

3次元 Sierpinski Gasket 上の self-avoiding paths

東京大学教養学部 服部 久美子 (Kumiko Hattori)
宇都宮大学工学部 服部 哲弥 (Tetsuya Hattori)
京都大学数理解析研 楠岡 成雄 (Shigeo Kusuoka)

1 Introduction.

フラクタル上の self-avoiding process の問題は大きく 2 つに分けられる . ひとつは pre-フラクタル (フラクタル格子) 上の self-avoiding walk の性質を調べることで , もうひとつはその連続極限 , 即ちフラクタル (無限に細かい構造をもつもの) 上で path が無限に細かいぎざぎざをもち , かつ self-avoiding であるような process の構成などである . 2次元 pre-Sierpinski gasket (図 1) 上の self-avoiding paths(walk) に関しては [1],[3] で , その連続極限は [2] で調べられている . ここではその結果を拡張して 3次元 Sierpinski gasket 上の self-avoiding process について , 今までに調べてきたことを報告する . 2次元と 3次元の違いは次元の増加にともなう複雑さの他に , 2次元の場合はどの正三角形も一度しか通り抜けられないのに対し , 3次元では正四面体を二度まで通り抜けられることである . このため , 2次元での議論は 3次元では使えないのではないかと , という質問を何度か受けてきたが 3次元でもその複雑さにも関わらず , かなりのことが調べられることを示す .

2 3次元 pre-Sierpinski gasket 上の self-avoiding paths.

3次元 pre-Sierpinski gasket は次のように定義される . $O = (0, 0, 0)$, $a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $b_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $c_0 = (1, 0, 0)$, とし , F_0 を正四面体 $Oa_0b_0c_0$ の辺上の点からなる集合とする . 集合 F_0, F_1, F_2, \dots , は帰納的に

$$F_{n+1} = F_n \cup (F_n + 2^n a_0) \cup (F_n + 2^n b_0) \cup (F_n + 2^n c_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

で定義する (図 2) . 但し , $A+a = \{x+a \mid x \in A\}$, および $kA = \{kx \mid x \in A\}$ とする . $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ が 3次元 pre-Sierpinski gasket である . F の頂点 (辺同

士の交わるところ)の集合を G , $a_n = 2^n a_0$, $b_n = 2^n b_0$, $c_n = 2^n c_0$ と呼ぶことにする.

次に G 上の self-avoiding path の集合 W_0 を, $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ から G への写像 w で次の条件を満たす $L(w) \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が存在するものの集合と定義する.

$$\begin{aligned} w(i) &= w(L(w)), & i \geq L(w), \\ w(i_1) &\neq w(i_2), & 0 \leq i_1 < i_2 \leq L(w), \\ |w(i) - w(i+1)| &= 1, & 0 \leq i \leq L(w) - 1, \\ \overline{w(i)w(i+1)} &\subset F, & 0 \leq i \leq L(w) - 1. \end{aligned}$$

$L(w)$ を path w の長さと呼ぶ.

T を F 上に辺を持つ一辺 1 の (閉) 正四面体全体の集合とする. $w \in W_0$ の各正四面体 $\Delta \in T$, の通り方は (通るとすれば) 図 3 の 4 種に分類できる. それに対応して, $S_i(w)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $w \in W_0$, を,

$$S_i(w) = \{\Delta \in T \mid w \text{ は } \Delta \text{ を } (i) \text{ 型で通る.}\}$$

$i = 1, 2, 3, 4$ に対し, $s_i(w)$ を $S_i(w)$ の元の数とする. $s_1 + 2s_2 + 2s_3 + 3s_4 = L$ の関係がある.

