4次元 hierarchical Ising model のくりこみ軌道解析と triviality
および，非線形拡散型方程式の解の漸近的振舞の初期値依存性問題への翻訳

名大・多元　服部哲弥

0.　背景（スピン系の統計力学の臨界現象とくりこみ群）.

d を自然数（空間次元）とし，集合 $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ を添字とする変数 (スピン変数) を $\varphi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\} \in \mathbb{R}^\Lambda$ のように書く． $\mathbb{R}^\Lambda$ 上の測度 $\rho(\varphi)d\varphi = e^{-\frac{\beta}{2}(\varphi,C\varphi)}e^{-V(\varphi)}d\varphi$ を考える． C は $\Lambda\times\Lambda$ の行列で，$(\varphi, C\varphi) = \displaystyle\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} C_{ij}\varphi_i\varphi_j$. $\beta > 0$ は実パラメータ.

$\mathbb{Z}^d$ 上の強磁性スピン系の平衡系統計力学のうちで最も素朴なモデルでは，$C_{ij} = 1$ $(|i-j| = 1)$, $= 0$ $(|i-j| \neq 1)$，かつ， $e^{-V(\varphi)} = \displaystyle\prod_{i\in\Lambda} h(\varphi_i)$ ととり， h が ± 1 の付近に最大値を持つ場合を考える．無限体積極限 $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ における，大きなスケールの振舞（例えば，i と j が大きく離れているときの $\mathrm{E}[\,\varphi_i\varphi_j\,]$ の振舞など）に興味がある.

スピン系のくりこみ群解析で標準的に行われるスケール変換は block spin 変換である．これは，正定数 a（波動関数のくりこみ）と $\Lambda' \subset \Lambda$ でラベルされた Λ のブロック分割 $\Lambda = \displaystyle\bigcup_{i'\in\Lambda'} \mathbb{B}_{i'}$ に対して $\mathbb{R}^{\Lambda'} \times \mathbb{R}^\Lambda$ 行列 $B = (B_{i'\,i})$ を $(B\varphi)_{i'} = a \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{B}_{i'}} \varphi_i$ で定義するとき，

$$(\mathcal{R}\rho)(\varphi') = e^{-\frac{1}{2}(\varphi',(\mathcal{R}C)\varphi')}e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} = \int \delta(\varphi' - B\varphi)\,\rho(\varphi)\,d\varphi \tag{1}$$

で $\mathbb{R}^\Lambda$ 上の確率測度から $\mathbb{R}^{\Lambda'}$ 上の確率測度への写像 $\mathcal{R}$ を考えることである．$\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系では，e^{-V} が single site measure の直積でも，($\Lambda'\times\Lambda$ 行列 $\mathcal{R}C$ をどう選んでも）$e^{-\mathcal{R}V}$ はそうではなくなる．一般に $\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系のくりこみ群は非常に難しい.

1.　定義（hierarchical model のくりこみ群）.

(1) で直積測度が直積測度に移るモデルとして hierarchical model が知られている [2, 7, 3]．L を自然数，$\Lambda_L = \{0,1\}^L = \{i = (i_L, \cdots, i_2, i_1) \mid i_k = 0, 1,\ k = 1, 2, \cdots, L\}$ とし，

$$(\varphi, C\varphi) = (\varphi, C_L\varphi) = -\sum_{n=1}^{L}\left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{i_L,\ldots,i_{n+1}}\left(\sum_{i_n,\ldots,i_1}\varphi_{i_L,\ldots,i_1}\right)^2,$$

かつ， $e^{-V(\varphi)} = \displaystyle\prod_{i\in\Lambda_L} h(\varphi_i)$ ととったとき，hierarchical model という.

Hierarchical model について，block spin 変換として，$\varphi'_\tau = \dfrac{\sqrt{c}}{2}\displaystyle\sum_{i_1=0,1}\varphi_{\tau i_1}$, $\tau = (\tau_{L-1}, \ldots, \tau_1)$, を選び，$\mathcal{R}C = C_{L-1}$ とおくと，

$$\mathcal{R}h(x) \propto \exp(\frac{\beta}{2}x^2)\int_{\mathbb{R}} h(\frac{x}{\sqrt{c}} + y)h(\frac{x}{\sqrt{c}} - y)\,dy,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

を得る．ここで $e^{-(\mathcal{R}V)(\varphi')} = \displaystyle\prod_{i\in\Lambda'}(\mathcal{R}h)(\varphi'_i)$ とおいた．このように，hierarchical model ではくりこみ群は $\mathbb{R}$ 上の測度の集合の上の力学系に帰着する.

Hierarchical model のくりこみ群 (2) は，φ の normalization を $\beta = c^{-1} - 2^{-1}$ で定めると，Gauss 測度 $h_G(x) \propto \exp(-\dfrac{1}{4}x^2)$ を固定点に持つ．このときの $\mathbb{Z}^d$ の場合との対応から，$c = 2^{1-2/d}$ によって hierarchical model における d が決まる.

