, ルベーグ積分 30 講, 1990, 朝倉書店（数学 30 講シリーズ 9）. 最後の節の Hausdorff 測度以外は配列も含めてほぼ [河田三村] の部分集合．最後の節も表題の位相的外測度は Borel 測度のこと．はしがきに「その（ルベーグ積分の）内蔵する深い性格を明らかにしてみたい」,「その（現代数学の）高みから一度下りてみようとすると，結局，行きつく先は，ごく素朴な面積概念」とあって，また,「ルベーグの構想」などの節の題を見ると，原点に戻って思想的反省を加えたと言っているようだが，例えば，[Lebesgue] にあって [高木貞治] を含めてどの教科書にも書かれていない測度正の疎な閉集合がここにも書かれていない．他方，[高木貞治] が取り上げた零集合は節がある．結局，思想的には [高木貞治] を越えていない．昔よく勉強した人が独自の数学観であると信じて，昔の教科書の内容を現代に売れるように工夫して書いた本と見える．960620 追記：命題 11 の証明の脚注も参照.

[州之内] 州之内治男, ルベーグ積分入門, 1974, 内田老鶴圃. 可測関数と積分の定義を先にして測度を後回しにしている．測度の概念に苦労した人が，避けて通ることをめざした意欲作と見える．積分論だけでなく測度論そのものに数学的一般性があるので，現時点では意欲作以上ではない.

[高木貞治] 高木貞治, 解析概論, 1938, 岩波書店, 第 9 章 ルベーグ積分. 記述や記号は古めかしく $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 上の Lebesgue 測度が一般論の後回しになっているなどの点で [志賀浩二] や [伊藤清三] に比べて現代的でなく，[河田三村] などと比べて説明が少なく読者に多くの想像を要求する点が教科書的でないが，思想的には今もって新鮮.

[渡辺信三] 渡辺信三, 確率微分方程式, 1975, 産業図書（数理解析とその周辺 9）.

## 講義

解析学 I (CA013) 数学科３年　必修　通年　４単位．担当：服部哲弥（６号館２階研究室）．成績評価主に試験，詳講義中．講義の誤りを即座に指摘してくれた場合は加点する．

## 荒川ノート目次