$n \in \mathbf{Z}_+$ 及び $p, q \in F_n \cap G$ に対し, $W^{(n,p,q)} \subset W_0$ を

$$W^{(n,p,q)} = \{w \in W_0 \mid w(0) = p, w(L(w)) = q, w(\mathbf{Z}_+) \subset F_n\},$$

で定義し, 更に $W_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $n \in \mathbf{Z}_+$, を次のように定義する.

$$\begin{aligned} W_1^{(n)} &= \{w \in W^{(n,O,a_n)} \mid w(\mathbf{Z}_+) \cap \{b_n, c_n\} = \emptyset\}, \\ W_2^{(n)} &= \{(w_1, w_2) \in W^{(n,O,a_n)} \times W^{(n,b_n,c_n)} \mid w_1(\mathbf{Z}_+) \cap w_2(\mathbf{Z}_+) = \emptyset\}, \\ W_3^{(n)} &= \{w \in W^{(n,O,a_n)} \mid w(\mathbf{Z}_+) \cap \{b_n, c_n\} = \{b_n\}\}, \\ W_4^{(n)} &= \{w \in W^{(n,O,a_n)} \mid \exists i \in \mathbf{Z}_+, \exists j \in \mathbf{Z}_+; i < j, w(i) = b_n, w(j) = c_n\}, \end{aligned}$$

W_0 の部分集合 W の generating function $X(W)$ を

$$X(W)(\vec{x}) = \sum_{w \in W} \prod_{i=1}^4 x_i^{s_i(w)}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4.$$

で定義する. $w = (w', w'') \in W_2^{(n)}$ に対する s_i は, $\Delta \in T$ に対し $(w' \cup w'') \cap \Delta$ は空集合でなければ, やはり上の 4 つの通り方のどれかになっていることから同様に定義できる.

$X_{i,n}(\vec{x}) = X(W_i^{(n)})(\vec{x})$, $i = 1, 2, 3, 4$ とする.

Proposition 2.1. $X_{i,n}(\vec{x})$ は次の漸化式を満たす:

$$\vec{X}_{n+1}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\vec{X}_n(\vec{x})), \quad n \in \mathbf{Z}_+,$$

ここで $\vec{X}_n(\vec{x}) = (X_{1,n}(\vec{x}), X_{2,n}(\vec{x}), X_{3,n}(\vec{x}), X_{4,n}(\vec{x}))$, 及び $\vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}$. $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$ は次を満たす:

- (1) 各 $\Phi_i, i = 1, 2, 3, 4$, は 4 次の正係数多項式. $\Phi_i, i = 1, 2, 3, 4$, の各項はそれぞれ 2 次, 4 次, 3 次, 4 次以上.
- (2) $\Xi_0 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^4 \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, x_1^2 \geq x_2\}$ とすると, $\vec{\Phi}(\Xi_0) \subset \Xi_0$.
- (3)

$$\Phi_1(x, y, 0, 0) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2, \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(x, y, 0, 0) = x^4 + 4x^3y + 22y^4. \quad (2.2)$$

- (4) 次のような正係数多項式 $\Phi_{4,1}, \Phi_{4,2}, \Phi_{3,1}$ 及び $\Phi_{3,2}$ が存在して,

$$\Phi_4(\vec{x}) = \Phi_{4,1}(\vec{x})x_3 + \Phi_{4,2}(\vec{x})x_4, \quad (2.3)$$

$$\Phi_3(\vec{x}) = \Phi_{3,1}(\vec{x})x_3 + \Phi_{3,2}(\vec{x})x_4. \quad (2.4)$$

註: 漸化式 $\vec{\Phi}$ の explicit な形も求められているが, 省略する. eq. (2.1) 及び eq. (2.2) は [5],[6] にも書かれている.

$$D = \{\vec{x} \in \Xi_0 \mid \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} (X_{1,n}(\vec{x}) + X_{2,n}(\vec{x})) < \infty\}$$

と定義しよう.