2. 結果（hierarchical Ising model の triviality）.

くりこみ群の軌道 $h_N = \mathcal{R}^N h_0$, $N = 0, 1, 2, \cdots$, の解析に関しては，特に Gauss 固定点 h_G の近傍で詳細に調べられてきた [7, 3]．他方，h_G から離れた領域は，$d = 3$ における非 Gauss 固定点の存在証明がある [5, 6] が，他にはほとんど分かっていない．$d \geqq 4$ では h_G から離れた点から出発しても単位分布以外に収束する軌道は h_G に収束すると予想されてきた (triviality)．この問題に関して次の結果を得た [4].

定理１. $s \geqq 0$ をパラメータとする $\mathbb{R}$ 上の測度の族 $h_{\mathrm{I},s}(x) = \dfrac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s))$ を single site measure h とする hirarchical model (hierarchical Ising model) について，$d \geqq 4$ ならばある $s_c > 0$ が存在して，(2) のくりこみ群軌道 $\mathcal{R}^N(h_{\mathrm{I},s_c})$ は $N \to \infty$ のとき Gauss 固定点 h_G に弱収束する． ◇

Hierarchical model において，大局的な軌道の厳密な追跡に成功したのは初めてである．

3. 問題（非線形放物型偏微分方程式の初期値問題への翻訳）.

定理１は厳密な証明であるが，計算機支援であり，大局的な軌道のすなおな振舞の数学的理由を十分わかったとは言い難い．Hierarchical model から元のモデルへのヒントを得るためにも理解を進めたいが，壁は厚い．一つの試みとして偏微分方程式への翻訳を説明して open problem としたい．

命題２. $a = \log \dfrac{2}{c}$, $b = \log \sqrt{c}$, $\bar{k} = \dfrac{2-c}{2\log c} \dfrac{\log \frac{4}{c}}{4-c}$, $\bar{f}(t) = 2^{[t]-t}$, とおく．非線形放物型偏微分方程式

$$\dot{u}(t,x) = -\frac{a}{2b}\, u(t,x) - \frac{1}{2} x u'(t,x) + \frac{1}{2} \bar{k}\, u(t,x)^2 u''(t,x) + 2\bar{k}, u(t,x)^2 \bar{f}(\frac{t}{2b})$$

において，初期値問題 $u(0,x) = (s^2 - x^2) \vee 0$ の解 $u(t,x)$ があれば $G_N(x) = \dfrac{1}{u(2bN, x)}$, $N \in \mathbb{N}$, である．ここで G_N は，$F_N(\xi) = \log \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_N(x) e^{x\xi} dx$ のルジャンドル変換 $\Gamma_N(x) = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} (x\xi - F_N(\xi))$ の微分 $G_N(x) = \dfrac{d^2 \Gamma_N}{dx^2}(x)$ である． ◇

今のところ，$\bar{f}$ を定数に置いた方程式の固定点に関して若干のことが分かっているだけである．定数関数 $u(t,x) = \dfrac{a}{4b\bar{k}\bar{f}}$ （ガウス固定点）が解になることは明らかであるが，定数関数以外の時間方向に一定の有界な解析解（非ガウス固定点）については，$d \geqq 4$ では存在せず，$3 \leqq d < 4$ では存在する．

残念ながら，偏微分方程式論の分野の蓄積を生かすことはできていない．解の漸近的振舞の初期値に関する依存性に関して，臨界現象の統計力学で要求されるほど sharp な結果を導く普遍的解析手段がそろっていないようである．むしろ，命題２の対応を逆向きに用いて，偏微分方程式の解の時間発展の漸近的振舞を理解するために，時間発展がくりこみ群（スケール変換）になるような多自由度物理系を見つけ，その物理的性質から相関不等式のような性質を見いだすことでくりこみ群の新しい応用が開けるのかもしれない．

参考文献

[1] **本講演の OHP(pdf) を web に貼ってあります．** URL: `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/` から雑記帳／解説記事　とリンクをたどって下さい．

[2] F. J. Dyson, *Exisitence of a phase–transision in a one–dimensional Ising ferromagnet,* Commun. Math. Phys. **12** (1969) 91–107.

[3] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Triviality of ϕ_4^4 and all that in a hierarchical model approximation,* Journ. Stat. Phys. **29** (1982) 683–699.

[4] T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions,* Communications in Mathematical Physics **220** (2001) 13–40.

[5] H. Koch, P. Wittwer, *A nontrivial renormalization group fixed point for the Dyson–Baker hierarchical model,* Commun. Math. Phys. **164** (1994) 627–647.

[6] H. Koch, P. Wittwer, *Bounds on the zeros of a renormalization group fixed point,* Mathematical Physics Electronic Journal **1** (1995) No. 6, 24pp..

[7] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transition: rigorous results,* Pergamon Press, 1982.