

数学基礎 1 イントロ (講義内容宣伝)

この講義は半年，週 1 回 90 分の数学の基礎の一つ (微積分学) の講義です．この文書はその講義で半年後にどういうことが分かるようになる (はず) か，を紹介します．

全体の構成． 数学基礎 1 は一言でまとめると 1 変数関数の微積分学の講義です¹．大きく 3 つの部分に分けることができます．

- (1) 極限．
- (2) 微分．
- (3) 積分．

いずれも，高校時代に勉強したはずの概念です．従って，「何が違うのか？」が気になると思います．以下，それぞれの部分に分けて，どういう問題意識の講義かを説明します．

極限． 極限と言われて最初に思い浮かべるのは数列の極限だろう．数列 $\{a_n\}$ とある実数値 α について， n が大きくなるときに a_n が限りなく α に近づくなれば，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書いて α を数列 $\{a_n\}$ の極限と言うのであった．極限は，関数の連続性の議論でも出てくる．例えば関数 f とある実数値 y について， x が 0 に近づくととき $f(x)$ が限りなく y に近づくなれば，

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = y \tag{1}$$

と書いた．では，この講義で何が新しく分かるのか？
数の列 (数列) の代わりに

$$f_n(x) = 1 - nx, \tag{2}$$

で定義される関数の列

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots \tag{3}$$

を考える．(1) から，各 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ごとに

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1, \tag{4}$$

となる．(4) を数列 (第 n 項が (4) で表される数列，すなわち， $1, 1, 1, \dots$ という数列) とみると，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1 \tag{5}$$

となる．この式を高校までのしかたで理解すると， n が大きくて $|x|$ が小さければ $f_n(x)$ は限りなく 1 に近づくと (？) ことになる．本当だろうか？例えば大きな数として $n = 100000000 =$

¹ 参考までに，後期の数学基礎 2 は 2 変数関数 (多変数関数) の微積分学の講義です．

1億，絶対値の小さな数（0に近い数）として $x = 2$ 億分の1，を $f_n(x)$ の定義式 (2) に代入すると，

$$f_{1\text{億}}\left(\frac{1}{2\text{億}}\right) = 1 - \frac{1\text{億}}{2\text{億}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となって，1には近くない．この式で「億」を「兆」に変えれば分かるように， n をどこまで大きく，かつ， $|x|$ をどこまで小さくしても $x = \frac{1}{2n}$ とする限り， $f_n(x)$ は $1/2$ のままである！

極限を単純に「限りなく近づく」と理解すると危険である．

そこでこの講義の最初の部分では極限（数列についておよび関数について）ということを中心に説明していく．上にあげた例について何が起きているかは講義が終わるまでの諸君への宿題としておく．

微分． 微分は極限を用いて定義される：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (6)$$

極限について慎重にならなければならない場合があるとすれば微分についても気をつけるべきことがある．危険を避けながら，微分を応用する一般公式を作る上で有用な平均値の定理がこの講義の一つの目標となる．

平均値の定理：導関数 f' が a を含むある区間で存在すれば，その区間の各点 x ごとに（但し $x \neq a$ ）

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

を満たす点 c が a と x の間にとれる．

高校で聞いたかもしれないが，その証明は詳しくやらなかったかもしれない，種々の公式，合成関数の微分や逆関数の微分，が平均値の定理から一般的に証明できることを講義する．

積分． 積分も慎重にやらないといけない問題がある．しかし，この講義では積分の精密・正確な議論は深入りせず，高校時代のすなおな延長で，いろんな計算ができることを目標にする．一つの例として

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (7)$$

という定積分がいくらになるかを考える．ここで $e = 2.718281828 \dots$ は自然対数の底と呼ばれるある定数である．

被積分関数の指数部を x^2 を x にしたものは既知であろう． e^x の導関数 $(e^x)'$ が e^x になることを知っていれば

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (8)$$

は容易である²．しかし，(7) は (8) と違って難しい．(7) はガウス積分と呼ばれ，その値は

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

² 講義では別の定義で始めるが，もともと e の値は $(e^x)' = e^x$ となるように決められたものである．

となることが知られている．この不思議な結果を導くところまで講義が間に合えば幸いである．ガウス積分の値は種々の導き方があるが，数列や極限の考えだけを使って初等的に計算する方法があり，この講義の最初のほうの内容が用いられる．