Proposition 2.2. D は Ξ_0 の閉部分集合.

$$D^\circ = \{\vec{x} \in \Xi_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \in \{1,2,3,4\}} X_{i,n}(\vec{x}) = 0\}.$$

$$\vec{\Phi}(D^\circ) \subset D^\circ, \quad \vec{\Phi}(\partial D) \subset \partial D, \quad \text{及び} \quad \vec{\Phi}(D^c) \subset D^c.$$

ここで, $D^c = \Xi_0 \setminus D$, $\partial D = \overline{D} \cap \overline{D^c}$, $D^\circ = D \setminus \partial D$ とした.

これらの集合に関して次のような単調性が示せる.

Proposition 2.3. (1) $\vec{x} \in D$, $\vec{x}^j \in \Xi_0$, $x'_i \leq x_i, i = 1, 2, 3, 4$, ならば $\vec{x}^j \in D$.

- (2) $\vec{x} \in \partial D$, $\vec{x}^j \in \Xi_0$, $x'_i > x_i, i = 1, 2, 3, 4$, ならば $\vec{x}^j \in D^c$.

(3) $\Xi = \Xi_0 \cap \{\vec{x} \in \mathbf{R}^4 \mid x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ とおく . $\vec{x} \in \partial D \cap \Xi$, $\vec{x}' \in \Xi$, $\vec{x}' \neq \vec{x}$, 及び $x'_i \leq x_i, i = 1, 2, 3, 4$, ならば $\vec{x}' \in D^\circ$.

(4) $\vec{x} \in \partial D \cap \Xi$, $\vec{x}' \in \Xi$, $\vec{x}' \neq \vec{x}$, 及び $x'_i \geq x_i, i = 1, 2, 3, 4$, ならば $\vec{x}' \in D^c$.

関数 $R: \Xi \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$R(\vec{x}) = \max\left\{\frac{x_3}{x_1}, \frac{2x_4}{x_3}\right\},$$

で定義し,

$$R_n(\vec{x}) = R(\vec{X}_n(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \Xi$$

とする .

Proposition 2.4. 各 $\vec{x} \in \Xi$ に対し, $R_n(\vec{x})$ は n について非増加 . 特に,

$$R_\infty(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\vec{x})$$

が存在して非負 . $\vec{x} \in D \cap \Xi$ ならば, $R_\infty(\vec{x}) = 0$.

eq. (2.3) 及び eq. (2.4) より $\vec{\Phi}$ は x_1-x_2 平面を自分自身へ移すことが分かる . また Proposition 2.4 は, $\vec{x} \in D \cap \Xi$ から出発すると, 漸化式によって $n \rightarrow \infty$ で x_1-x_2 平面に含まれることを意味する . よってこの平面内の漸化式による動きを詳しく調べることにする . $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$,

$$\phi_1(x, y) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2, \quad (2.5)$$

$$\phi_2(x, y) = x^4 + 4x^3y + 22y^4 \quad (2.6)$$

とおく .

Proposition 2.5. $\mathbf{R}_+^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ における $\vec{\phi}$ の固定点は, $(0, 0)$, $(0, 22^{-\frac{1}{3}})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 及び (x_c, y_c) で, x_c と y_c は $\frac{3}{7} < x_c < \frac{1}{2}$, $0 < y_c < \frac{9}{49}$ を満たす正数 . , 特に, $x_c^2 > y_c$.

$(x_n(x, y), y_n(x, y)), n = 0, 1, 2, 3, \dots$ を帰納的に $(x_0(x, y), y_0(x, y)) = (x, y)$ 及び $(x_{n+1}(x, y), y_{n+1}(x, y)) = \vec{\phi}(x_n(x, y), y_n(x, y))$ で定義する .

$D^{(2)} = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} (x_n(x, y) + y_n(x, y)) < \infty\}$ と定義し, $D^{(2)c}$,

$D^{(2)\circ}$, 及び $\partial D^{(2)}$ をそれぞれ \mathbf{R}_+^2 における $D^{(2)}$ の補集合, 内部, 及び境界とする .

Proposition 2.6. (1) $D^{(2)}$ は \mathbf{R}_+^2 の閉集合で

$$\vec{\phi}(D^{(2)o}) \subset D^{(2)o}, \quad \vec{\phi}(\partial D^{(2)}) \subset \partial D^{(2)}, \quad \text{及び} \quad \vec{\phi}(D^{(2)c}) \subset D^{(2)c}.$$

(2) 正数 c 及び連続な狭義減少関数 $p: [0, c] \rightarrow \mathbf{R}$ で $\partial D^{(2)} = \{(x, p(x)) \mid x \in [0, c]\}$ となるものが存在する.

数値計算によって得られた $D^{(2)}$ の様子を図 4 に示す.

$\partial D^{(2)}$ 上の振舞いは次の命題によって示される. $\Xi_0^{(2)} = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x^2 \geq y\}$ とおく.

Proposition 2.7. $(x, y) \in \partial D^{(2)}$ ならば, $(x_n(x, y), y_n(x, y))$ は $\vec{\phi}$ の固定点のどれかに収束する. 特に, $(x, y) \in \partial D^{(2)} \cap \Xi_0^{(2)}$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n(x, y), y_n(x, y)) = (x_c, y_c)$.

3 3次元 Sierpinski gasket 上の self-avoiding process – 連続極限.

この節では前節までの 3次元 pre-Sierpinski gasket 上の self-avoiding paths の連続極限をとることにより, 3次元 Sierpinski gasket 上の self-avoiding process を構成する. $F_n, n = 0, 1, 2, \dots$ を前節で定義された集合とし,

$$\tilde{F}_n = 2^{-n} F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

と定義する (有限) 3次元 Sierpinski gasket は

$$\tilde{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n$$

と定義される.

$$C = \{w \in C([0, \infty) \rightarrow \tilde{F}) \mid w(0) = O, \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = a_0\},$$

及び

$$C' = \{w \in C([0, \infty) \rightarrow \tilde{F}) \mid w(0) = b_0, \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = c_0\},$$

と定義すると C (resp. C') は距離

$$d(u, v) = \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t) - v(t)|,$$

$u, v \in C$ (resp. C'). によって, 完備可分距離空間となる.

次に pre-Sierpinski gasket 上の self-avoiding paths を縮小して, 更に線型内挿して連続関数にしたものの集合を考える. 即ち写像 $\gamma: W_1^{(n)} \cup W_2^{(n)} \rightarrow C \cup (C \times C')$ を次のように定義する. $u \in W_1^{(n)}$ に対し,

- (1) $j \in \mathbf{Z}_+$ のとき, $\gamma u(j) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-n}u(j)$,
- (2) $j \leq t < j+1$, $j \in \mathbf{Z}_+$ のとき, $\gamma u(t) \stackrel{\text{def}}{=} (j+1-t)\gamma u(j) + (t-j)\gamma u(j+1)$.

$u = (u_1, u_2) \in W_2^{(n)}$ に対しても,

- (1) $j \in \mathbf{Z}_+$ のとき, $\gamma u(j) = (\gamma u_1, \gamma u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (2^{-n}u_1(j), 2^{-n}u_2(j))$.
- (2) $j \leq t < j+1$, $j \in \mathbf{Z}_+$ のとき, $\gamma u(t) \stackrel{\text{def}}{=} (j+1-t)\gamma u(j) + (t-j)\gamma u(j+1)$.

γ は 1 : 1 写像である .

$$\tilde{W}_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \gamma W_i^{(n)} \mid s_3(\gamma^{-1}w) = s_4(\gamma^{-1}w) = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

と定義する . $w \in \tilde{W}_1^n$ は, $0 \leq t_1 < t_2 \leq L(\gamma^{-1}w)$ ならば, $w(t_1) \neq w(t_2)$ という意味で self-avoiding である .

次に, \tilde{W}_1^n を台とする C 上の確率測度 $\mu_n(x, y)$ 及び \tilde{W}_2^n を台とする $C \times C'$ 上の確率測度 $\nu_n(x, y)$ を定義しよう . ここで (x, y) は $\mathbf{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に値をとるパラメータである . \tilde{W}_i^n は有限集合であるから, 各 $w \in \tilde{W}_1^n$ に対して,

$$\mu_n(x, y)[w] \stackrel{\text{def}}{=} \{x_n(x, y)\}^{-1} x^{s_1(\gamma^{-1}w)} y^{s_2(\gamma^{-1}w)},$$

と定義し, 各 $w \in \tilde{W}_2^n$ に対しては,

$$\nu_n(x, y)[w] \stackrel{\text{def}}{=} \{y_n(x, y)\}^{-1} x^{s_1(\gamma^{-1}w)} y^{s_2(\gamma^{-1}w)}$$

とする . (但し $0^0 = 1$ とする .) 定義より,

$$\mu_n(x, y)[\tilde{W}_1^n] = 1$$

$$\nu_n(x, y)[\tilde{W}_2^n] = 1.$$

$T_n = \{2^{-n}\Delta \mid \Delta \in T\}$ とおく . T_n は各辺が \tilde{F}_n 上にある一辺 2^{-n} の正四面体の集合である . $w \in C, k \in \mathbf{Z}_+$ に対し, w が「通り抜けた」 T_k の元を順に並べたもの $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$, $\Delta_i \in T_k$ を w の skeleton とよび $\sigma_k(w)$ と書く ! 「通り抜けた」とは 1 つの頂点から入り内部を通過して別の頂点を訪れることであり (図 5), 同じ正四面体を続けて複数回通り抜けたときは 1 回とみなす (即ち $\Delta_i \neq \Delta_{i+1}$.) また C の定義より, $\sigma_k(w)$ は有限列である . (skeleton の厳密な定義は [2],[4] 参照 .) skeleton は次のような性質を持つ .

- (1) $O \in \Delta_1$.
- (2) Δ_i と Δ_{i+1} は頂点で接する .

特に, $w \in \tilde{W}_1^n$ のとき,

(3) $a_0 \in \Delta_N$.

(4) $\sigma_k(w)$ は同一の正四面体を 3 回以上含まない .

(5) 順序を考えないとき , $i \neq j$ ならば $\{\Delta_i, \Delta_{i+1}\} \neq \{\Delta_j, \Delta_{j+1}\}$.

以下 $\{\mu_n(x_c, y_c)\}, n \in \mathbf{Z}_+$ について得られている結果を示そう .

(x_c, y_c) が固定点であることから ,

Proposition 3.1. k を固定し $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$, $\Delta_i \in T_k, i = 1, \dots, N$ とする . 任意の $n \geq k$ に対して ,

$$\begin{aligned} \mu_n(x_c, y_c)[\sigma_k(w) = \Delta] &= x_c^{N-m-1} y_c^m, \Delta \text{ が 1-5 を満たすとき,} \\ &= 0, \text{ それ以外.} \end{aligned}$$

但し , m は Δ に含まれる同一の正四面体の組の数 .

$w \in C$ に対し , a_0, c_0 への到達時刻

$$\begin{aligned} T_{a_0}(w) &= \inf\{t > 0 \mid w(t) = a_0\}, \\ T_{c_0}(w) &= \inf\{t > 0 \mid w(t) = c_0\} \end{aligned}$$

を考える . これについては次の命題が成り立つ .

Proposition 3.2. (1) $(C, \mu_n(x_c, y_c))$ の下での $\lambda^{-n} T_{a_0}$ の分布は , $n \rightarrow \infty$ で \mathbf{R}_+ 上の確率測度 μ に弱収束する . 任意の $t \in \mathbf{R}_+$ に対して $\mu[\{t\}] = 0$.

(2) $(C \times C', \nu_n(x_c, y_c))$ の下での $(\lambda^{-n} T_{a_0}, \lambda^{-n} T_{c_0})$ の分布は , $n \rightarrow \infty$ で \mathbf{R}_+^2 上の確率測度 ν に弱収束する . 任意の $t \in \mathbf{R}_+$ に対して $\nu[\{t\} \times \mathbf{R}_+] = \nu[\mathbf{R}_+ \times \{t\}] = 0$.

ここで λ は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x_c, y_c) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x_c, y_c) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x_c, y_c) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x_c, y_c) \end{pmatrix}$$

の最大固有値で $\lambda = 2.9765 \dots$

$\Delta \in T_k$ とすると , $\Delta \cap \tilde{F}$ は \tilde{F} と相似な構造を持つ . このことから , $A = \{w \in C \mid \sigma_k(w) = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)\}$ とおき , $n \geq k$ とすると , 条件付き確率 $\mu_n(x_c, y_c)[\cdot \mid A]$ の下で $\Delta_i, i = 1, \dots, N$ の横断に要する時間は正四面体 Δ_i が $\sigma_k(w)$ に一度しか含まれないときは $\mu_{n-k}(x_c, y_c)$ の下での T_{a_0} , 二度含まれるときは $\nu_{n-k}(x_c, y_c)$ の下での (T_{a_0}, T_{c_0}) と等しい分布を持つことがわか

る．よって Δ_i の横断に要する時間の分布も λ^{-n} でスケールすると $n \rightarrow \infty$ で弱収束することがわかる．

時間のスケール変換 $U_n(\alpha) : C \rightarrow C$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha > 0$ を

$$U_n(\alpha)(w)(t) = w(\alpha^{-n}t)$$

で定義する．その像測度を $U_n(\alpha)\mu_n(x_c, y_c)$ のように書く．

各四面体の横断時間の収束と Proposition 3.1より次の定理を得る．

Theorem 3.3. $U_n(\lambda)\mu_n(x_c, y_c)$ は C 上のある確率測度 P に $n \rightarrow \infty$ で弱収束する．

Theorem 3.4. k を固定し $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$, $\Delta_i \in T_k, i = 1, \dots, N$ とする．任意の $n \geq k$ に対して,

$$\begin{aligned} P[\sigma_k(w) = \Delta] &= x_c^{N-m-1}y_c^m, \Delta \text{が 1-5 を満たすとき,} \\ &= 0, \text{ それ以外.} \end{aligned}$$

Theorem 3.5.

$$P[w \text{は self-avoiding}] = 1.$$

Theorem 3.6.

$$P[\{w(t); t \in [0, \infty)\} \text{の Hausdorff 次元は } \frac{\log \lambda}{\log 2}] = 1.$$

Theorem 3.5は確率1で, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T_{a_0}(w)$ ならば, $w(t_1) \neq w(t_2)$ という意味である．Theorem 3.6は Hausdorff 次元が1より大きいことから path が無限に細かいぎざぎざを持つことを意味している．

References.

- [1] K. Hattori, T. Hattori and S. Kusuoka, Self-avoiding Paths on the Pre-Sierpinski Gasket, Prob. Theo. Rel. Fields 84 (1990) 1-26.
- [2] K. Hattori and T. Hattori, Self-avoiding Process on the Sierpinski Gasket, Prob. Theo. Rel. Fields 88 (1991) 405-528.
- [3] T. Hattori and S. Kusuoka, The Exponent for Mean Square Displacement of Self-avoiding Random Walk on Sierpinski Gasket, preprint.
- [4] K. Hattori, T. Hattori and S. Kusuoka, in preparation.
- [5] D. Dhar, Self-avoiding Random Walks: Some Exactly Soluble Cases, J. Math. Phys. 19 (1978) 5-11.
- [6] R. Rammal, G. Toulouse and J. Vannimenus, Self-avoiding Walks on Fractal Spaces: Exact Results and Flory Approximation, J. Physique 45 (1984) 389-394.